数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 28-34

優加法性を仮定しない不完備情報協力ゲームのShapley値

Basque Country Univ. (Spain) M. Josune Albizuri
大東文化大学・経営学部　桝屋　聡 (Satoshi Masuya)
Faculty of Business Administration, Daito Bunka University
Basque Country Univ. (Spain) Jose M. Zarzuelo

1　はじめに

協力ゲーム理論は，協力して事業などを実施した場合の各プレイヤーの費用分担額や利益配分額，投票における影響力などの合理的な評価を行う際に有用となる．協力ゲームは，プレイヤー全体の集合とその部分集合に対して実数値を与える関数によって表現される．この関数は特性関数，プレイヤーの部分集合は提携と呼ばれ，関数値は提携値と呼ばれる．プレイヤー全員の集合は全体提携と呼ばれる．プレイヤーの数を n とすると，協力ゲームの解は，n 次元実数ベクトルか，あるいは，その集合として与えられる．前者は値 (value) や一点解と呼ばれる．各 n 次元実数ベクトルは，各プレイヤーが分担する費用や受取る利得，各プレイヤーの影響力を示している．協力ゲームの代表的な解として，コア，Shapley 値 [5]，仁 [4] などが知られている．コアは，通常，n 次元実数ベクトルの集合になるが，Shapley 値や仁は常に一つの n 次元実数ベクトルである．

von Neumann と Morgenstern [6] により与えられた通常の協力ゲーム理論では，すべての提携の提携値がわかっていると仮定してきた．しかし，現実にはいくつかの提携に対する提携値がわかっていないことが少なくない．このように不完備な特性関数をもつ協力ゲームに関する研究に，[7, 3] がある．これらの研究では，提携値が不明な提携に対する提携値を用いないで，Shapley 値を定義し，その公理化を行っている．しかし，これらの研究によって定義された Shapley 値は，通常の完備な特性関数をもつゲームで考えてみると，不明な提携値はゼロと見なして Shapley 値を定義していることと等しくなっている．これにより，これらの研究で用いられているゲームは，優加法性などの重要な性質を満たさない．

そこで，近年，桝屋と乾口 [9]，桝屋 [10] によって，一部の提携値のみがわかっている不完備な優加法的な特性関数をもつ協力ゲームとその解について検討され始めた．

文献 [9] では，優加法性を仮定した下での上限ゲームや下限ゲームが一般的に定義されているものの，主要な部分である解概念の考察に対しては，個人提携と全体提携の提携値のみが分かっている場合，つまり最小限の情報がわかっている場合の考察に留まっている．そこで，文献 [10] では，提携値が不明な提携の全体集合が一般の場合の，不完備情報協力ゲームとその Shapley 値についての考察を行っている．しかし，桝屋・乾口 [9] や桝屋 [10] では，不完備ゲームに対して優加法性を仮定しているが，不完備ゲームに対する優加法性は，必ずしも必要な仮定ではない．

そこで，本研究では優加法性を仮定しない，一般の不完備情報協力ゲームの Shapley 値の考察を行う．なお，提携値が不明な提携の全体集合は一般の場合を考える．

まず，与えられた不完備ゲームに対して，Harsanyi [1] のアプローチを用いた Shapley 値の提案を行う．そして，提案した Shapley 値の公理系からの導出を行う．

簡単のため，以下では，いくつかの提携値がわかっていない協力ゲームを “不完備ゲーム” と呼び，すべての提携値がわかっている協力ゲーム，すなわち，通常の協力ゲームを “完備ゲーム” と呼ぶことにする．

2 協力ゲームの理論と Shapley 値

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ をプレイヤーの集合とし，v を $v(\emptyset)=0$ を満たす 2^N から $\mathbf{R}$ への関数とする．このとき，協力ゲームは対 (N,v) で与えられる．プレイヤーの集合 $S\subseteq N$ は提携と呼ばれ，関数値 $v(S)\in\mathbf{R}$ は提携 S が形成されたときに，S が得る利得を表す．$v(S)$ は S の提携値と呼ばれる．

$G(N)$ を協力ゲーム (N,v) の全体とする．簡便のため，プレイヤーの集合は固定されているので，協力ゲーム (N,v) を単に v と表すことにする．協力ゲームに対して利得ベクトルを与える関数を $\pi: G(N)\to\mathbf{R}^n$ とする．π の第 i 成分を π_i と表すことにする．

Shapley 値は，ナルプレイヤーのゼロ評価，対称性，効率性，加法性なる四公理により特徴付けられる．プレイヤー i を含む任意の提携 $S\subseteq N$ に対して，$v(S)-v(S\setminus i)=0$ となるとき，プレイヤー i をナルプレイヤーという．ナルプレイヤーのゼロ評価の公理とは，i がナルプレイヤーであれば，$\pi_i(v)=0$ が成り立つことをいう．対称性公理とは，$v(S\setminus i)=v(S\setminus j)$，$\forall S\subseteq N$ such that $\{i,j\}\subseteq S$ のとき，$\pi_i(v)=\pi_j(v)$ が成り立つことをいう．効率性公理とは，$\sum_{i\in N}\pi_i(v)=v(N)$ が成り立つことをいう．二つの協力ゲーム $v,w\in G(N)$ の和ゲーム $v+w\in G(N)$ を $(v+w)(S)=v(S)+w(S)$, $\forall S\subseteq N$ と定義すると，加法性公理は，$\pi(v+w)=\pi(v)+\pi(w)\ \ \forall v,w\in G(N)$ を満たすことをいう．Shapley 値はこれら四つの公理を満たす唯一つの $\pi: G(N)\to\mathbf{R}^n$ であることが知られており [5]，これを ϕ で表すと，次のように表現される．

$$\phi_i(v)=\sum_{\substack{S\ni i\\ S\subseteq N}}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S)-v(S\setminus i)),\ \forall i\in N \tag{1}$$

ただし，ϕ_i は ϕ の第 i 成分を表し，$|S|$ は提携 S に帰属するプレイヤー数を表す．

式 (1) は Shapley 値の最もよく知られた定義式であるが，ここでは Harsanyi dividend を用いた Shapley 値の別表現を紹介する．任意の提携 $T\subseteq N$ に対して，$v(T)$ の Harsanyi dividend $d(v,T)$ は以下のように定義される：

$$d(v,T)=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}v(S),\ \ \forall T\subseteq N. \tag{2}$$

Harsanyi dividend d はゲーム v のメビウス変換とも呼ばれる．これは，ゲーム v において提携 T が形成されることによって生じる相互作用となっている．つまり，提携 T が形成されることによって生じる，利得の増加度を表している．

v と d の間に次の関係が成り立つことが知られている．

$$v(T)=\sum_{S\subseteq T}d(v,S),\ \ \forall T\subseteq N. \tag{3}$$

Harsanyi dividend d を用いて，Shapley 値は以下のように定義されることが知られている．

$$\phi_i(v)=\sum_{T\subseteq N, T\ni i}\frac{d(v,T)}{|T|},\quad \text{for all } i\in N. \tag{4}$$

これより，Shapley 値は Harsanyi dividend を提携のメンバー間で等分割したものを足し合わせたものとなっていることがわかる．

3　提携値に関する情報が不完備な協力ゲーム

通常の協力ゲームでは，すべての提携値はわかっているものと仮定している．しかし，現実には，いくつかの提携に対する提携値がわからないことが少なくない．本節では，いくつかの提携値がわからない不完備情報協力ゲームに関する従来の一般的な成果 [9] を紹介する．

不完備ゲームは，プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$，提携値がわかっている提携の集合を $\mathcal{K} \subseteq 2^N$，関数 $v : \mathcal{K} \to \mathbf{R}$ によって特徴づけることができる．すなわち，不完備ゲームは 3 重対 $(N, \mathcal{K}, v)$ によって定められる．ただし，$\emptyset \in \mathcal{K}$ とし，$v(\emptyset) = 0$ と仮定する．また，全体提携に対する提携値は必ずわかっているものと仮定する．すなわち，$N \in \mathcal{K}$ が成り立つものと仮定する．

[9] では，全体提携のみならず，各個人提携の提携値も既知であると仮定している．これは，ゲームに優加法性を仮定し，提携値が未知の提携の，提携値の上限および下限を得るために必要な仮定である．しかし，本研究では提携値が未知の提携の，提携値の上限・下限を得るというアプローチはとらないため，このような仮定は必要ない．

本研究では，N と $\mathcal{K}$ は固定して考えるので，不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, v)$ を単に v と記すこともある．$\mathcal{K}$ における全ての不完備ゲームの集合を $\Gamma^{\mathcal{K}}$ と記す．

4　不完備ゲームの Shapley 値とその公理系からの導出

不完備ゲームの Shapley 値を定義するために，次のような仮定を与える，

任意の提携 $S \subseteq N$ の各メンバーは S の得る dividend を等分割する．$S \in \mathcal{K}$ ならば，S の全部分提携から分配された dividend の総和は $v(S)$ となる．$S \notin \mathcal{K}$ ならば，S の得る dividend はゼロとする．

次に，不完備ゲームにおける Harsanyi dividend を得る方法であるが，通常の完備ゲームにおける Harsanyi dividend を得る式 (2) を使うことはできない．そこで，次のような手続きを考える．v を任意の不完備ゲームとする．また，再帰的に 2 つの関数 $z : 2^N \to \mathbf{R}^n$ と $d : 2^N \to \mathbf{R}^n$ を以下のように定義する：

$$z(v, \emptyset) = 0, \ d(v, \emptyset) = 0, \tag{5}$$

$$z(v, S) = \sum_{T \subset S} d(v, T), \tag{6}$$

$$d(v, S) = \begin{cases} 0, & \text{if } S \notin \mathcal{K}, \\ v(S) - z(v, S), & \text{if } S \in \mathcal{K}. \end{cases} \tag{7}$$

これより，全ての $S \subseteq N$ に対する dividend $d(v, S)$ が求められることがわかる．

以上より，不完備ゲームに対する Shapley 値 $\phi^{\mathcal{K}} : \Gamma^{\mathcal{K}} \to \mathbf{R}^n$ を以下のように定義する：

$$\phi_i^{\mathcal{K}}(v) = \sum_{T \in \mathcal{K}, T \ni i} \frac{d(v, T)}{|T|}, \quad \text{for all } i \in N. \tag{8}$$

既知提携 $T \in \mathcal{K}$ は T の得る Harsanyi dividend をそのメンバー間で等分割する．未知提携 $T \notin \mathcal{K}$ については，その Harsanyi dividend はゼロとなっており，各メンバーが得る利得もゼロとなる．

次に，提案解 $\phi^{\mathcal{K}}$ の公理系からの導出を行う．任意のベクトル関数 σ を $\sigma : \Gamma^{\mathcal{K}} \to \mathbf{R}^n$ とする．

Definition 1 提携 $S \in \mathcal{K}$ について，任意の提携 $T \in \mathcal{K}$ に対して以下が成り立つとき，S を $v \in \Gamma^{\mathcal{K}}$ におけるキャリアと呼ぶ．

1. $S \cap T \in \mathcal{K}$ ならば, $v(T) = v(S \cap T)$ ．

2. $S \cap T \notin \mathcal{K}$ ならば, $v(R) = 0 \ \ \forall R \in \mathcal{K}, R \subset S \cap T$ ．

不完備ゲームにおいて，利得の獲得に貢献しているプレイヤーの全体からなる提携をキャリアと呼ぶ．これは，通常の完備ゲームにおけるキャリアの概念を不完備ゲームに拡張したものとなっている．

Axiom 1 $v \in \Gamma^{\mathcal{K}}$, v におけるキャリアを $S \in \mathcal{K}$ とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\sum_{i \in S} \sigma_i(v) = v(N). \tag{9}$$

Axiom 1 は，キャリアに含まれないプレイヤーには利得は分配されないということを表している．

2 つの不完備ゲーム $v, w \in \Gamma^{\mathcal{K}}$ について，その和ゲーム $v + w$ を以下のように定義する：

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S) \text{ for all } S \in \mathcal{K}. \tag{10}$$

Axiom 2 $v, w \in \Gamma^{\mathcal{K}}$ とする． このとき，以下が成り立つ．

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w). \tag{11}$$

Axiom 2 は， 2 節で述べた，Shapley 値の公理の一つである加法性公理を，不完備ゲームへ一般化したものとなっている．

Axiom 3 $S \subseteq T$ となるような任意の $S, T \in \mathcal{K}$ に対して，$v(S) \leq v(T)$ となるような $v \in \Gamma^{\mathcal{K}}$ を考える．このとき，以下が成り立つ．

$$\sigma_i(v) \geq 0 \ \textit{for all} \ i \in N. \tag{12}$$

Axiom 3 は，通常の完備ゲームに対する解の公理において，弱単調性と呼ばれているものである．この公理は，不完備ゲームが単調であるとき，各プレイヤーへの利得分配はゼロ以上になるということを表している．

Definition 2 提携 $S \in \mathcal{K}$ について，任意の $T \in \mathcal{K}$ に対して以下が成り立つとき，S を $v \in \Gamma^{\mathcal{K}}$ における必須提携と呼ぶ．

$$S \cap T^c \neq \emptyset \Rightarrow v(T) = 0. \tag{13}$$

メンバー全員が集まらないと利得を得ることができないような提携を必須提携と呼ぶ．

Axiom 4 $v \in \Gamma^{\mathcal{K}}$ とする．$S \in \mathcal{K}$ が v における必須提携であるとき以下が成り立つ．

$$\sigma_i(v) = \sigma_j(v) \ \textit{for all} \ i, j \in S. \tag{14}$$

Axiom 4 は，必須提携の各メンバーに分配される利得は等しいということを表している．また Axiom 4 は， 2 節で述べた，Shapley 値の公理の一つである対称性公理を，不完備ゲームへ拡張したものとなっている．

このとき，次の定理を得た．

Theorem 1 $\phi^{\mathcal{K}}$ は *Axiom 1* 〜 *4* を満たす $\Gamma^{\mathcal{K}}$ 上の唯一つの解である．

Table. 1: 各提携，各プレイヤーの dividend と提案解 $\phi^{\mathcal{K}}$

提携	プレイヤー 1	プレイヤー 2	プレイヤー 3	プレイヤー 4
{ 1 }	5	0	0	0
{ 2 }	0	3	0	0
{ 3 }	0	0	2	0
{ 4 }	0	0	0	0
{ 1,2 }	1	1	0	0
{ 1,3 }	0	0	0	0
{ 1,4 }	0	0	0	0
{ 2,3 }	0	0	0	0
{ 2,4 }	0	0	0	0
{ 3,4 }	0	0	1.5	1.5
{1,2,3}	1	1	1	0
{1,2,4}	0	0	0	0
{1,3,4}	0	0	0	0
{2,3,4}	0	0	0	0
{1,2,3,4}	0.5	0.5	0.5	0.5
提案解 $\phi^{\mathcal{K}}$	7.5	5.5	5	2

5　数値例

プレイヤーの全体を $N = \{1, 2, 3, 4\}$,　既知提携の全体を

$$\mathcal{K} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \tag{15}$$

とする．

不完備ゲーム v を，$v : \mathcal{K} \to \mathbf{R}$ とし，提携値を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} &v(\{1\}) = 5, && v(\{2\}) = 3, && v(\{3\}) = 2, && v(\{4\}) = 0, \\ &v(\{1, 2\}) = 10, && v(\{3, 4\}) = 5, && v(\{1, 2, 3\}) = 15, && v(\{1, 2, 3, 4\}) = 20. \end{aligned} \tag{16}$$

これより，各提携に対する Harsanyi dividend と提案解 $\phi^{\mathcal{K}}$ を計算すると，Table 1 のようになる．

6　結論と今後の課題

本研究では優加法性を仮定しない，一般の不完備情報協力ゲームの Shapley 値の考察を行った．提携値が不明な提携の全体集合は一般の場合を考えた．

まず，与えられた不完備ゲームに対して，Harsanyi のアプローチを用いた Shapley 値の提案を行った．具体的には，既知提携の Harsanyi dividend は元のゲームの dividend を用い，未知提携の Harsanyi dividend はゼロと仮定し，Shapley 値の定式化を行った．さらに，提案した Shapley 値の公理系からの導出を行った．公理系は，キャリアに関する公理，加法性，弱単調性，必須提携に関する公理からなる．

今後の課題としては，まず，今回提案した解と [10] において提案された，２つの Shapley 値との比較が挙げられる．この２つの Shapley 値はそれぞれ，重心解，最大不満最小化解と呼ばれているが，本研究によって，合計３種類の Shapley 値が提案されたことになるので，この３種類の Shapley 値の合理性などの検討を行う必要がある．今回提案した解と，重心解，最大不満最小化解の違いとしては，重心解と最大不満最小化解では，ゲームに優加法性を仮定することによって得られた，元の不完備ゲームから得られうる完備ゲームの全体の中から解を選択するという方法がとられている．一方，今回提案した解は，ゲームに優加法性などの仮定はせず，未知提携の Harsanyi dividend はゼロであるという仮定をして，定式化されている．このような解の提案方法の違いから，これら３つの解の特徴を考察することは有用であると考えられる．

次に，一般の不完備ゲームにおける仁およびコアに関する考察が挙げられる．そして，完備ゲームで成り立つ性質が不完備ゲームでも成り立つのかという問題を考察する必要がある．例えば，不完備ゲームにおいて，コアが存在すれば必ず仁はコアに属するのかという性質である．また，不完備ゲームにおけるコアや仁の公理化も挙げられる．また，上記の３つの Shapley 値について，どのようなゲームならば Shapley 値はコアに属するのかというような問題も挙げられる．

最後に，完備ゲームの Shapley 値の公理系は数多く存在し，本論文で挙げた Shapley による公理系以外には，Young [8] や Hart and Mas-Colell [2] などによるものがよく知られている．本研究で提案した Shapley 値が，これらで提案されている公理系からの導出ができるのかという問題が存在する．

References

[1] J.C. Harsanyi. A simplified bargaining model for the n-person cooperative game. *International Economic Review*, 4:194–220, 1963.

[2] S. Hart and A. Mas-Colell. Potential, value, and consistency. *Econometrica*, 57:589–614, 1989.

[3] D. Housman. Linear and symmetric allocation methods for partially defined cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 30:377–404, 2001.

[4] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17:1163–1170, 1969.

[5] L.S. Shapley. A value for n-person games. In H. Kuhn and A. Tucker, editors, *Contributions to the theory of games II*, pages 307–317. Princeton, 1953.

[6] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

[7] S.J. Willson. A value for partially defined cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 21:371–384, 1993.

[8] H.P. Young. Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 14:65–72, 1985.

[9] 桝屋・乾口．不完備情報の下での協力ゲームの基礎的考察．知能と情報, 24:601–615, 2012.

[10] 桝屋聡．一般の不完備情報協力ゲームとその Shapley 値．京都大学数理解析研究所講究録, 1990:48–55, 2016.