数理解析研究所講究録 第2118巻 2019年 63-79

Quasi-orthogonal Integral の理論と応用

防衛大学校・総合教育学群　瀬戸　道生 *
Michio Seto
National Defense Academy

概要

ヒルベルト空間論における de Branges-Rovnyak 分解とは直交分解を一般化した概念である．それはもともと不変部分空間問題攻略のために開発された理論のようであるが，今日ではその観点が強調されることは少なくなり，複素解析学，制御理論，作用素論の3分野の境界に位置する問題との関連で語られることが多くなった．特に，de Branges が複素解析学における Bieberbach 予想を解決する際にその理論の連続版（quasi-orthogonal integral）を応用したことは当時の大きな驚きであり，そのことは現在も語り継がれている．この小論では quasi-orthogonal integral の理論をグラフ理論とハーディ空間上の作用素論への応用とともに紹介する．

1　Quasi-orthogonal Integral の理論

ここでは quasi-orthogonal integral の理論を概説する．この章は Ando [1], Sarason [10], Vasyunin-Nikol'skiĭ [15] を元にして，[11, 12] でまとめたものの抄録である．

1.1　積分作用素

$\mathcal{H}$ を可分なヒルベルト空間とし，$\mathcal{H}$ に値をとる区間 $[a,b]$ 上の2乗可積分関数の全体を $L^2(\mathcal{H})$ と表す．ただし，積分はボホナー積分とする．区間は今後 $[a,b]$ で固定する．$\mathcal{G}$ をもう一つの可分ヒルベルト空間とし，次のような作用素の族 $\{T_s\}_{a\le s\le b}$ を考える．

(i) $T_s:\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ $(a\le s\le b)$,

*本研究は JSPS 科研費 15K04926 の助成を受けたものです．

(ii) $\{T_s\}_{a\leq s\leq b}$ は一様有界．すなわち，$M=\sup_{a\leq s\leq b}\|T_s\|<\infty$.

(iii) T_s^* は変数 s に関して強連続.

このとき，次の不等式が成り立つ.

$$|\int_a^b \langle f(s), T_s^* y\rangle_{\mathcal{H}}\ ds| \leq (b-a)^{1/2}M\|f\|_{L^2(\mathcal{H})}\|y\|_{\mathcal{G}} \quad (y\in\mathcal{G}).$$

よって，共役線型汎関数

$$\varphi : y \mapsto \int_a^b \langle f(s), T_s^* y\rangle_{\mathcal{H}}\ ds \quad (y\in\mathcal{G})$$

は連続である．従って，リースの表現定理により，次を満たす $z\in\mathcal{G}$ が存在する.

$$\langle z, y\rangle_{\mathcal{G}} = \int_a^b \langle f(s), T_s^* y\rangle_{\mathcal{H}}\ ds \tag{1.1}$$

かつ

$$\|z\|_{\mathcal{G}} = \|\varphi\| \leq (b-a)^{1/2}M\|f\|_{L^2(\mathcal{H})}. \tag{1.2}$$

この z を

$$\int_a^b T_s f(s)\ ds$$

と表せば (1.1) は

$$\langle \int_a^b T_s f(s)\ ds, y\rangle_{\mathcal{G}} = \int_a^b \langle T_s f(s), y\rangle_{\mathcal{G}}\ ds \quad (y\in\mathcal{G})$$

と表される．さらに，

$$\mathbb{T} : L^2(\mathcal{H}) \to \mathcal{G}, \quad \mathbb{T}f = \int_a^b T_s f(s)\ ds$$

と定めれば，(1.2) はこの $\mathbb{T}$ が有界であることを意味する.

ここで，T_s に関する二つ注意を与える．まず，T_s^* は強連続であるから，任意の $y\in\mathcal{G}$ に対し，$\langle f(s), T_s^* y\rangle_{\mathcal{H}}$ は可測である．すなわち，$T_s f(s)$ は弱可測である．可分の場合，弱可測性は強可測性を導くので，$T_s f(s)$ は強可測であることがわかる．次に，

$$\int_a^b T_s T_s^*\ ds$$

は $\mathcal{G}$ 上の有界な非負自己共役作用素である．実際，T_s^* は強連続かつ一様有界であるから，

$$\int_a^b \langle T_s^* x, T_s^* y\rangle_{\mathcal{H}} ds \quad (x, y\in\mathcal{G})$$

は収束する．よって，

$$\langle(\int_a^b T_sT_s^*\ ds)x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \int_a^b \langle T_s^*x, T_s^*y\rangle_{\mathcal{H}}\ ds$$

と定めればよい．

1.2 de Branges-Rovnyak 空間

一般に有界線型作用素 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ が与えられたとき，T の値域上で引き戻しノルム

$$\|Tx\|_{\mathcal{M}(T)} = \|P_{(\ker T)^\perp}x\|_{\mathcal{H}}$$

を考えることにより，

$$\mathcal{M}(T) = (\operatorname{ran} T, \|\cdot\|_{\mathcal{M}(T)})$$

はヒルベルト空間となる．これはヒルベルト空間における準同型定理

$$\operatorname{ran} T \cong \mathcal{H}/\ker T \cong (\ker T)^\perp$$

を考えていることに他ならない．さらに，T が縮小的なとき

$$\mathcal{H}(T) = \mathcal{M}(\sqrt{I_{\mathcal{G}} - TT^*})$$

も同様に定めることができ，$\mathcal{H}(T)$ は $\mathcal{M}(T)$ の de Branges-Rovnyak 補空間と呼ばれる．実際，

$$\mathcal{G} = \mathcal{M}(T) + \mathcal{H}(T)$$

と分解できる．この分解は直和ではないが，次の意味で一意的である．

- $\forall z\in\mathcal{G}\ \exists x\in\mathcal{M}(T)$ and $\exists y\in\mathcal{H}(T)$ s.t. $z = x + y$.
- $z\in\mathcal{G}$ の任意の分解 $z = x + y$ $(x\in\mathcal{M}(T), y\in\mathcal{H}(T))$ に対し，次のノルム不等式が成り立つ．
$$\|z\|_{\mathcal{G}}^2 \le \|x\|_{\mathcal{M}(T)}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}(T)}^2.$$
- さらに，このノルム不等式が等式になるような分解が一意に存在する．

この主張は次のように少々一般化して考えるとわかりやすい．二つの有界線型作用素 $T_j:\mathcal{H}_j\to\mathcal{G}$ $(j=1,2)$ に対し，

$$\mathbb{S}:\mathcal{M}(T_1)\oplus\mathcal{M}(T_2)\to\mathcal{G},\quad (x,y)\to x+y$$

と定める．このとき，ヒルベルト空間の等式

$$\mathcal{M}(\mathbb{S}) = \mathcal{M}(\sqrt{T_1T_1^* + T_2T_2^*})$$

が成り立つ．特に，T が縮小作用素で，$T_1 = T$, $T_2 = \sqrt{I_{\mathcal{G}} - TT^*}$ とおくとき，

$$\mathcal{G} = \mathcal{M}(T) + \mathcal{H}(T)$$

を得る．先のノルム不等式も

$$\|z\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\mathbb{S}(x,y)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{S})}^2 = \|P_{(\ker \mathbb{S})^\perp}(x,y)\|_{\mathcal{M}(T)\oplus\mathcal{H}(T)}^2 \leq \|x\|_{\mathcal{M}(T)}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}(T)}^2$$

から得られる．一意性についても，(x,y) を $(\ker \mathbb{S})^\perp$ から選んでくればよい．

これの積分版が次である．

定理 1.1. 前節の $\{T_s\}_{a\leq s\leq b}$ と $\mathbb{T}$ に対し，

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathcal{M}\left(\left(\int_a^b T_sT_s^*\ ds\right)^{1/2}\right) \tag{1.3}$$

が成り立つ．特に，任意の $u \in \mathcal{M}((\int_a^b T_sT_s^*\ ds)^{1/2})$ に対し，次を満たす $f \in L^2(\mathcal{H})$ が存在する．

$$u = \int_a^b T_sf(s)\ ds$$

かつ

$$\|\int_a^b T_sf(s)\ ds\|_{\mathcal{M}((\int_a^b T_sT_s^*\ ds)^{1/2})}^2 \leq \int_a^b \|T_sf(s)\|_{\mathcal{M}(T_s)}^2\ ds.$$

以下では，$\mathbb{T}$ の作用を考えて，

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \int_a^b \mathcal{M}(T_s)\ ds.$$

と表すことにしよう．

1.3 積分分解 1

$\mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間とし，$\{T_s\}_{a\leq s\leq b}$ を 1.1 節で考えた作用素の族とする．この $\{T_s\}_{a\leq s\leq b}$ に対し，次の (i), (ii), (iii), (iv) を満たす縮小作用素の族 $\{T_{rs}\}_{a\leq r\leq s\leq b}$ が存在すると仮定する．

(i) $T_s = T_rT_{rs}$ $(r \leq s)$,

(ii) $T_{rt} = T_{rs}T_{st}$ $(r \leq s \leq t)$,

(iii) $T_{ss} = I_{\mathcal{H}}$,

(iv) T_{rs} は r と s に関し滑らか.

この $\{T_{rs}\}_{a \leq r \leq s \leq b}$ を発展族 (evolution family) と呼ぶことにする.

補題 1.1.

$$\Omega(s) = \frac{\partial T_{rs}}{\partial r}|_{r=s} = \lim_{r \to s} \frac{T_{rs} - I_{\mathcal{H}}}{r - s}.$$

とおく. このとき, 次が成り立つ.

(i) $\dfrac{\partial T_{rs}}{\partial r} = \Omega(r)T_{rs}$,

(ii) $\dfrac{\partial T_{rs}}{\partial s} = -T_{rs}\Omega(s)$,

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial s}(-T_{rs}T_{rs}^*) = T_{rs}(2\,\mathrm{Re}\,\Omega(s))T_{rs}^*$.

補題 1.1 の (iii) により,

$$2\,\mathrm{Re}\,\Omega(s) = \{\frac{\partial}{\partial s}(-T_{rs}T_{rs}^*)\}|_{r=s}$$

が成り立つ. さらに, T_{ts} は縮小的であるから,

$$\|T_{rs}^*x\|_{\mathcal{H}}^2 = \|T_{ts}^*T_{rt}^*x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|T_{rt}^*x\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (r \leq t \leq s)$$

が成り立つ. すなわち, $\langle T_{rs}T_{rs}^*x, x\rangle_{\mathcal{H}}$ は変数 s に関し減少する. よって,

$$\mathrm{Re}\,\Omega(s) \geq O$$

が成り立つことに注意する. ここで, $\Delta(s)$ を次のように選ぶ.

$$\Delta(s)\Delta(s)^* = 2\,\mathrm{Re}\,\Omega(s).$$

ただし, $\Delta(s)$ は変数 s に関し連続かつ一様有界と仮定する.

定理 1.2. $\mathcal{H}(T_{rt})$ $(r \leq t)$ は次の積分表示をもつ.

$$\mathcal{H}(T_{rt}) = \int_r^t \mathcal{M}(T_{rs}\Delta(s))\; ds.$$

特に, 任意の $f \in L^2(\mathcal{H})$ に対し,

$$\|\int_r^t T_{rs}\Delta(s)f(s)\; ds\|_{\mathcal{H}(T_{rt})}^2 \leq \int_r^t \|\Delta(s)f(s)\|_{\mathcal{M}(\Delta(s))}^2\; ds \leq \int_r^t \|f(s)\|_{\mathcal{H}}^2\; ds$$

が成り立つ.

注意 1.1. 前節まではかなり一般的に議論を進めることができたが，この節ではときおり仮定を追加した．それらの仮定は，有限次元の具体的な例では自然に満たされるものであるが，無限次元の場合は具体的な場合でも非自明な確認が必要になるであろう．

1.4　積分分解 2（重み付きの場合）

$\sigma(s)$ を $[a,b]$ で定義された非負作用素値可微分関数とする．ここでは，$\sigma(s)$ は可逆かつ $\sigma(s)^{-1}$ は一様有界と仮定する（たいていの場合，$\sigma(s)+\varepsilon I_{\mathcal{H}}$ $(\varepsilon>0)$ を考えれば間に合う）．

$$\mathcal{H}_s=\mathcal{M}(\sigma^{-1/2}(s))\quad(a\le s\le b)$$

と定める．

補題 1.2. $\{T_{rs}\}_{a\le r\le s\le b}$ を $\mathcal{H}$ 上の発展族とする．このとき，T_{rs} が $\mathcal{H}_s$ から $\mathcal{H}_s$ への縮小作用素である必要十分条件は

$$\Lambda(s)=\sigma'(s)+2\,\mathrm{Re}(\sigma(s)\Omega(s))\ge O \tag{1.4}$$

である．

以下，補題 1.2 の条件を仮定する．すなわち，$\{T_{rs}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_s,\mathcal{H}_r):a\le r\le s\le b\}$ を縮小的な発展族とする．このとき，

$$\sigma(s)=\tau(s)^*\tau(s)$$

と分解する．ただし，$\tau(s)$ の可微分性を仮定する．$\widetilde{T}_{rs}$ を次の図式で定義しよう．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_s \arrow[r, "T_{rs}"] \arrow[d, "\tau(s)"'] & \mathcal{H}_r \arrow[d, "\tau(r)"] \\
\mathcal{H} \arrow[r, "\widetilde{T}_{rs}"'] & \mathcal{H},
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

すなわち，

$$\widetilde{T}_{rs}=\tau(r)T_{rs}\tau(s)^{-1}$$

と定める．このとき，

$$\widetilde{T}_{rs}\widetilde{T}_{st}=\widetilde{T}_{rt}\quad(a\le r\le s\le t\le b)$$

が成り立つ．ここで，$\tau(s):\mathcal{H}_s\to\mathcal{H}$ はユニタリ作用素であることに注意しておく．$\tau(s):\mathcal{H}_s\to\mathcal{H}$ の共役作用素を $\tau(s)^\sharp$ と表す（注意：$\tau(s)^*$ は $\tau(s):\mathcal{H}\to\mathcal{H}$

の共役作用素とする）．同様に，$T_{rs}:\mathcal{H}_s\to\mathcal{H}_r$ の共役作用素を $T^{\sharp}_{rs}$ と表す．このとき，

$$\widetilde{T}_{rs}=\tau(r)T_{rs}\tau(s)^{\sharp}\quad \text{かつ}\quad (\widetilde{T}_{rs})^{*}=\tau(s)T^{\sharp}_{rs}\tau(r)^{\sharp}$$

が成り立つ．

定義 1.1. $\mathcal{H}^{\sigma(r)}_{\sigma(s)}(T_{rs})$ を $T_{rs}:\mathcal{H}_s\to\mathcal{H}_r$ に関する de Branges-Rovnyak 補空間とする．すなわち，

$$\mathcal{H}^{\sigma(r)}_{\sigma(s)}(T_{rs})=\mathcal{M}\left(\sqrt{I_{\mathcal{H}_r}-T_{rs}T^{\sharp}_{rs}}\right)$$

と定める．

$\widetilde{\Omega}$ と $\widetilde{\Delta}$ を発展族 $\{\widetilde{T}_{rs}\}_{a\le r\le s\le b}$ に対応する 1.3 で定めた作用素とする．

定理 1.3. $\{T_{rs}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_s,\mathcal{H}_r):a\le r\le s\le b\}$ を発展族とし，$\Gamma=\tau^{-1}\widetilde{\Delta}$ とおく．このとき，$\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt})$ $(a\le r\le t\le b)$ は次のように積分分解される．

$$\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt})=\int_r^t\mathcal{M}(T_{rs}\Gamma(s))\ ds.$$

特に，任意の $f\in L^2(\mathcal{H})$ に対し，

$$\|\int_r^t T_{rt}\Gamma(s)f(s)\ ds\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma(t)}_{\sigma(r)}(T_{rt})}\le\int_r^t\|\Gamma(s)f(s)\|^2_{\mathcal{M}(\Gamma(s))}\ ds\le\int_r^t\|f(s)\|^2_{\mathcal{H}}\ ds.$$

が成り立つ．

注意 1.2. 前節に引き続き，この節でも途中でいくつかの新たな仮定が出てきたが，有限次元の具体的な例ではほとんど問題はない．次の章で簡単に解説するが，例えば [14] を参照．なお，de Branges は Bieberbach 予想の証明の際に一般化ディリクレ空間の有限次元部分空間への局所化を行っている（1985 年に Acta Math. に発表された論文ではなく de Branges [2] を参照）．無限次元では一般論は困難なように思うが，具体的で良い状況であればある程度話を進められるかもしれない（Ghosechowdhury [4, 5] を参照）．

2　応用 1（グラフ理論）

V を固定された有限集合とし，$G_j=(V,E_j)$ $(j=0,1)$ を，V を頂点集合，E_j を辺集合とする有限単純連結グラフとする．さらに，ここでは $G_0\subset G_1$, すなわち，

$$\{x,y\}\in E_0\Rightarrow\{x,y\}\in E_1$$

を仮定する．この設定に定理 1.3 が適用できる．この章は須田氏（愛知教育大）との共同研究 [14] のアイデアと結果の紹介である．

2.1 グラフの発展系

次のようなグラフの発展系を考える．

$$G_0 \subset G_s \subset G_t \subset G_1 \quad (0 \leq s \leq t \leq 1). \tag{2.1}$$

ここで，G_t は重み $W_{x,y}(t)$ をつけたグラフである．重み $W_{x,y}(t)$ は次のように定める．$w(t)$ を単調増加かつ十分滑らかな関数とし，

$$W_{x,y}(t) = \begin{cases} 1 & (\{x,y\} \in E_0) \\ w(t) & (\{x,y\} \in E_1 \setminus E_0) \\ 0 & (\{x,y\} \notin E_1). \end{cases}$$

さらに，固定された $\varepsilon > 0$ と G_t のラプラシアン L_t に対し，

$$\sigma(t) = L_t + \varepsilon I$$

と定める．このとき，$\sigma(t)$ は可逆であり，

$$\sigma(s) \leq \sigma(t) \quad (s \leq t) \quad \text{かつ} \quad \sigma'(t) \geq 0$$

が成り立つ．

次に，グラフの発展系 (2.1) に対応するヒルベルト空間の族を構成する．V 上の関数 u, v に対し（実数値でも複素数値でもよい），

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_t} = \langle \sigma(t) u, v \rangle_{\ell^2(V)}$$

とおき，$\mathcal{H}_t$ を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_t}$ を備えた V 上の関数からなるヒルベルト空間とする．このとき，ヒルベルト空間の縮小的な埋め込みの列

$$\mathcal{H}_t \hookrightarrow \mathcal{H}_s \hookrightarrow \mathcal{H}_r \quad (0 \leq r \leq s \leq t \leq 1)$$

を得る．特に，$T_{rs} : \mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_r$ を埋め込み写像とすれば，

$$T_{rt} = T_{rs} T_{st} \quad (0 \leq r \leq s \leq t \leq 1)$$

かつ

$$\|T_{rs} u\|_{\mathcal{H}_r} = \|u\|_{\mathcal{H}_r} \leq \|u\|_{\mathcal{H}_s} \quad (0 \leq r \leq s \leq 1).$$

が成り立つ．よって，

$$\{T_{rs} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_r) : 0 \leq r \leq s \leq 1\}$$

は 1.4 節で定めた意味で発展族である．実際の作用としては，T_{rs} は $\ell^2(V)$ 上の恒等作用素であるので，その無限小生成作用素 Ω は

$$\Omega(r)T_{rs} = \frac{\partial T_{rs}}{\partial r} = 0$$

と計算される．つまり，この設定では $\Omega(r) = 0$ である．次に，

$$\sigma(s) = \tau(s)^* \tau(s)$$

と分解する．$\sigma(s)$ の QR-分解 (Dym [3] の Lemma 9.22 又は Horn-Johnson [7] の 2.6.1 を参照) を考えれば，$\tau(s)$ は微分可能と仮定してよい．$\widetilde{T}_{rs}$ を次のように定義しよう．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_s & \xrightarrow{T_{rs}} & \mathcal{H}_r \\ {\scriptstyle \tau(s)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau(r)} \\ \ell^2(V) & \xrightarrow[\widetilde{T}_{rs}]{} & \ell^2(V), \end{array} \tag{2.2}$$

$$\widetilde{T}_{rs} = \tau(r) T_{rs} \tau(s)^{-1}.$$

(2.2) はもちろん (1.5) と同一の図式である．従って，$\{\widetilde{T}_{rs}\}_{0\le r\le s\le 1}$ も

$$\widetilde{T}_{rs}\widetilde{T}_{st} = \widetilde{T}_{rt} \quad (0 \le r \le s \le t \le 1).$$

を満たす．最後に，

$$\Lambda(s) = \sigma'(s), \quad \Gamma(s) = \sigma(s)^{-1}\Lambda(s)^{1/2}$$

とおいて，定理 1.3 を適用できる準備が整った．すなわち，

$$\mathcal{H}^{\sigma(1)}_{\sigma(0)}(T_{01}) = \int_0^1 \mathcal{M}(T_{0s}\sigma(s)^{-1}(\sigma'(s))^{1/2})\, ds$$

を得る．参考までに，$\mathcal{H}_j$ $(j = 0, 1)$ は再生核ヒルベルト空間であり，その再生核を $k_x^{(j)}$, $(A_{xy}^{(j)})_{x,y\in V}$ を G_j の隣接行列とすると，

$$\mathcal{H}^{\sigma(1)}_{\sigma(0)}(T_{01}) = \mathrm{span}\{k_x^{(1)} - k_y^{(1)} : A_{x,y}^{(1)} < A_{x,y}^{(2)}\}.$$

と表すことができる（詳細は [13] を参照）．

2.2 ラプラシアンの不等式

G_j のラプラシアン L_j に対し，

$$K_j = (P + L_j)^{-1}$$

と定める．ここで，P は $(1, \ldots, 1) \in \ell^2(V)$ により生成される 1 次元ベクトル空間の上への直交射影である（今の設定では $P = \operatorname{proj}\ker L_0 = \operatorname{proj}\ker L_1$ であることに注意）．以下，行列の順序は $A \geq 0 \Leftrightarrow \langle Ac, c\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0\ (\forall c \in \mathbb{R}^n)$ で与える．さて，

$$G_0 \subset G_1 \ \Rightarrow\ L_0 \leq L_1 \ \Leftrightarrow\ P + L_0 \leq P + L_1 \ \Leftrightarrow\ K_0 \geq K_1$$

は自明であるが，ここでは最後の不等式 $K_0 \geq K_1$ に注目したい．繰り返しになるが，この不等式はラプラシアンの不等式 $L_0 \leq L_1$ と同値であり，ラプラシアンの固有値はグラフ理論の中でも重要な研究対象である（スペクトラルグラフ理論）．さて，グラフの時間発展

$$W_{x,y}(t) = \begin{cases} 1 & (\{x,y\} \in E_0) \\ t & (\{x,y\} \in E_1 \setminus E_0) \quad (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\{x,y\} \notin E_1) \end{cases}$$

に定理 1.3 のノルム不等式を応用することで，不等式 $K_0 \geq K_1$ を改良することができる．

定理 2.1 ([14]). 一般のグラフ G に対し，$\mathrm{Aut}(G)$ を G の自己同型群とし，$G_0 \subset G_1$ に対し，

$$\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(G_0) \cap \mathrm{Aut}(G_1)$$

と定める．このとき，任意の $c \in \ell^2(V)$ に対し，

$$0 \leq \langle L_0(K_0 - K_1)\widetilde{c}, (K_0 - K_1)\widetilde{c}\rangle_{\ell^2(V)} \leq \langle (K_0 - K_1)c, c\rangle_{\ell^2(V)}$$

が成り立つ．ここで，

$$\widetilde{c} = \frac{1}{|\mathcal{G}|}\sum_{g \in \mathcal{G}} c \circ g$$

と定めた．すなわち，$\widetilde{c}$ は c の $\mathcal{G}$ による平均ベクトルである．

ここでグラフの自己同型群が出てくる理由は，群上の積分（今の場合は有限和）に関する quasi-orthogonal integral も考えているからである．すなわち，二重に quasi-orthogonal integral を用いている．ところで，Erdős-Rényi の有名な結果に

よれば，頂点数が大きい場合，$\mathrm{Aut}(G)$ はほとんどの場合に単位元だけからなる自明な群である．従って，$\mathcal{G}$ は尚更である．実際，$\widetilde{c}$ を単に c にした不等式も正しい．[13] では，定理 2.1 に対し，定理 1.3 に依らない簡単な証明も与えたが，それは ad hoc なものであろう．定理 2.1 のグラフ理論的な意味（又は，純グラフ理論的にこの不等式を見抜けるか？）に関しては研究を継続中である．

3　応用２（ハーディ空間上の作用素論）

この章では，複素関数論における Loewner 理論を媒介にし，ハーディ空間上の作用素論に定理 1.2 を応用することを試みる．ディリクレ空間（正則ソボレフ空間）と Loewner 理論は相性が良いことはよく知られている．実際，一般化ディリクレ空間が de Branges による Bieberbach 予想解決の舞台であった（例えば，Rosenblum-Rovnyak [9] や Vasyunin-Nikol'skiĭ [16] を参照）．ここでは，Loewner 理論とハーディ空間上の作用素論の相性を探りたい．

3.1　Loewner 理論超入門

$\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位開円板とする．この節では，ハーディ空間上の作用素論に必要と思われる範囲で Loewner 理論を簡潔に（時にはおおらかに）紹介する．詳細は Pommerenke [8] や Rosenblum-Rovnyak [9] を参照していただきたい．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbb{D}) &= \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f \text{ is injective, } f(0)=0 \text{ and } f'(0)>0\},\\
\mathcal{S}(\mathbb{D}) &= \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_\infty \le 1\},\\
\mathcal{B}(\mathbb{D}) &= \mathcal{R}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{D}).
\end{aligned}
$$

と定める．$\mathcal{R}(\mathbb{D})$ は $f(0)=0$ と正規化した場合の Riemann の写像定理に現れる正則関数の全体である．$\mathcal{S}(\mathbb{D})$ は Pick の補間問題に関連する数学では Schur クラスと呼ばれ，関数解析学では特別な意味をもつクラスである．

$$f_r(\mathbb{D}) \subset f_s(\mathbb{D}) \quad (0 \le r \le s)$$

を満たす $\{f_r\}_r \subset \mathcal{R}(\mathbb{D})$ を考えよう．$f_r(\mathbb{D})$ は単連結領域であり，$G_r = f_r(\mathbb{D})$ を満たす $f_r \in \mathcal{R}(\mathbb{D})$ は Riemann の写像定理により一意に定まる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{D} \arrow[dl, "f_r"'] \arrow[dr, "f_s"] & \\
G_r & \subset & G_s
\end{tikzcd}
\qquad (0 \le r \le s)
$$

ここで,

$$B_{rs} = f_s^{-1} \circ f_r \quad (0 \leq r \leq s)$$

と定めると，$B_{rs} \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ である．さらに，$\{B_{rs}\}_{r \leq s}$ は次の等式を満たす.

$$B_{rr} = z, \quad B_{rt} = B_{st} \circ B_{rs} \quad (0 \leq r \leq s \leq t). \tag{3.1}$$

実際,

$$B_{st} \circ B_{rs} = f_t^{-1} \circ f_s \circ f_s^{-1} \circ f_r = B_{rt}.$$

一般に，(3.1) を満たす $\{B_{rs}\}_{0 \leq r \leq s} \subset \mathcal{B}(\mathbb{D})$ を半群と呼ぶことにしよう．以下，話を簡単にするため，B_{rs} の r と s に関する微分可能性は気にせず話を進める.

定義 3.1. $\varphi(r, \cdot)$ を $\mathbb{D}$ 上の正則関数とし，半群 $\{B_{rs}\}_{0 \leq r \leq s} \subset \mathcal{B}(\mathbb{D})$ を未知関数とする微分方程式

$$\frac{\partial B_{rs}}{\partial r} = \varphi(r, z) z \frac{dB_{rs}}{dz} \tag{3.2}$$

を考える．特に，$\{\varphi(r, \cdot)\}_r$ が Herglotz 関数の族の場合，すなわち，$\varphi(r, \cdot)$ が

$$\mathrm{Re}\, \varphi(r, z) > 0 \quad (r \geq 0,\ z \in \mathbb{D})$$

を満たす $\mathbb{D}$ 上の正則関数であるとき，(3.2) は Loewner の微分方程式と呼ばれる．Loewner 方程式の解を Loewner 半群と呼ぶ.

注意 3.1 (Loewner 方程式の力学的意味). 以下の議論は Pommerenke [8] と 堀田 [6] を参考にした．zB'_{rs} は曲線 $C : w = B_{rs}(z(t))$ $(|z(t)| = c < 1)$ の法ベクトルである．よって，(3.2) は $B_{rs}(z)$ の r に関する速度ベクトルが C の法ベクトル $zB'_{rs}(z)$ を $|\varphi(r, z)|$ 倍し $\arg \varphi(r, z) (\in [0, 2\pi))$ 回転したものであることを意味する．また，$B_{rs} \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ と偏角の原理により，C の法ベクトル $zB'_{rs}(z)$ は C が囲む領域に対し外向きであることがわかる．以上のことと，$\mathrm{Re}\, \varphi(r, z) > 0$ は $|\arg \varphi(r, z)| < \pi/2$ と同値であることから，$B_{rs}(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq c\})$ は r に関し増大する.

(3.1) と (3.2) から

$$\frac{\partial B_{rs}}{\partial s} = -B_{rs}(z) \varphi(s, B_{rs}(z)) \tag{3.3}$$

が導かれる．実際，$B_{rs}(z) = B(r, s, z)$ と表せば,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} B(r, t, z) &= \frac{\partial}{\partial s} B(s, t, B_{rs}(z)) \\
&= \frac{\partial B(s, t, B_{rs}(z))}{\partial s} + \frac{\partial B(s, t, w)}{\partial w} (B_{rs}(z)) \frac{\partial B_{rs}(z)}{\partial s} \\
&= \varphi(s, B_{rs}(z)) B_{rs}(z) B'_{st}(B_{rs}(z)) + B'_{st}(B_{rs}(z)) \frac{\partial B_{rs}}{\partial s}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\varphi(s, B_{rs}(z))B_{rs}(z) + \frac{\partial B_{rs}}{\partial s} = 0$$

を得る．今回は方程式 (3.3) を応用する．

例 3.1. $f_r(z) = rz$ のとき，

$$B_{rs}(z) = f_s^{-1} \circ f_r(z) = \frac{r}{s} z.$$

これは Loewner 半群の最も簡単な例である．実際，

$$\frac{\partial B_{rs}}{\partial s} = -\frac{r}{s^2} z = -B_{rs}(z)\frac{1}{r}.$$

であるので，$\varphi(z, r) = 1/r$ とおけばよい．

さて，Loewner 半群は豊富に存在する．実際，Loewner-Kufarev-Pommerenke の定理として，任意の Herglotz 関数の族 $\{\varphi(r, \cdot)\}_{r>0}$ に対し [1]，Loewner 方程式 (3.2) の解 $\{B_{rs}\}_{0 \le r \le s} \subset \mathcal{B}(\mathbb{D})$ は一意に存在することが知られている．

次も Loewner 半群の定義からほとんど自明である．証明には Loewner family という言葉が出てくるが，詳細は Pommerenke [8] 又は Rosenblum-Rovnyak [9] を参照のこと．

命題 3.1. 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ に対し，B を含む Loewner 半群が存在する．

Proof. 任意の $f \in \mathcal{R}(\mathbb{D})$ に対し，$g = f \circ B$ とおくと $g \in \mathcal{R}$ である．Loewner family の定義により，f と g を含む Loewner family $\{f_r\}_r$ が存在する．このとき，$B_{rs} = f_s^{-1} \circ f_r$ $(r < s)$ は Loewner 半群である．$f_a = g$ かつ $f_b = f$ $(a < b)$ とおけば，$B_{ab} = f_b^{-1} \circ f_a = f^{-1} \circ g = B$ を得る． □

3.2 Loewner 半群とテープリッツ作用素

de Branges は Loewner 半群に沿った合成作用素の族を一般化ディリクレ空間の上で考え，そこに連続 de Branges-Rovnyak 分解を用いて，Bieberbach 予想を解いた．後に簡略化された証明が発表されたが，そのオリジナルの議論は難解である．ここでは，より初等的なハーディ空間 H^2 上で Loewner 半群に沿ったテープリッツ作用素の挙動を観察する．

Loewner 半群 $\{B_{rs}\}_{0 \le r \le s}$ に対し，

$$B_{rt}(\lambda) = B_{st} \circ B_{rs}(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D})$$

[1] ここも厳密さよりも簡潔さを優先して述べた．

が成り立つ．ここにシュワルツの補題を適用すると，

$$|B_{rt}(\lambda)| = |B_{st} \circ B_{rs}(\lambda)| \leq |B_{rs}(\lambda)| \quad (\lambda \in \mathbb{D})$$

を得る．よって，$B_r = B_{0r}$ とおき，$Q_{rs} = B_s/B_r$ と定めれば，$Q_{rs} \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ である．$\lambda = 0$ は Q_{rs} の特異点であるが，除去可能であることに注意する．このとき，次の等式が成り立つ．

$$Q_{st}Q_{rs} = \frac{B_t}{B_s} \cdot \frac{B_s}{B_r} = \frac{B_t}{B_r} = Q_{rt}.$$

従って，H^2 を $\mathbb{D}$ 上のハーディ空間とし，$T_{rs} = T^*_{Q_{rs}}$ （Q_{rs} から定まるテープリッツ作用素の共役作用素）と定めれば，$\{T_{rs}\}_{0 \leq r \leq s}$ は 1.3 節で定めた意味で発展族である．さらに，k_λ を $\lambda \in \mathbb{D}$ に対応する Szegö 核とし，

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum c_\lambda k_\lambda (\text{有限和}) : \lambda \in \mathbb{D} \right\}$$

と定め，$\mathcal{D}$ 上の線型作用素 $T^*_{\varphi(s,B_s)}$ を次のように定める．

$$T^*_{\varphi(s,B_s)} k_\lambda = \overline{\varphi(s, B_s(\lambda))} k_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

命題 3.2. T_{rs} は s について偏微分可能で

$$\frac{\partial T_{rs}}{\partial s} = -T_{rs} T^*_{\varphi(s,B_s)}$$

が成り立つ．すなわち，$\Omega(s) = T^*_{\varphi(s,B_s)}$ である．

Proof. Loewner 方程式 (3.3) により，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{rs}}{\partial s} k_\lambda &= \frac{\partial}{\partial s} T^*_{Q_{rs}} k_\lambda \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \overline{Q_{rs}(\lambda)} k_\lambda \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \overline{(B_s/B_r)(\lambda)} k_\lambda \\
&= \frac{1}{\overline{B_r(\lambda)}} \overline{(-B_s(\lambda)\varphi(s, B_s(\lambda))} k_\lambda \\
&= -\overline{Q_{rs}(\lambda)\varphi(s, B_s(\lambda))} k_\lambda \\
&= -T_{rs} T^*_{\varphi(s,B_s)} k_\lambda.
\end{aligned}$$

□

T_{ts} は縮小的であるから，任意の $f \in \mathcal{D}$ に対し，

$$\|T_{rs}^* f\|_{H^2}^2 = \|T_{ts}^* T_{rt}^* f\|_{H^2}^2 \leq \|T_{rt}^* f\|_{H^2}^2 \quad (r \leq t \leq s)$$

が成り立つ．すなわち，$\langle T_{rs}T_{rs}^* f, f\rangle_{H^2}$ は変数 s に関し減少する．よって，1.3 節の議論をそのまま適用すれば，

$$\operatorname{Re}\Omega(s) \geq O$$

が成り立つことがわかる．これは，行列

$$\left(\frac{\overline{\varphi(s, B_s(\lambda_i))} + \varphi(s, B_s(\lambda_j))}{1 - \overline{\lambda_i}\lambda_j}\right)$$

の半正定値性と同値である（Ghosechowdhury [4] に別な観点からの証明がある）.

以上の準備のもとで，$\{T_{rs}\}_{r\leq s}$ に定理 1.2 を適用できる．すなわち，$\mathcal{H}(T_{rt})$ $(r \leq t)$ は次の積分表示をもつ．

$$\mathcal{H}(T_{rt}) = \int_r^t \mathcal{M}(T_{rs}\Delta(s))\ ds.$$

特に，任意の $f \in L^2(\mathcal{H})$ に対し，

$$\|\int_r^t T_{rs}\Delta(s)f(s)\ ds\|_{\mathcal{H}(T_{rt})}^2 \leq \int_r^t \|\Delta(s)f(s)\|_{\mathcal{M}(\Delta(s))}^2\ ds \leq \int_r^t \|f(s)\|_{\mathcal{H}}^2\ ds$$

が成り立つ．ただし，ここで $\mathcal{H}$ は有限個の k_λ で生成される $\mathcal{D}$ 内の有限次元部分空間とする．Sarason [10] の記号を使えば，$\mathcal{H}(T_{rt})$ は $\mathcal{H}(\overline{Q_{rt}})$ の有限次元部分空間であるから，ここでの考察は $\mathcal{H}(\overline{Q_{rt}})$ の局所的な展開定理を与えたことになる．Ghosechowdhury [4, 5] はより高度な設定で類似の問題を扱っている．

References

[1] T. Ando, *de Branges spaces and analytic operator functions*, lecture notes, Sapporo, Japan, 1990.

[2] L. de Branges, *Löwner expansions*, J. Math. Anal. Appl. 100 (1984), no. 1, pp. 323–337.

[3] H. Dym, *Linear algebra in action*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 78. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[4] S. Ghosechowdhury, *An expansion theorem for state space of unitary linear system whose transfer function is a Riemann mapping function*, Reproducing kernels and their applications (Newark, DE, 1997), pp. 81–95, Int. Soc. Anal. Appl. Comput., 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[5] S. Ghosechowdhury, *Löwner expansions*, Math. Nachr. 210 (2000), pp. 111–126.

[6] I. Hotta, `http://cajpn.org/Loewner2014/Loewner_survey.pdf`

[7] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*. Corrected reprint of the 1985 original. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[8] C. Pommerenke, *Univalent functions*, With a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen. Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[9] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Verlag, 1994.

[10] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 10. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

[11] M. Seto, *Introduction to the theory of de Branges-Rovnyak spaces* (in Japanese), RIMS Kôkyûroku, No. 1980 (2016), pp. 81–94.

[12] M. Seto, *Introduction to the theory of quasi-orthogonal integrals*, RIMS Kôkyûroku, No. 2035 (2017), pp. 60–73.

[13] M. Seto and S. Suda, *Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs* III, Oper. Matrices 11 (2017), no. 3, pp. 759–768.

[14] M. Seto and S. Suda, *Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs* IV, submitted.

[15] V. I. Vasyunin and N. K. Nikol'skiĭ, *Quasiorthogonal decompositions with respect to complementary metrics, and estimates of univalent functions*, Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, pp. 691–764.

[16] V. I. Vasyunin and N. K. Nikol'skiĭ, *Operator-valued measures and coefficients of univalent functions*, St. Petersburg Math. J. 3 (1992), no. 6, pp. 1199–1270.

Michio Seto
National Defense Academy
Yokosuka 239-8686 JAPAN
E-mail: mseto@nda.ac.jp