数理解析研究所講究録 第2123巻 2019年 118-125

Existence of ground state of the model of a massless charged particle interacting with a quantized radiation field *

佐々木格
信州大学理学部数学科

1　導入—質量 0 の基底状態の構成—

この解説では，RIMS において上記タイトルで講演した研究内容のうち，証明の核心となった手法について記述する。

質量 0 の場と粒子の相互作用系の基底状態の存在を証明するためによく使われる手法は次のとおりである。

(1) 質量 $m > 0$ を持つ場と相互作用系のモデルを定義し，その基底状態 $\Phi_m(\|\Phi_m\| = 1)$ の存在を証明する。
(2) $m \to +0$ の強極限 $\Phi_0 := \text{s-lim}_{m\to+0}\, \Phi_m$ が存在することを示す。
(3) Φ_0 が元のモデルの基底状態になることを証明する。

上のプロセスでは (1),(2) が主な数学的な障害であり，(3) はそれほど難しくない。この小解説では，(2) を示すために便利な手法を紹介する。特に，場の空間的局在を示すための手法である。ここで紹介する定理のアイディアは

- C. Gérard, *On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians*, *Ann. Henri Poincaré*, (2000).
- C. Gérard, *A remark on the paper: "On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians"*, mp_arc 06-146 (2006).

---

* 廣島文生氏（九州大学），日高健（久留米高専）との共同研究

による。基底状態の場の空間的局在を示す手法として

> M. Griesemer, E.H. Lieb and M. Loss, *Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics*, Invent Math., (2001)

で開発された photon derivative bound があるが，ここで紹介する手法はそれより優れており，いままで使われてきた photon derivative bound の議論をまったく置き換えることができる。また，場の結合関数の微分可能性を仮定する必要がなくなる。

Banach-Alaoglu の定理により Φ_m の $m \to +0$ における適当な部分列 $\{\Phi_{m_j}\}_j$ は $j \to \infty$ で弱収束するので，問題は弱収束する点列がいつ強収束するかということである。

粒子及び場の状態ヒルベルト空間それぞれ $\mathcal{H}_p$, $\mathcal{F}$ とする。全系のヒルベルト空間は

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{F} \tag{1.1}$$

と定義される。$\mathcal{F}$ は 1 粒子状態 $W := L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^s)$ 上のボソン・フォック空間であるとする。弱収束する単位ベクトル列 $\{\Phi_{m_j}\}_j$ が強収束することを示すためにはコンパクト性を用いるのが便利である。粒子の部分と場のそれぞれについて次のような評価が成り立つとしよう。

(a) $\mathcal{H}_p$ 上のコンパクト・レゾルベントを持つ作用素 A に対して

$$\sup_{m>0} \|(A \otimes \mathbf{1})\Phi_m\| < \infty \tag{1.2}$$

(b) $\mathcal{F}$ 上の個数作用素 N に対して

$$\sup_{m>0} \|(\mathbf{1} \otimes N^{1/2})\Phi_m\| < \infty \tag{1.3}$$

(c) $\omega(\mathbf{k}) \to +\infty(|\mathbf{k}| \to \infty)$ による掛け算作用素の第 2 量子化 $d\Gamma(\omega)$ に対して

$$\sup_{m>0} \|(\mathbf{1} \otimes d\Gamma(\omega)^{1/2})\Phi_m\| < \infty \tag{1.4}$$

(d) 作用素 T に対して $\Gamma(T) := \oplus_{n=0}^{\infty} T^{\otimes n}$ と書くことにする。このとき

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{m>0} \|\mathbf{1} \otimes (1 - \Gamma(\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}})))\Phi_m\| = 0 \tag{1.5}$$

が成り立つ。ここに χ_R は $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $\chi(0) = 1$, $0 \le \chi(\mathbf{x}) \le 1$ かつ $\operatorname{supp} \chi \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | |\mathbf{x}| < 2\}$ を満たす χ に対して $\chi_R(\mathbf{x}) := \chi(\mathbf{x}/R)$ と定義したものである。

(a) は $m \to +0$ の極限において Φ_m の粒子部分はコンパクトな部分空間の中だけを動くことを意味する。(b) は Φ_m の場の粒子数が発散しないことを意味する。これによってベクトル Φ_m における場の n 粒子部分を $\Phi_m^{(n)}$ と書くとき，$\Phi_m^{(n)}$ が $m \to +0$ で強収束すれば Φ_m も強収束することが従う。(c) は Φ_m のエネルギーが一様に有限であることを意味しており，(d) は Φ_m の場の成分が空間的に局在していることを意味する。(c) と (d) によって $\Phi_{m_j}^{(n)}$ は $m_j \to 0$ のときに強収束する。(d) を証明するためには

(d')

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{m>0} \|\mathbf{1} \otimes d\Gamma(1-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))^{1/2}\Phi_m\| = 0$$

を示せばよい (上述 [Gérard 2000])。

2　1 粒子空間での議論

この節では (d') を示すためアイディアを明解にするために $L^2(\mathbb{R}^d_{\mathbf{k}})$ における類似の構造を考える。$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\chi(0) = 1$, $\mathrm{supp}\,\chi \subset \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d | |\mathbf{k}| < 1\}$ を満たすものとする。運動量空間 $L^2(\mathbb{R}^d_{\mathbf{k}})$ における点列 $\{f_n\}_n$ は次の条件を満たすとしよう。

(i) $\|f_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$.
(ii) ある $g \in L^2(\mathbb{R}^d_{\mathbf{k}})$ があって，$|f_n(\mathbf{k})| \le g(\mathbf{k}), (\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N})$.
(iii) $f_n(\mathbf{k})$ は局所的に一様連続である。つまり任意の $P > 0$ に対して

$$\lim_{\mathbf{s}\to 0} \sup_n \int_{|\mathbf{k}|<P} |f_n(\mathbf{k}-\mathbf{s}) - f_n(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = 0 \tag{2.1}$$

が成り立つ。

このとき，次の補題が成り立つ。

Lemma 2.1. 上の条件 *(i)–(iii)* を仮定する。このとき f_n は空間的に局在する。すなわち，

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \|(1-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))f_n\| = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ。

Proof. χ のフーリエ変換を $\hat{\chi}$ とすると

$$(\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}})f)(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}\hat{\chi}(\mathbf{s})f(\mathbf{k}-R^{-1}\mathbf{s}) \tag{2.3}$$

である。$\mathbf{k}$ 空間における $\mathbf{s}$ の並進を $U_{\mathbf{s}}$ と書くと，上式は

$$(\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}})f)(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}\hat{\chi}(\mathbf{s})(U_{R^{-1}\mathbf{s}}f)(\mathbf{k}) \tag{2.4}$$

となる。したがって，$(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\chi}(\mathbf{s})d\mathbf{x} = \chi(0) = 1$ 及び $\|f_n\| = 1$ に注意すると

$$\sup_n \|(\mathbf{1} - \chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))f_n\| \leq (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}|\hat{\chi}(\mathbf{s})|\sup_n \|f_n - U_{R^{-1}\mathbf{s}}f_n\| \tag{2.5}$$

$$\leq (2\pi)^{-d/2}\int_{|\mathbf{s}|<P} d\mathbf{s}|\hat{\chi}(\mathbf{s})|\sup_n \|f_n - U_{R^{-1}\mathbf{s}}f_n\|$$

$$+ 2(2\pi)^{-d/2}\int_{|\mathbf{s}|\geq P} d\mathbf{s}|\hat{\chi}(\mathbf{s})| \tag{2.6}$$

が任意の $P > 0$ に対して成り立つ。条件 (ii) より

$$\sup_n \|f_n - U_{R^{-1}\mathbf{s}}f_n\| \leq \sup_n \int_{|\mathbf{k}|<P} |f_n(\mathbf{k}) - f_n(\mathbf{k} - R^{-1}\mathbf{s})|^2 d\mathbf{k} \tag{2.7}$$

$$+ \sup_n \int_{|\mathbf{k}|\geq P} |f_n(\mathbf{k}) - f_n(\mathbf{k} - R^{-1}\mathbf{s})|^2 d\mathbf{k} \tag{2.8}$$

$$\leq \sup_n \int_{|\mathbf{k}|<P} |f_n(\mathbf{k}) - f_n(\mathbf{k} - R^{-1}\mathbf{s})|^2 d\mathbf{k} \tag{2.9}$$

$$+ \int_{|\mathbf{k}|\geq P} (2|g(\mathbf{k})|^2 + 2|g(\mathbf{k} - R^{-1}\mathbf{s})|^2) d\mathbf{k} \tag{2.10}$$

$$\leq \sup_n \int_{|\mathbf{k}|<P} |f_n(\mathbf{k}) - f_n(\mathbf{k} - R^{-1}\mathbf{s})|^2 d\mathbf{k} \tag{2.11}$$

$$+ \int_{|\mathbf{k}|\geq P - R^{-1}P} 4|g(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \tag{2.12}$$

となる。したがって，条件 (iii) より

$$\limsup_{R\to\infty}\sup_n \|f_n - U_{R^{-1}\mathbf{s}}f_n\| \leq \int_{|\mathbf{k}|\geq P} 4|g(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \tag{2.13}$$

となる。また

$$|\hat{\chi}(\mathbf{s})|\cdot\|f_n - U_{R^{-1}\mathbf{s}}f_n\| \leq 2|\hat{\chi}(\mathbf{s})| \tag{2.14}$$

であり，右辺は R に依らない可積分関数である。これと (2.6) と (2.13) と Lebesgue の優

収束定理より

$$
\begin{aligned}
0 &< \limsup_{R\to\infty} \sup_n \|(\mathbf{1}-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))f_n\| && (2.15)\\
&\le 4(2\pi)^{-d/2}\int_{|\mathbf{s}|<P} d\mathbf{s}|\hat{\chi}(\mathbf{s})| \int_{|\mathbf{k}|\ge P} |g(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} + 2(2\pi)^{-d/2}\int_{|\mathbf{s}|\ge P} d\mathbf{s}|\hat{\chi}(\mathbf{s})| && (2.16)
\end{aligned}
$$

が任意の $P>0$ に対して成り立つ。この右辺は $P\to\infty$ のとき 0 に収束するので，はさみうちの原理より

$$
\lim_{R\to\infty} \sup_n \|(\mathbf{1}-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))f_n\| = 0 \tag{2.17}
$$

が従う。 □

Remark. 空間的に局在して いない 列 f_n の典型例として次の 2 つを考える。

(a) $\check{f}_n(\mathbf{x}) = n^{-d/2}\check{f}(\mathbf{x}/n) \Longleftrightarrow f_n(\mathbf{k}) = n^{3/2}f(n\mathbf{k})$
(b) $\check{f}_n(\mathbf{x}) = \check{f}(\mathbf{x}-n\mathbf{e}) \Longleftrightarrow f_n(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k})e^{in\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}$

ここに $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ は単位ベクトル，$\mathbf{e}\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$。(a) は熱拡散のように全体に拡がる波束を表し，(b) は波動のように遠方に飛び去る波束を表す。上の補題の条件 (ii) は (a) のような拡散が無いことを意味し，(iii) は (b) のように波束が飛び去ることが無いことを意味している。

Lemma 2.1 の条件 (iii) は次の条件に置き換えることもできる。応用上はこちらのほうが便利かもしれない。

(iii') 閉集合 $D_\epsilon\subset\mathbb{R}^d$ は $|D_\epsilon\cap\{\mathbf{k}||\mathbf{k}|<P\}|\to 0(\epsilon\to 0)$ を満たすとする。ここに $|\cdot|$ は d 次元ルベーグ測度を表す。f_n は D_ϵ^{c} 上で一様連続である。つまり

$$
\lim_{\mathbf{s}\to 0}\int_{D_\epsilon^{\mathrm{c}}} |f(\mathbf{k}-\mathbf{s})-f(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \tag{2.18}
$$

が成り立つ。

Lemma 2.2. *(i),(ii)* 及び *(iii')* を仮定する。このとき，f_n は空間的に局在する。すなわち，

$$
\lim_{R\to\infty} \sup_n \|(1-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))f_n\| = 0 \tag{2.19}
$$

が成り立つ。

Proof. (2.12) と同様に

$$\sup_n \|f_n - U_{R^{-1}\mathbf{s}} f_n\| \leq 4\int_{D_\epsilon} |g(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} + \sup_n \int_{D_\epsilon^c} |f_n(\mathbf{k}) - f_n(\mathbf{k} - R^{-1}\mathbf{s})|^2 d\mathbf{k} \quad (2.20)$$

となる。D_ϵ の定義より $\int_{D_\epsilon} |g|^2 d\mathbf{k} \to 0 (\epsilon \to 0)$ となることに注意すれば，Lemma (2.1) と全く同じようにして (2.19) を示すことができる。 □

3　場の空間的局在

場の 1 粒子ヒルベルト空間は $W := L^2(\mathbb{R}^d_{\mathbf{k}}; \mathbb{C}^s) = L^2(\mathbb{R}^d \times \{1, 2, \cdots, s\})$ とする。この空間における内積は

$$\langle f, g \rangle := \int dk \overline{f(k)} g(k) \quad (3.1)$$

によって定義される。ここに，$k = (\mathbf{k}, j) \in \mathbb{R}^3 \times \{1, 2, \cdots, s\}$,

$$\int dk := \sum_{j=1}^{s} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \quad (3.2)$$

である。場の状態のヒルベルト空間は W 上のボソンフォック空間である。

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{n} W, \qquad (\otimes_{\mathrm{sym}}^{0} W := \mathbb{C}) \quad (3.3)$$

ベクトル $\Psi \in \mathcal{F}$ の n 粒子状態 $\Psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{sym}}^{n} W$ と表し，$\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ と書く。$\mathcal{F}$ に作用する消滅作用素 $a(k)$，$(k = (\mathbf{k}, s) \in \mathbb{R}^d \times \{1, \cdots, s\})$ は

$$(a(k)\Psi)^{(n)}(k_1, \cdots, k_n) = \sqrt{n+1}\, \Psi^{(n+1)}(k, k_1, \cdots, k_n), \quad (3.4)$$

と定義される。

$\mathcal{F}$ の列 $\Phi_m \subset \mathcal{F}$ に対して次の条件 (I)—(III) を定義しよう。

(I) $\|\Phi_m\| = 1$

(II) $g \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^s)$ が存在して，$\|a(k)\Phi_m\|^2 \leq |g(k)|^2$，$(k \in \mathbb{R}^d \times \{1, \cdots, s\})$

(III) 閉集合 $D_\epsilon \subset \mathbb{R}^d$ は $|D_\epsilon \cap \{\mathbf{k} | |\mathbf{k}| < P\}| \to 0 (\epsilon \to +0)$ を満たすとする。任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\mathbf{s} \to 0} \sup_{m > 0} \int_{D_\epsilon^c} \|a(k)\Phi_m - a(k - s)\Phi_m\|^2 dk = 0 \quad (3.5)$$

ただし，$k=(\mathbf{k},j)$ とするとき $k-s=(\mathbf{k}-\mathbf{s},j)$ である。ただし

$$\int_{D_\epsilon^c} dk = \sum_{j=1}^{s} \int_{D_\epsilon^c} d\mathbf{k} \tag{3.6}$$

である。

上の条件を満たす Φ_m は空間的に局在する（条件 (d') が成り立つ）事が補題で保証される。

Lemma 3.1. *(I)–(III)* を仮定する。このとき

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{m>0} \|d\Gamma(\mathbf{1}-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))^{1/2}\Phi_m\| = 0 \tag{3.7}$$

が成り立つ。

Proof. $\chi_R := \chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}})$ と略記する。 条件 (II) から

$$\int \|a(k)\Phi_m\|^2 dk \le \|g\|^2 < \infty \tag{3.8}$$

なので $\Phi_m \in \mathrm{Dom}(N^{1/2})$ である。したがって，$\Phi_m \in \mathrm{Dom}(d\Gamma(\chi_R)^{1/2})$ であり，

$$\|d\Gamma(\mathbf{1}-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))^{1/2}\Phi_m\|^2 = \|N^{1/2}\Phi_m\|^2 - \|d\Gamma(\chi_R)^{1/2}\Phi_m\|^2 \tag{3.9}$$

となる。前節で解説したように

$$\chi_R = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\chi}(\mathbf{s}) U_{R^{-1}\mathbf{s}} d\mathbf{s} \tag{3.10}$$

なので，

$$d\Gamma(\chi_R) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\chi}(\mathbf{s}) d\Gamma(U_{R^{-1}\mathbf{s}}) d\mathbf{s} \tag{3.11}$$

と形式的に書くことができる。用心深い人なら，次が成り立つことが確かめることができるだろう。

$$\begin{aligned} \|d\Gamma(\chi_R)^{1/2}\Phi_m\|^2 &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}\hat{\chi}(\mathbf{s}) \langle \Phi_m, d\Gamma(U_{R^{-1}\mathbf{s}})\Phi_m \rangle & (3.12)\\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}\hat{\chi}(\mathbf{s}) \int dk \left\langle a(k)\Phi_m, a(k-R^{-1}s)\Phi_m \right\rangle, & (3.13) \end{aligned}$$

また $(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}\hat{\chi}(\mathbf{s}) = 1$ より

$$\|N^{1/2}\Phi_m\|^2 = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}\hat{\chi}(\mathbf{s})\int dk\,\langle a(k)\Phi_m, a(k)\Phi_m\rangle \tag{3.14}$$

となることに注意すれば,

$$\|d\Gamma(\mathbf{1}-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))^{1/2}\Phi_m\|^2 \tag{3.15}$$

$$= (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}\hat{\chi}(\mathbf{s})\int dk\,\big\langle a(k)\Phi_m, (a(k)-a(k-R^{-1}s))\Phi_m\big\rangle \tag{3.16}$$

$$\leq (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}|\hat{\chi}(\mathbf{s})|\int dk\|a(k)\Phi_m\|\|(a(k)-a(k-R^{-1}s))\Phi_m\| \tag{3.17}$$

ここで $\{(\mathbf{k},j)|\mathbf{k}\in D_\epsilon, j=1,\cdots,s\}$ も D_ϵ と書くことにすると

$$\int_{D_\epsilon} dk\|a(k)\Phi_m\|\|(a(k)-a(k-R^{-1}s))\Phi_m\| \tag{3.18}$$

$$\leq \Big(\int_{D_\epsilon} dk\|a(k)\Phi_m\|^2\Big)^{1/2}\Big(2\int_{D_\epsilon} dk(\|a(k)\Phi_m\|^2+\|a(k-R^{-1}s)\Phi_m\|^2)\Big)^{1/2} \tag{3.19}$$

$$\leq 2\Big(\int_{D_\epsilon} dk|g(\mathbf{k})|^2\Big)^{1/2}\Big(\int dk|g(\mathbf{k})|^2\Big)^{1/2} \tag{3.20}$$

$$= o(\epsilon) \tag{3.21}$$

である。ここに $o(\epsilon)$ は m に依らず $\epsilon\to 0$ のとき 0 に収束する量である。したがって,

$$\int dk\|a(k)\Phi_m\|\|(a(k)-a(k-R^{-1}s))\Phi_m\| \tag{3.22}$$

$$\leq \|g\|\Big(\int_{D_\epsilon^c} dk\|(a(k)-a(k-R^{-1}s))\Phi_m\|^2\Big)^{1/2} + o(\epsilon) \tag{3.23}$$

条件 (III) および Lebesgue の優収束定理から

$$\limsup_{R\to\infty}\|d\Gamma(\mathbf{1}-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))^{1/2}\Phi_m\|^2 \tag{3.24}$$

$$\leq \limsup_{R\to\infty}(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{s}|\hat{\chi}(\mathbf{s})|\|g\|\Big(\int_{D_\epsilon^c} dk\|(a(k)-a(k-R^{-1}s))\Phi_m\|^2\Big)^{1/2} + o(\epsilon)$$

$$= o(\epsilon) \tag{3.25}$$

が任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つ。よって

$$\lim_{R\to\infty}\|d\Gamma(\mathbf{1}-\chi_R(i\nabla_{\mathbf{k}}))^{1/2}\Phi_m\|^2 = 0 \tag{3.26}$$

となる。 □