

Arithmetic topology in Ihara theory: Milnor invariants, Heisenberg coverings and triple power residue symbols

Dedicated to Professor Yasutaka Ihara

Masanori Morishita (森下昌紀)
Kyushu University (九州大学)

本稿の内容は [AMM], [HiMo], [KMT] をまとめたものです.

§1. 素イデアルの Milnor 不変量

1.1. 話を約半世紀前の Milnor の学位論文 ([Mi1], [Mi2]) から始めます. Milnor は, S^3 内の r 成分絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_r$ に対し, イソトピー不変量 (**Milnor 不変量**と呼ばれる)

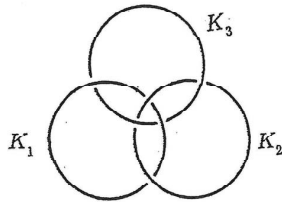
$$\mu(i_1 \cdots i_n) \quad (1 \leq i_1, \dots, i_n \leq r)$$

を導入しました. 例えば, $\mu(12)$ は K_1 と K_2 の **Gauss** のまつわり数 ([Ga]) に一致します:

$$\mu(12) = \text{lk}(K_1, K_2).$$

これより, 一般の Milnor 不変量は高次まつわり数とも呼ばれます. $\mu(i) := 0$, $\mu(ij)$ は整数ですが, $I = (i_1 \cdots i_n)$ の長さ $|I| = n$ が 3 以上の場合は, I の任意の真部分列の置換 J に対し $\mu(J) = 0$ なるときに, $\mu(I)$ は整数値として定義されます. 一般には, $\mu(I)$ は \mathbb{Z} のある商環に住んでいます.

例. $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ を下の絵のような **Borromean 環** とします:



絵からわかるように, すべてのまつわり数 $\mu(ij) = 0$ ($1 \leq i \neq j \leq 3$). 従って, まつわり数だけでは L は自明な絡み目と区別できませんが, トリプル Milnor 不変量を見ると, 例えば

$$\mu(123) = \pm 1$$

が分かり (± は結び目の向きによる), L は自明でないことが示されます. Borromean 環の非自明性は, Milnor が彼の不変量を導入した動機とされています.

Milnor 不変量を定義するためにカギとなる事柄は, 絡み目群

$$G_L := \pi_1(S^3 \setminus L)$$

の構造, より正確には, そのべき零商 $G_L/G_L(n)$ ($G_L(n)$ は G_L の中心降下列の n 番目の項, i.e., $G_L(1) := G_L, G_L(n+1) := [G_L, G_L(n)]$) の構造定理です. Milnor ([Mi2]) は, $G_L/G_L(n)$ が K_i のメリディアン x_i たちで生成され, 関係式 $[x_i, y_i] = 1$ (y_i は K_i のロンジテュード) で与えられることを示しました. Milnor 不変量 $\mu(1 \cdots n)$ は y_n の Magnus 展開における $X_1 \cdots X_{n-1}$ の係数として定義されます.

村杉 ([Mu]) は, 被覆空間の言葉で Milnor 不変量を記述しました. 以後, 可換環 R と自然数 n に対し,

$$H_n(R) := \left\{ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & * & * & \cdots & * & \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 1 & * & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \end{array} \right) \mid n \text{ 次べき単上三角行列, } * \in R \right\}.$$

とおきます. $|I| < n$ なら $\mu(I) = 0$ と仮定します. このとき, K_1, \dots, K_{n-1} 上で分岐する S^3 の $H_n(\mathbb{Z})$ -被覆 $M_n \rightarrow S^3$ が存在し,

$$\mu(1 \cdots n) = K_n \text{ に沿うモノドロミー}$$

と解釈されます. ここで, 仮定より, モノドロミーは被覆変換群 $H_n(\mathbb{Z})$ の中心 $= \mathbb{Z}$ に入ることに注意します.

まつわり数 $\mu(12)$ は K_1 を張る曲面と K_2 の交点数としても定義されますが, この見方をコホモロジー的に一般化して, Milnor 不変量は Massey 積 (高次カップ積) としても解釈されます ([P], [T]).

1.2. 数論側に移ります. 結び目と素イデアルの類似

$$S^1 \hookrightarrow S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \quad \leftrightarrow \quad \{(p)\} = \text{Spec}(\mathbb{Z}/(p)) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$$

に基づき, 1999 年, 素イデアルたち $S = \{(p_1), \dots, (p_n)\}$, $p_i \equiv 1 \pmod{2}$, に対し, **mod 2 Milnor 不変量**

$$\mu_2(i_1 \cdots i_n) \quad (1 \leq i_1, \dots, i_n \leq r)$$

が導入されました ([Mo1]~[Mo4]). 例えば, $\mu_2(12)$ は p_1 と p_2 の平方剰余記号という数論的意味をもっています:

$$(-1)^{\mu_2(12)} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right).$$

これより、一般の mod 2 Milnor 不変量 $\mu_2(1 \cdots n)$ に対し、

$$[(p_1), \dots, (p_n)] := (-1)^{\mu_2(1 \cdots n)}$$

は高次の平方剰余記号と呼ばれるべきものになります (n 重平方剰余記号と呼ぶことにします). 絡み目の場合と同様, $\mu_2(I)$ は, I の任意の真部分列の置換 J に対し $\mu(J) = 0$ なるときに, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -値として定義されます.

(注) $[(p_1), \dots, (p_n)]$ は $[p_1, \dots, p_n]$ と書いても構いませんが, あえて $()$ をつけているのは, 結び目の類似は素イデアル (p) で, 素数 p は結び目を張る曲面の類似であることをはっきりさせるためです. 符号 $\pm p$ は曲面の向きに対応.

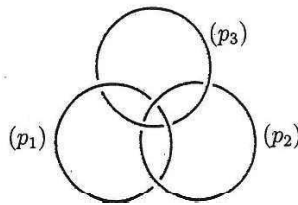
例. $S = \{(p_1), (p_2), (p_3)\}$ を $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ ($i = 1, 2, 3$) なる 3 つの素イデアルの集合とし, $1 \leq i \neq j \leq 3$ に対し, $\mu_2(ij) = 0$, すなわち, $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1$ と仮定します. このとき, トリプル平方剰余記号 $[(p_1), (p_2), (p_3)]$ が定義されますが, これは Rédei ([R]) が 1939 年に導入した記号 $\{p_1, p_2, p_3\}$ に一致することが示されます ([Mo1]~[Mo4]):

$$[(p_1), (p_2), (p_3)] = \{p_1, p_2, p_3\}.$$

これより, $[(p_1), (p_2), (p_3)] = 1$ は, (p_3) が Rédei の拡大

$$R_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{x + y\sqrt{p_1}})$$

において完全分解する, という数論的意味をもっています. ここで, 整数 x, y は $x^2 + p_1 y^2 = p_2 z^2$ のある整数解で, R_2 は p_1, p_2, ∞ の外で不分岐な \mathbb{Q} の 8 次 2 面体拡大で, p_1, p_2 の分岐指数は 2 なるものとして一意的に決まる体であることに注意します. 例えば, $(p_1, p_2, p_3) = (5, 29, 181), (13, 61, 937), \dots$ は $\mu_2(ij) = 0$ ($1 \leq i \neq j \leq 3$) かつ $\mu_2(123) = 1$ を満たす素数の 3 組です (**Borromean primes** と呼ばれます):



多重平方剰余記号, すなわち, mod 2 Milnor 不変量を定義するためにカギとなる事柄は, 分岐条件付き副-2 Galois 群

$$G_S^{\text{pro-2}} := \pi_1^{\text{pro-2}}(\text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus S)$$

の構造に関する Koch の定理です. Koch([Kc; 11.4]) は, $G_S^{\text{pro-2}}$ が (p_i) 上のモノドロミー x_i たちで生成され, 関係式 $x_i^{p_i-1}[x_i, y_i] = 1$ (y_i は (p_i) 上の Frobenius 置換) で与えられることを示しました. mod 2 Milnor 不変量 $\mu_2(1 \cdots n)$ は y_n の mod 2 Magnus

展開における $X_1 \cdots X_{n-1}$ の係数として定義されます.

多重平方剰余記号は拡大体の言葉で次のように記述されます ([Mo3]~[Mo5]). $|I| < n$ なら $\mu_2(I) = 0$ と仮定します. このとき, $(p_1), \dots, (p_{n-1})$ 上でのみ分岐する (分岐指数=2) $H_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -拡大 R_n/\mathbb{Q} が存在し,

$$[(p_1), \dots, (p_n)] := (p_n) \text{ に沿うモノドロミー } := (p_n) \text{ 上の Frobenius 置換}$$

と解釈されます. ここで, 仮定より, Frobenius 置換は Galois 群 $H_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の中心 $= \{\pm 1\}$ に入ることになります. 従って,

$$[(p_1), \dots, (p_n)] = 1 \Leftrightarrow (p_n) \text{ は } R_n \text{ で完全分解.}$$

$R_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, $R_3 = \text{Rédei 拡大}$ となります.

1.3. 数論的 Milnor 不変量に関する基本的な (未解決) 問題として次の 3 つの問が挙げられます.

問 1. $n \geq 4$ に対し, $[(p_1), \dots, (p_n)]$ の数論的な意味は何か? 拡大体 R_n を具体的に構成せよ.

問 2. $\zeta_m = e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$ を含む代数体 k の素イデアル $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$, $N\mathfrak{p}_i \equiv 1 \pmod{m}$, に対して, $\text{mod } m$ Milnor 不変量 $\mu(1 \cdots n)$ と n 重 m べき剰余記号

$$[\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n] = \zeta_m^{\mu_m(1 \cdots n)}$$

を定義せよ. その数論的意味, k 上の拡大体 $R_n(k)$ ($R_n = R_n(\mathbb{Q})$) の具体的な構成?

問 3. $1, \dots, n$ の置換 s に対し, $[\mathfrak{p}_{s(1)}, \dots, \mathfrak{p}_{s(n)}]$ たちの間の関係は?

コメント.

問 1. R_n を系統的に構成する自然な方法があるのでは? とよく聞かれるのですが, 私は (今の所) 分かりません. §2 で伊原理論におけるトリプル記号の解釈を与えますが, その動機の一つは, \mathbb{P}^1 の分岐被覆の系列を使って R_n を系統的に構成できないか? という期待がありました.

問 2. トポロジー側では, より一般の 3 次元多様体内の絡み目に対しても Milnor 不変量は定義されます. 従って, より一般の代数体に対しても $\text{mod } m$ Milnor 不変量が定義されることが期待されますが, 一般の代数体上の分岐条件付き副- l Galois 群に関する Koch の定理が複雑になるため, 不変量を抽出することが困難になります. この複雑さの原因は代数体の単数にあり, 対応する 3 次元多様体内の非圧縮曲面が 3 次元多様体の基本群を複雑にする事情と似ています.

問 3. これは平方剰余の相互法則の拡張にあたるので, 重要な問題ですが, $n = 2$

の場合 (べき剰余の相互法則), $n = 3$ かつ $m = 2$ の場合 (Rédei の相互法則) を除いて未解決です. 関連して, 多重 (反復) Gauss 和を定義することも興味ある問題です. (注: $R_n(k)/k$ はべき零拡大なので, Langlands の非可換相互法則は出来ていません (Arthur-Clozel). それから上記の意味の多重べき剰余記号の相互法則が導かれるわけではありません. 別方向の話です.)

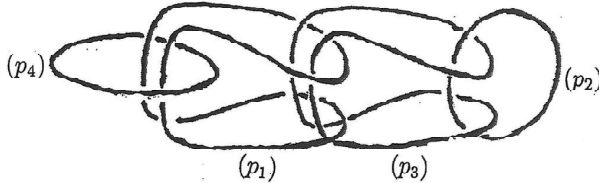
1.4. 上に挙げた問題について最近の (部分的) 結果の概略を紹介します.

問 1 の $n = 4$ の場合, 天野郁弥 ([Am1]) は R_4 を具体的に構成し, 4 重平方剰余記号の数論的意味付けを与えました. 例えば, $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (5, 101, 8081, 449)$ のとき,

$$[(p_i), (p_j)] = 1, [(p_i), (p_j), (p_k)] = 1 \ (i, j, k \text{ は相異なる}), [(p_1), (p_2), (p_3), (p_4)] = -1$$

$$R_4 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{101}, \sqrt{8081}, \sqrt{241 + 100\sqrt{5}}, \sqrt{1009 + 100\sqrt{101}}, \sqrt{25 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{101}})$$

となり, 4 つの素イデアルは下の絵 (Milnor 絡み目と呼ばれる) のように絡まっているように見えます.



問 2 の $m = 3, k = \mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合, 天野, 水澤靖と筆者 ([Am2], [AMM]) は mod 3 トリプル Milnor 不変量を定義するとともに $R_3(k)$ を具体的に構成し, トリプル立方剰余記号の数論的意味付けを与えました. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ を $\mathfrak{p}_i = (\pi_i)$, $\pi_i \equiv 1 \pmod{3\sqrt{-3}}$ なる 3 つの素イデアルとし, $\left(\frac{\pi_i}{\pi_j}\right)_3 = 1 \ (i \neq j)$ と仮定します. このとき,

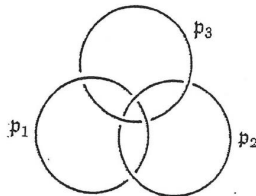
$$[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3] = \zeta_3^{\mu_3(123)},$$

$$R_3(k) = \mathbb{Q}(\zeta_3)(\sqrt[3]{\pi_1}, \sqrt[3]{\pi_2}, \sqrt[3]{(x + y\zeta_3\sqrt[3]{\pi_1})^2(x + y\zeta_3^2\sqrt[3]{\pi_1})})$$

という形になります. ここで, $x, y \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$ は $x^3 + \pi_1 y^3 = \pi_2 z^3$ のある整数解です. 例えば, $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = ((-17), (-53), (-71))$ (resp. $((-17), (-53), (-89))$) のとき,

$$[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = 1 \ (i \neq j), [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3] = \zeta_3^2 \text{ (resp. } \zeta_3)$$

となり, 3 つの素イデアルは Borromean 環のように絡まっているように見えます.



§2. Galois 元の Milnor 不変量

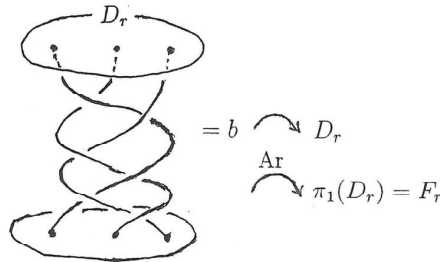
2.1. まず, 純組み紐絡み目の Milnor 不変量を Artin 表現を用いて解釈します ([MK], [Kd] は数論側の読者にはよい文献). $r \geq 2$ に対し, P_r を r 本純組み紐群とし, F_r を文字 x_1, \dots, x_r で生成される自由群とします. Artin ([Ar1], [Ar2]) は, P_r の F_r への作用

$$\text{Ar} : P_r \longrightarrow \text{Aut}(F_r)$$

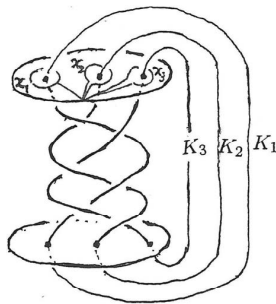
で次の性質をもつものを見出しました: 任意の i ($1 \leq i \leq r$) と任意の $b \in P_r$ に対し, 唯一つの $y_i(b) \in F_r$ が存在し,

$$\begin{cases} \text{Ar}(b)(x_i) = y_i(b)x_iy_i(b)^{-1}, \\ y_i(b) \equiv \prod_{j \neq i} x_j^{e_j} \pmod{[F_r, F_r]}. \end{cases}$$

幾何的には, Artin 表現は, $b \in P_r$ の r 点付き円板 D_r (=2次元円板引く r 点) へのモノドロミー作用が導く基本群 $\pi_1(D_r) = F_r$ 上の表現として与えられます.



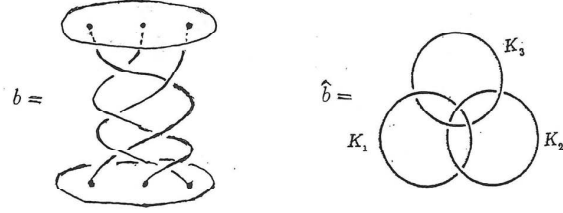
$\hat{b} = K_1 \cup \dots \cup K_r$ を b を閉じて得られる r 成分絡み目とすると, 下の絵



から分かるように, x_i は K_i のメリディアン, $y_i(b)$ は K_i のロンジチュードを表します. 従って, 絡み目 \hat{b} の Milnor 不変量 $\mu(\hat{b}; 1 \dots n) = \mu(i \dots n)$ は y_n の Magnus 展開における $X_1 \dots X_{n-1}$ の係数として与えられます:

$$y_{i_n}(b) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq r} \mu(\hat{b}; i_1 \dots i_n) X_{i_1} \dots X_{i_{n-1}}.$$

例. b を下の絵のような純組み紐とすると, \hat{b} は Borromean 環になります (組み紐は上から下に向きづけます):



このとき,

$$\begin{cases} y_1(b) = [x_1x_2x_1^{-1}, x_3] = 1 + X_2X_3 - X_3X_2 + (3 \text{ 次以上の項}), \\ y_2(b) = [x_3^{-1}, x_1^{-1}] = 1 + X_3X_1 - X_1X_3 + (3 \text{ 次以上の項}), \\ y_3(b) = [x_3^{-1}x_1^{-1}x_3, x_1x_2^{-1}x_1^{-1}] = 1 + X_1X_2 - X_2X_1 + (3 \text{ 次以上の項}). \end{cases}$$

となり, 従って,

$$\begin{cases} \mu(ij) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq 3), \\ \mu(123) = \mu(312) = \mu(231) = 1, \\ \mu(213) = \mu(132) = \mu(321) = -1 \end{cases}$$

などが得られます.

最後に, Johnson 準同型の組み紐版である Milnor 写像について述べます ([MS], [No]). $\{F_r(n)\}_{n \geq 1}$ を F_r の中心降下列とし, $\text{gr}_n(F_r) := F_r(n)/F_r(n+1)$ とおきます. $f \in F_r(n)$ に対し, $[f]_n := f \text{ mod } F_r(n+1)$ と書きます. Ar に自然な準同型 $\text{Aut}(F_r) \rightarrow \text{Aut}(F_r/F_r(n))$ を合成したものを $\text{Ar}(n) : P_r \rightarrow \text{Aut}(F_r/F_r(n))$ とし, $P_r(n) := \text{Ker}(\text{Ar}(n))$ とおきます. $b \in P_r(n) \Leftrightarrow \mu(\hat{b}; I) = 0 \quad (|I| < n)$ に注意し, Milnor 写像 $\mu^{(n)} : P_r(n) \rightarrow \text{gr}_1(F_r) \otimes \text{gr}_n(F_r)$ を

$$\mu^{(n)}(b) := \sum_{i=1}^r [x_i]_1 \otimes [y_i(b)]_n$$

と定義します. $\text{Ar}(b)(x_1 \cdots x_r) = x_1 \cdots x_r$ より, $\mu^{(n)}$ の像は $D_n(F_r) := \text{Ker}([\ , \] : \text{gr}_1(F_r) \otimes \text{gr}_n(F_r) \rightarrow \text{gr}_{n+1}(F_r))$ に入ることがわかります.

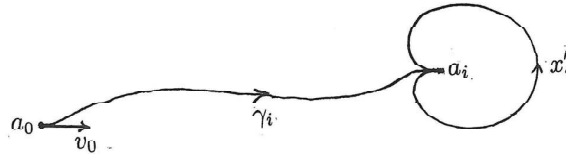
2.2. 数論側に移ります. l を素数, k を代数体とし, $\text{Gal}_k := \text{Gal}(\bar{k}/k)$ を k の絶対 Galois 群, \hat{F}_r を F_r の副- l 完備化とします, 伊原 ([I1],[I2]) は, Artin 表現の数論的類似として, Gal_k の \hat{F}_r への作用

$$\text{Ih} : \text{Gal}_k \longrightarrow \text{Aut}(\hat{F}_r)$$

で次の性質をもつものを考案しました: 任意の $i \ (1 \leq i \leq r)$ と任意の $g \in \text{Gal}_k$ に対し, 唯一つの $y_i(g) \in \hat{F}_r$ が存在し,

$$\begin{cases} \text{Ih}(g)(x_i) = y_i(g)x_i^{X_i(g)}y_i(g)^{-1}, \\ y_i(g) \equiv \prod_{j \neq i} x_j^{e_j} \text{ mod } [\hat{F}_r, \hat{F}_r]. \end{cases}$$

ここで, $\chi_l(g) : \text{Gal}_k \rightarrow \mathbb{Z}_l^\times$ は l -円分指標です. 組み紐の場合との類似により, $y_i(g)$ を g の i -番副- l ロンジチュードと呼ぶことにします. 伊原表現も, Artin 表現と同様, 幾何的な解釈をもちます. すなわち, $A := \{a_0 = \infty, a_1, \dots, a_r\}$ を \mathbb{P} の r 個の k 有理点とすると, Gal_k の $\hat{F}_r = \hat{\pi}_1^{(l)}(\mathbb{P}(\mathbb{C}) \setminus A; v_0)$ ($:= \pi_1(\mathbb{P}(\mathbb{C}) \setminus A; v_0)$ の副- l 完備化) への数論的モノドロミー表現として与えられます. ここで, v_0 は a_0 における tangential 基点で, \hat{F}_r の生成元 x_i は下の絵のような閉道として記述されます:



$$x_i = \gamma_i^{-1} x_i' \gamma_i.$$

$y_i(g)$ についても, [I1], [W1] において, 次式のような幾何的な記述が示されています:

$$y_i(g) = g(\gamma_i)^{-1} \gamma_i.$$

以下, k は $\zeta_l = e^{2\pi\sqrt{-1}/l}$ を含むと仮定します. Galois 元 $g \in \text{Gal}_k$ の **mod** l Milnor 数 $\mu_l(g; i_1 \dots i_n)$ は, $y_{i_n}(g)$ の **mod** l Magnus 展開における $X_{i_1} \dots X_{i_{n-1}}$ の係数として定義されます.

例. $1 \leq i \leq r$ に対し, $\mu_l(g; i)$ は **mod** l Kummer 指標で与えられます. すなわち, $a \in k^\times$ に付随する **mod** l Kummer 指標 $\kappa_a : \text{Gal}_k \rightarrow (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$ を $g(\sqrt[l]{a}) = \zeta_l^{\kappa_a(g)} \sqrt[l]{a}$ により定義するとき,

$$\mu_l(g; i) = - \sum_{1 \leq j \neq i \leq r} \kappa_{a_i - a_j}(g).$$

定理. $g, h \in \text{Gal}_k$, $I = (i_1 \dots i_n)$ ($n \geq 2$) とし, $|J| < n$ なる任意の J に対し, $\mu_l(g; J) = 0$ と仮定する. このとき,

$$\mu_l(hgh^{-1}; I) = \mu_l(g; I)$$

が成り立つ.

定理の主張は, 組み紐でいうと Markov 変換に対する Milnor 数の不変性を意味します. これより, 定理の仮定のもとで, $\mu_l(g; I)$ を g の **mod** l Milnor 不変量と呼ぶことにします.

Ω_A を $\text{Ker}(\text{Ih})$ に対応する体とします. これは A の外で不分岐な \mathbb{P}_C^1 のすべての分岐 l -被覆たちの最小定義体です. 容易に分かるように, $\sigma \in \text{Gal}(\Omega_A/k)$ に対し,

$$\mu_l(\sigma; I) := \mu_l(g; I)$$

が $g|_{\Omega_A} = \sigma$ なる $g \in \text{Gal}_k$ の取り方によらず定義されます. k の素イデアルの有限集合 S_A を

$$S_A := \{\mathfrak{p} \in \text{Spm}(\mathcal{O}_k) \mid v_{\mathfrak{p}}(l) > 0 \text{ or } v_{\mathfrak{p}}(a_i) < 0 (\exists i) \text{ or } v_{\mathfrak{p}}(a_i - a_j) > 0 (\exists i \neq j)\}$$

と定義すると, [AI], [W4] により, Ω_A/k は S_A の外で不分岐であることが示されています. これより, $\mathfrak{p} \in \text{Spm}(\mathcal{O}_K) \setminus S_A$ かつ $N\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{l}$ なる素イデアル \mathfrak{p} に対し, mod l Milnor 不変量 $\mu_l(\mathfrak{p}; I)$ が定義されます. すなわち, \mathfrak{p} 上にある Ω_A の一つの素点 \mathfrak{P} の Frobenius 置換 $\sigma_{\mathfrak{P}}$ に対し, $\mu_l(\sigma_{\mathfrak{P}}; J) = 0$ ($|J| < |I|$) と仮定するとき,

$$\mu_l(\mathfrak{p}; I) := \mu_l(\sigma_{\mathfrak{P}}; I)$$

が \mathfrak{P} の取り方によらず定義されます.

例. $1 \leq i \neq j \leq r$ に対し, $k((a_i - a_j)^{1/l})$ は Ω_A に含まれ,

$$\zeta^{\mu_l(\mathfrak{p}; ij)} = \left(\frac{a_j - a_i}{\mathfrak{p}} \right)_l.$$

ここで, 右辺は \mathfrak{p} における l べき剰余記号を表します.

§4 で, 伊原理論における素イデアル \mathfrak{p} の Milnor 不変量 $\mu_l(\mathfrak{p}; I)$ と §1 における \mathfrak{p} の Milnor 不変量 $\mu_l(I')$ との関係を $|I| = 3, |I'| = 2$ の場合に示します.

最後に, Galois 群に対する mod l Milnor 写像を導入します. $\{\hat{F}_r(n)\}_{n \geq 1}$ を \hat{F}_r の mod l Zassenhaus 降下列とし, $\text{gr}_n(\hat{F}_r) := \hat{F}_r(n)/\hat{F}_r(n+1)$ とおきます. $f \in \hat{F}_r(n)$ に対し, $[f]_n := f \pmod{\hat{F}_r(n+1)}$ と書きます. Ih に自然な準同型 $\text{Aut}(\hat{F}_r) \rightarrow \text{Aut}(\hat{F}_r/\hat{F}_r(n))$ を合成したものを $\text{Ih}(n) : \text{Gal}_k \rightarrow \text{Aut}(\hat{F}_r/\hat{F}_r(n))$ とし, $\text{Gal}_k(n) := \text{Ker}(\text{Ih}(n))$ とおきます. $g \in \text{Gal}_k(n) \Leftrightarrow \mu_l(\hat{g}; I) = 0$ ($|I| < n$) に注意し, mod l Milnor 写像 $\mu_l^{(n)} : \text{Gal}_k(n) \rightarrow \text{gr}_1(\hat{F}_r) \otimes \text{gr}_n(\hat{F}_r)$ を

$$\mu_l^{(n)}(g) := \sum_{i=1}^r [x_i]_1 \otimes [y_i(g)]_n$$

と定義します. $\text{Ih}(g)(x_1 \cdots x_r) = (x_1 \cdots x_r)^{X(g)}$ より, $\mu_l^{(n)}$ の像は $D_n(\hat{F}_r) := \text{Ker}([\ ,] : \text{gr}_1(\hat{F}_r) \otimes \text{gr}_n(\hat{F}_r) \rightarrow \text{gr}_{n+1}(\hat{F}_r))$ に入ることがわかります.

§3. $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の dilogarithmic Heisenberg 被覆

3.1. l を素数, k を $\zeta_l := e^{2\pi\sqrt{-1}/l}$ を含む代数体とします. 以下, 次の記号を用います.

$$k(t) = k(\mathbb{P}^1).$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^{(l)} &:= k(t)(t^{1/l}, (1-t)^{1/l}). \\ \mathfrak{C}^{(l)} &:= \mathfrak{K}^{1/l} \text{ の非特異射影モデル } X^l + Y^l = Z^l. \\ \mathfrak{R}^{(l)} &:= \mathfrak{K}^{(l)}(\varepsilon_i(t)^{1/l}), \varepsilon_i(t) := \prod_{i=1}^{l-1} (1 - \zeta^i t^{1/l})^i. \\ \mathfrak{D}^{(l)} &:= \mathfrak{R}^{(l)} \text{ の非特異射影モデル.} \end{aligned}$$

例. $l = 2$. $\mathfrak{R}^{(2)} = k(\sqrt{t}, \sqrt{1-t}, \sqrt{1+\sqrt{t}})$ の非特異射影モデルとして 2 次曲線

$$\mathfrak{D}^{(2)} : U^2 + V^2 = 2W^2 (\simeq \mathbb{P}^1)$$

がとれ, 関数体の拡大に対応する分岐被覆は次のように与えられます:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}^{(2)} & \longrightarrow & \mathfrak{C}^{(2)} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (U : V : W) & \mapsto & (W^2 - U^2 : UV : W^2) & \mapsto & (X^2 : Z^2) \\ & & = (X : Y : Z) & & \end{array}$$

$l = 3$. $\mathfrak{R}^{(3)} = k(\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{1-t}, \sqrt[3]{(1 - \zeta_3 \sqrt[3]{t})(1 - \zeta_3^2 \sqrt[3]{t})^2})$ の非特異射影モデルとして 楕円曲線

$$\mathfrak{D}^{(3)} : \zeta_3^2 U^3 + V^3 = -\zeta_3 W^3$$

がとれ, 関数体の拡大に対応する分岐被覆は次のように与えられます:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}^{(3)} & \longrightarrow & \mathfrak{C}^{(3)} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (U : V : W) & \mapsto & (U^3 - W^3 : (1 - \zeta_3)UVW : U^3 - \zeta_3 W^3) & \mapsto & (X^3 : Z^3) \\ & & = (X : Y : Z) & & \end{array}$$

$\mathfrak{D}^{(l)}$ は \mathbb{P}^1 の $0, 1, \infty$ 上分岐する $H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ -分岐被覆であることが示されます. 次の 3.2 節で説明する理由により, $\mathfrak{D}^{(l)} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を **dilogarithmic mod l Heisenberg 分岐被覆**, $\mathfrak{X} := \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上への制限 $\mathfrak{D}^{(l)}|_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ を **dilogarithmic $H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ -被覆**, $\mathfrak{R}^{(l)}$ を $k(t)$ の **dilogarithmic mod l Heisenberg 拡大** と呼ぶことにします. (注) $\mathfrak{R}^{(l)}/k(t)$ は Anderson-Ihara ([AI]) の elementary extension, Wojtkowiak ([W5]) の polylogarithmic extension の特別な場合とみられます.

命題. $a \in k \setminus \{0, 1\}$, $A := \{\infty, 0, 1, a\}$ に対し, $\mathfrak{R}^{(l)}(a) \subset \Omega_A$.

3.2. なぜ, $\mathfrak{D}^{(l)}|_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ を dilogarithmic $H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ -被覆と呼ぶのか説明します. それは, dilogarithmic function $Li_2(z)$ との類似から来ています.

まず, dilogarithmic function 側について思い出します. 複素多様体 $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ 上の可逆正則関数 f_1, f_2 に対し, (f_1, f_2) を Deligne, Bloch, Beilinson により導入された $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ 上の接続付き正則直線束とします (単に, **Deligne 直線束** と呼ぶことにします) ([Be], [Bl], [D]). Deligne 直線束は Deligne コホモロジー $H^*(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}(n)_D)$ におけるカップ積として与えられます (ここで, $\mathbb{Z}(n)_D : \mathbb{Z}(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}(\mathbb{C})} \xrightarrow{d} \Omega_{\mathfrak{X}(\mathbb{C})}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_{\mathfrak{X}(\mathbb{C})}^{n-1}$ は

$\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ 上の Deligne 複体). 同型 $H^0(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}(\mathbb{C})}^\times) \simeq H^1(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)_D)$ により, f_i は $c(f_i) \in H^1(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)_D)$ とみれるので, カップ積 $c(f_1) \cup c(f_2)$ は $H^2(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)_D)$ の元を与えますが, 同型 ([Br])

$$H^2(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)_D) \simeq \{\mathfrak{X}(\mathbb{C}) \text{ 上の正則直線束}\} / \simeq$$

による $c(f_1) \cup c(f_2)$ の像が Deligne 直線束 (f_1, f_2) を与えます. 具体的には, 開被覆 $\mathfrak{X}(\mathbb{C}) = \cup_a U_a$ をとり, $\log_a f_i$ を $\log f_i$ の U_a 上の枝とすると, $U_a \cap U_b$ 上の張り合わせの関数は $f_1^{\log_a f_2 - \log_b f_2}$, U_a 上の接続 1-形式は $\log_a f_2 d \log f_1$ で与えられます. また, 対応 $\{f_1, f_2\} \mapsto (f_1, f_2)$ は Bloch-Beilinson regulator $K_2(\mathfrak{X}(\mathbb{C})) \rightarrow H^2(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)_D)$ ([Be], [Bl]) を与えます. $(f_1, f_2) = 1$ は Deligne 直線束が自明化をもつことを意味しますが, 特に, $A = \{0, 1, \infty\}$, $(f_1, f_2) = (1-t, t)$ の場合, dilogarithmic function $Li_2(t) = -\int_0^t \log(1-z) d \log z = \sum_{n=1}^\infty t^n/n^2$ が具体的な自明化を与えます.

他方, Heisenberg 被覆側についてみてみます. スキーム \mathfrak{X} 上の可逆正則関数 f_1, f_2 に対し, $(f_1, f_2)_l$ を次のように定義される $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ を band にもつ \mathfrak{X} 上の gerbe とします ([Gi]). すなわち, この gerbe はエタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^*(\mathfrak{X}, \mu_l^{\otimes n}) = H_{\text{ét}}^*(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ におけるカップ積として次のように与えられます (ここで, μ_l は \mathfrak{X} 上の 1 の l 乗根のエタール層). Kummer 写像 $H_{\text{ét}}^0(\mathfrak{X}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ による f_i の像を $c(f_i)$ とします. カップ積 $c(f_1) \cup c(f_2)$ は $H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ の元を与えますが, 同型 ([Gi])

$$H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \simeq \{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \text{ を band にもつ } \mathfrak{X} \text{ 上の gerbe}\} / \simeq$$

による $c(f_1) \cup c(f_2)$ の像が gerbe $(f_1, f_2)_l$ を与えます. 具体的には, $(f_1, f_2)_l$ は, \mathfrak{X} 上の群スキームの中心拡大 $1 \rightarrow \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrow H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\oplus 2} \rightarrow 1$ と $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ -被覆 $\mathcal{C}^{(l)}(f_1, f_2) := \text{Spec}(k[t, (t-a_i)^{-1} (1 \leq i \leq r), f_1^{1/l}, f_2^{1/l}]) \rightarrow \mathfrak{X}$ に付随する gerbe, すなわち, $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ -被覆 $\mathcal{C}^{(l)}(f_1, f_2) \rightarrow \mathfrak{X}$ を $H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ -被覆へ持ち上げることに對する障害と見られます ([Br1; 5.2], [Br2; 5]). また, 対応 $\{f_1, f_2\} \mapsto (f_1, f_2)_l$ は Soulé regulator $K_2(\mathfrak{X}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrow H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ ([S]) を与えます. $(f_1, f_2) = 1$ は gerbe が自明化, すなわち, $\mathcal{C}^{(l)}(f_1, f_2) \rightarrow \mathfrak{X}$ の持ち上げである $H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ -被覆が存在することを意味します. $\mathcal{C}^{(l)}, \mathcal{D}^{(l)}$ において $c = 1, A = \{\infty, 0, 1\}, f_1 = 1-t, f_2 = t$ とします. このとき, $\mathcal{C}^{(l)}(1-t, t) = \mathcal{C}^{(l)}$ で, $H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ -被覆 $\mathcal{D}^{(l)}|_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ は $(1-t, t)_l$ の自明化を与えます.

以上まとめると, 次の類似が分かります. 我々の $H_3(\mathbb{F}_l)$ -被覆 $\mathcal{D}^{(l)}$ は dilogarithmic function の圏論的な高次類似とみなされます.

Deligne 直線束 $(f_1, f_2) \in H_D^2(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$	$H_3(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ に付随する gerbe $(f_1, f_2)_l \in H_{\text{ét}}^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$
Bloch-Beilinson regulator $K_2(\mathfrak{X}(\mathbb{C})) \rightarrow H_D^2(\mathfrak{X}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$	Soulé regulator $K_2(\mathfrak{X}) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$
$(1-t, t)$ の自明化: Dilogarithmic function $Li_2(t) = -\int_0^t \log(1-t) \frac{dt}{t}$	$(1-t, t)_l$ の自明化: Mod l Heisenberg 被覆 $\mathcal{D}^{(l)} _{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$

§4. 伊原理論におけるトリプルベキ剰余記号

この節では, §1 における素イデアル \mathfrak{p} の Milnor 不変量 $\mu_l(I')$ と §2 の伊原理論における素イデアル \mathfrak{p} の Milnor 不変量 $\mu_l(\mathfrak{p}; I)$ との関係を $|I| = 3, |I'| = 2$ の場合に示します.

$l = 2, k = \mathbb{Q}$ とし, 3つの素数 p_1, p_2, p_3 は

$$p_i \equiv 1 \pmod{4}, \quad \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq 3)$$

を満たすとし, R_2 を Rédei [R] の $H_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -拡大とします (cf. §1 の例):

$$R_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{x + y\sqrt{p_2}}), \quad x^2 + p_1y^2 = p_2z^2.$$

§2 の記号で, $A := \{a_0 = \infty, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = p_1(y/x)^2\}$ を考え, $p_3 \neq S_A$ とします. このとき, 次の定理が得られます.

定理 4.1. (1) $R_2 = \mathfrak{R}^{(2)}(p_1(x/y)^2)$.

(2) $[p_1, p_2, p_3]$ は $\sqrt{\varepsilon_2(t)}$ の副-2 ロンジチュード $y_3(\sigma_{p_3})$ に沿うモノドロミーに等しい. 特に,

$$\mu_2(123) = \mu_2(\sigma_{p_3}; 12).$$

$l = 3, k = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ とし, 3つの素イデアル $\mathfrak{p}_1 = (\pi_1), \mathfrak{p}_2 = (\pi_2), \mathfrak{p}_3 = (\pi_3)$ は

$$\pi_i \equiv 1 \pmod{3\sqrt{-3}}, \quad \left(\frac{\pi_i}{\pi_j}\right)_3 = 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq 3)$$

を満たすとし, R_3 を [AMM] の $H_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ -拡大とします (cf. §1 の例):

$$R_3 = \mathbb{Q}(\zeta_3)(\sqrt{\pi_1}, \sqrt{\pi_2}, \sqrt[3]{\theta}), \quad x^2 + p_1y^2 = p_2z^2.$$

§2 の記号で, $A := \{a_0 = \infty, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -\pi_1(y/x)^2\}$ を考え, $p_3 \neq S_A$ とします. このとき, 次の定理が得られます.

定理 4.2. (1) $R_3 = \mathfrak{R}^{(3)}(-\pi_1(x/y)^3)$.

(2) $[p_1, p_2, p_3]_3^{-1}$ は $\sqrt[3]{\varepsilon_3(t)}$ の副-3 ロンジチュード $y_3(\sigma_{p_3})$ に沿うモノドロミーに等しい. 特に,

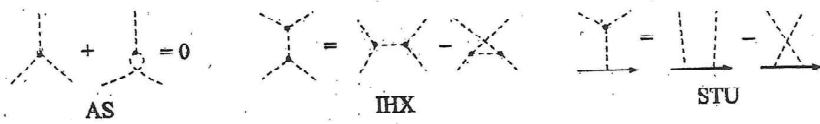
$$\mu_3(123) = -\mu_3(\sigma_{p_3}; 12).$$

定理 4.1, 4.2 の証明は, 代数関数 $\sqrt[l]{\varepsilon_l(t)}$ の副- l ロンジチュードに沿うモノドロミーを具体的に計算することによります. この種の議論は, 私は, 中村博昭, Wojtkowiak の仕事 ([NW], [W]~[W5]) から学びました.

§5. 問題 – Galois 元の Kontsevich 不変量

絡み目の Milnor 不変量は Vassiliev 不変量 (有限型不変量) であることが知られています ([Ba]). 一方, すべての Vassiliev 不変量を導く普遍的な不変量として Kontsevich 不変量があります ([Kn]). 従って, 原理的には Milnor 不変量は Kontsevich 不変量から導かれるわけですが, それを明示的に実行したのが Habegger と Masbaum の仕事 ([HaMa]) です.

各頂点から 1 本または 3 本の辺が出ている有限グラフを 1-3 価グラフといいます. 1 価頂点がすべてある 1 次元有向コンパクト多様体 M 上にあるとき, 1-3 価グラフを M 上の **Jacobi 図** と呼びます. 頂点の数の半分を Jacobi 図の次数といいます. 以下, $M = \sqcup_{i=1}^r [0, 1]$ の場合を考えます. \mathcal{A}_r を Jacobi 図で生成され, 下の関係式 AS, IHX, STU を条件とする \mathbb{Q} -ベクトル空間とします.



r 本純組み紐 b の Kontsevich 不変量 $Z(b)$ は \mathcal{A}_r に住んでいます.

次に, 樹木 (連結かつ単連結な Jacobi 図) で生成される \mathcal{A}_r の部分空間を \mathcal{C}_r^t , その次数 n の部分を $\mathcal{C}_r^{t,(n)}$ とします. このとき, $\mathcal{C}_r^{t,(n)}$ は \mathbb{Q} -ベクトル空間として $D_n(F_r)$ と同一視されます ([MS], [No]). したがって, 2.1 で定義された Milnor 写像は $\mathcal{C}_r^{t,(n)}$ -値とみなされます. $Z(b)$ を \mathcal{C}_r^t へ射影した像を $Z^t(b)$ とします. このとき, Habegger と Masbaum は次を示しました.

定理 ([HaMa]). $b \in P_r(n)$ に対し, $Z^t(b) = 1 + \mu^{(n)}(b) + (n+1)$ 次以上の項.

問題は, 上記定理の数論的類似です. すなわち, \mathbb{Q} を $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ で置き換えることにより, $\text{mod } l$ の Jacobi 図の空間 $\mathcal{A}_{r,l}$ と樹木の部分空間 $\mathcal{C}_{r,l}^t$ が定義され, 2.2 で定義された $\text{mod } l$ Milnor 写像は $\mathcal{C}_{r,l}^t$ -値とみなされます.

問題. Galois 元 $g \in \text{Gal}_k$ に対して, $\text{mod } l$ “Kontsevich 不変量” $Z_l(g)$ を定義し,

$$Z_l^t(g) = 1 + \mu_l^{(n)}(g) + (n+1) \text{ 次以上の項} \quad (g \in \text{Gal}_k(n))$$

を示せ.

§6. 思い出と謝辞

1994 年と思いますが, 私が金沢大学にいた頃, 古田孝臣先生が集中講義に伊原先生を招待されました. 講義の最初に伊原先生が黒板に「整数論」と書かれたのを覚えております. ゆったりとした感じの講義でしたが, どこかの教科書に書かれて

いることではなく、他の仕事の紹介でも勉強会でもない、先生の腹の中にある数学を話されているような印象を受けました。集中講義に出席したことが縁となり、翌年長期研究員として数理研によんで頂きました。その頃だと思いますが、玉川安騎男氏と望月新一氏が遠アーベル幾何の Grothendieck 予想を解決されました。また、私の滞在中に Deninger 氏 (Münster 大) も数理研に滞在され、セミナーで話されたりしました。間近でこういった世界一等の数学者たちと接することができ、とても貴重な経験をさせていただきました。金沢に戻ると、古田先生から呼ばれ、「伊原先生から手紙をいただいた。森下君が数理研で夜遅くまで勉強していた、と書いてあったよ」と知らされました。伊原先生の親切に励まされ、私はとても嬉しかったです。私も自分なりに頑張ろう、と思いました。伊原先生、そして今回、研究集会で講演する機会を下さった主催者の先生方に感謝申し上げます。

References

- [Am1] F. Amano, On a certain nilpotent extension over \mathbb{Q} of degree 64 and the 4-th multiple residue symbol, *Tohoku Math. J.* **66** No.4 (2014), 501–522.
- [Am2] F. Amano, Arithmetic of certain nilpotent extensions and multiple residue symbols, Doctoral Thesis, Kyushu University, 2014.
- [AMM] F. Amano, Y. Mizusawa, M. Morishita, On mod 3 triple Milnor invariants and triple cubic residue symbols in the Eisenstein number field, *Research in Number Theory* **4**, no. 1, Art. 7, 29 pp, 2018.
- [Ar1] E. Artin, Theorie der Zöpfe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **4** (1925), no. 1, 47–72.
- [Ar2] E. Artin, Theory of braids, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 101–126.
- [AI] G. Anderson, Y. Ihara, Pro- l branched coverings of \mathbb{P}^1 and higher circular l -units, *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, 271–293.
- [Ba] D. Bar-Nathan, Vassiliev homotopy string link invariants, *J. Knot Theory Ram.*, **4** (1995), 13–32.
- [Be] A. Beilinson, Higher regulators and values of L -functions, *J. Soviet Math.*, **30** (1985), 2036–2070.
- [Bl] S. Bloch, The dilogarithm and extensions of Lie algebras, Algebraic K -theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980), pp. 1–23, *Lecture Notes in Math.*, **854**, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [Br1] J.-L. Brylinski, Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization, *Progress in Mathematics*, **107**. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
- [Br2] J.-L. Brylinski, Holomorphic gerbes and the Beilinson regulator, K -theory (Strasbourg, 1992). *Astérisque No.* **226** (1994), 8, 145–174.
- [D] P. Deligne, Le symbole modéré, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No.* **73** (1991), 147–181.
- [Ga] C. F. Gauss, Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen, *Werke V*, 1833.
- [Gi] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **179**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
- [HaMa] Habegger, Masbaum, The Kontsevich integral and Milnor’s invariants, *Topology*, **39** (2000), no.6, 1253–1289.

- [HiMo] H. Hirano, M. Morishita, Arithmetic topology in Ihara theory II: Milnor invariants, dilogarithmic Heisenberg coverings and triple power residue symbols, 2018, preprint.
- [I1] Y. Ihara, Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, *Ann. of Math. (2)* **123** (1986), no. 1, 43–106.
- [I2] Y. Ihara, Arithmetic analogues of braid groups and Galois representations, *Braids* (Santa Cruz, CA, 1986), 245–257, *Contemp. Math.*, **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [I3] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II* (Kyoto, 1990), 99–120, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
- [Kc] H. Koch, *Galoissche Theorie der p -erweiterungen*, Springer, 1970.
- [Kd] H. Kodani, Arithmetic topology on braid and absolute Galois groups, Ph.D Thesis, Kyushu University, 2017. (九大コレクション 学位論文 所収)
- [KMT] H. Kodani, M. Morishita, Y. Terashima, Arithmetic topology in Ihara theory, *Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **53** (2017), 629–688.
- [Kn] M. Kontsevich, Vassiliev’s knot invariants, “I. M. Gel’fand Seminar”, 137–150, *Adv. Soviet Math.*, **16**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [MS] J.-B. Meilhan, S. Suzuki, The universal sl_2 invariant and Milnor invariants, *Internat. J. Math.* **27** (2016), no. 11, 1650090, 37 pp.
- [Mi1] J. Milnor, Link groups, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 177–195.
- [Mi2] J. Milnor, Isotopy of links, in *Algebraic Geometry and Topology, A symposium in honor of S. Lefschetz* (edited by R.H. Fox, D.C. Spencer and A.W. Tucker), 280–306 Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
- [Mo1] M. Morishita, Milnor’s link invariants attached to certain Galois groups over \mathbf{Q} , *Proc. Japan Acad. Ser. A* **76** (2000), 18–21.
- [Mo2] 森下昌紀, Knots and primes, 3-manifolds and number fields, *代数的整数論とその周辺* (2000), *京大数理研講究録* **1200** (2001).
- [Mo3] M. Morishita, On certain analogies between knots and primes, *J. Reine Angew. Math.* **550** (2002), 141–167.
- [Mo4] M. Morishita, Milnor invariants and Massey products for prime numbers, *Compos. Math.*, **140** (2004), 69–83.
- [Mo5] M. Morishita, *Knots and Primes – An Introduction to Arithmetic Topology*, Universitext, Springer, 2011.
- [Mu] K. Murasugi, Nilpotent coverings of links and Milnor’s invariant, In: *Low-Dimensional Topology*, London Math. Soc., Lecture Note Series **95** 106–142. Cambridge Univ. Press. 1985.
- [MK] K. Murasugi, B.I. Kurpita, *A study of braids, Mathematics and its Applications*, **484**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [NW] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, On explicit formulae for l -adic polylogarithms, In: *Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra* (Berkeley, CA, 1999), 285–294, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [No] T. Nosaka, Milnor-Orr invariants from the Kontsevich invariant, arXiv:1712.02060
- [P] R. Porter, Milnor’s $\bar{\mu}$ -invariants and Massey products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275** (1980), 39–71.

- [R] L. Rédei, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper I, *J. Reine Angew. Math.*, **180** (1939), 1-43.
- [S] C. Soulé, K -théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, *Invent. Math.* **55** (1979), no. 3, 251–295.
- [T] V. Turaev, The Milnor invariants and Massey products, (Russian) *Studies in topology*, II. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **66**, (1976), 189–203, 209–210.
- [W1] Z. Wojtkowiak, On l -adic iterated integrals. I. Analog of Zagier conjecture, *Nagoya Math. J.* **176** (2004), 113–158.
- [W2] Z. Wojtkowiak, On l -adic iterated integrals. II. Functional equations and l -adic polylogarithms, *Nagoya Math. J.* **177** (2005), 117–153.
- [W3] Z. Wojtkowiak, On l -adic iterated integrals. III. Galois actions on fundamental groups, *Nagoya Math. J.* **178** (2005), 1–36.
- [W4] Z. Wojtkowiak, On l -adic iterated integrals. IV. Ramification and generators of Galois actions on fundamental groups and torsors of paths, *Math. J. Okayama Univ.* **51** (2009), 47–69.
- [W5] Z. Wojtkowiak, A remark on nilpotent polylogarithmic extensions of the field of rational functions of one variable over \mathbb{C} , *Tokyo J. Math.* **30** (2007), no. 2, 373–382.

Faculty of Mathematics, Kyushu University
744, Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, JAPAN
e-mail: morisita@math.kyushu-u.ac.jp