数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 35-43

非ゼロ和の施設警備ゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎　隆祐
Ryusuke Hohzaki
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1　はじめに

ネットワーク空間で警備側と侵入者側が対峙する警備ゲームの従来研究 [1] に対し，この報告で提案するモデルは次の点で新規性をもつ．

(1) アークだけでなく，ノードでも被害があり，かつ警備が可能である．

(2) アーク等の移動時間を考慮し，時間経過による警備の可能性・不可能性を組み込むことができる．

(3) 警備の待機場所を設定し，侵入者の侵入情報と待機要員の現場への派遣時間を考慮して，時間軸上での警備員配備が計画できる．

(4) 支払を非ゼロ和とすることで，警備側と侵入者側の評価尺度を個別に設定することで，モデルの分析力を高めている．

2　警備ゲームの基本モデル

ネットワークで表現された施設内空間へ侵入しようとする侵入者と，それに対峙する警備側との次のような警備ゲームを考える．重要施設の警備関係者が神経をとがらせる有害な侵入者には様々なタイプが存在する．空港であれば，犯罪人や密輸者，あるいはテロリスト等である．特に知能的な侵入者は警備情報を予め収集して，警備体制の弱点を突こうとするであろう．ここでは，複数のタイプの侵入者が存在し，彼らが警備側のとろうとする混合戦略を予め知っているという条件で戦われる次の前提のシュタッケルベルグ型警備ゲームを考える．

(A1) ノード集合 $\boldsymbol{N}$ とアーク集合 $\boldsymbol{A}$ から成るネットワーク $G(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{A})$ を警備空間とする．このゲームのプレイヤーを，侵入者及び警備側とする．

(A2) 侵入者には幾つかのタイプがあり，そのタイプ集合を $\boldsymbol{H}$ とする．タイプ $h \in \boldsymbol{H}$ の侵入者は，その侵入ノードから初期の手勢 R_0^h でもって侵入し，その目的ノードへ進もうとする．タイプ h の侵入者が侵入途中のノード i に生き残って到着した場合，1 人あたり物的・人的被害 d_i^h を施設側に与える．同時に，施設側被害とは別に，1 人あたり p_i^h の利益を得る．

タイプ $h \in \boldsymbol{H}$ の侵入者は，目的地到達までの利益の和（総利益）を最大にすべく，侵入ノードから目的ノードに至る閉路の無い侵入経路全体 Ω_h から 1 本のパスを選択する．

(A3) 警備側にはネットワーク上に幾つかの待機場所をもち，その集合を $\boldsymbol{W}$ で表す．警備側のもつ有限複数の警備体制の集合を $\boldsymbol{S}$ で表す．警備側は警備体制 $s \in \boldsymbol{S}$ をとる頻度（確率）$g(s)$ を決める．警備体制 s では，初期の警備人数 B_0^s をノード，アーク及び待機場所に配備し，侵入者を阻止しようとする．ただし，人目に立つノード，アークへの配備人数は M^s 人を上限とし，余りは待機場所で待機するものとする．また，警備レベルの高い体制は一般に負担が大きいため，警備体制 $g(s)$ の使用頻度にはその負担に応じた上限 $U(s)$ がある．

警備側は，最初にノード，アークに配備した人員を再配備できないが，待機場所に待機させた人員は，侵入者の侵入事案の情報を得て，ノードやアークに急派できる．

警備側は，これまでの発生事案データから，侵入者タイプに関する発生確率分布 $\{f(h), h \in \boldsymbol{H}\}$ を知っているとする．$f(h)$ は侵入者がタイプ h である確率である．

(A4) ネットワーク上をタイプ h の侵入者がパス l をとった場合の侵入口からノード j までの移動時間を $t_{hl}^A(j)$ で，侵入口からアーク e までの移動時間を $t_{hl}^A(e)$ で表す．一方のタイプ s の警備人の待機場所ノード $r \in \boldsymbol{W}$ からノード j までの移動時間を $t_s^D(r,j)$ で，アーク e までの移動時間を $t_s^D(r,e)$ で表す．

(A5) ノード $i \in \boldsymbol{N}$ 上での x 人の侵入者と y 人の警備員との対峙の結果生じる侵入者側の損耗は線形モデルに従うとし，侵入者の残存人数 $f_i^{hs}(x,y)$ は，侵入者のタイプ h 及び警備体制 s に依存し，次式で与えられる．

$$f_i^{hs}(x,y) = \max\{0,\ x - \gamma_i^{hs} y\} \tag{1}$$

同じ状況におけるアーク $e \in \boldsymbol{A}$ 上での衝突による侵入者の残存人数 $f_e^{hs}(x,y)$ も，同様な次式で与えられる．

$$f_e^{hs}(x,y) = \max\{0,\ x - \gamma_e^{hs} y\} \tag{2}$$

係数 $\gamma_i^{hs}, \gamma_e^{hs}$ は，ノード i，アーク e における侵入者に対する警備側の相対的な強さを表し，これを戦力交換比と呼ぶ．

(A6) 侵入者側は，事前の調査から，警備体制 $s \in \boldsymbol{S}$ における警備員配備とそれをとる確率 $g(s)$ が分かるものとするが，現に侵入を実行する時点における警備体制については確信を持てないとする．

一方の警備側は，侵入事案が発生した直後に，侵入者のタイプとその経路を情報として入手でき，これを用いて，待機場所に配備した警備員を現場に急派できる．

(A7) 警備側は侵入者による被害を最小化する警備計画を立て，侵入者は各タイプごとに自らの総利益を最大化するように侵入経路を決定する．

前提 (A2) における侵入者による時系列的な被害や利益の前提には，侵入者のタイプに依存する幾つかの状況が考慮されている．例えば空港における密輸者は，空港出口という彼の目的ノードにたどり着いてはじめて利益を確実なものにできるから，脱出するまでは何の利益も得られないと

考えられる．このとき，警備側は，密輸行為を阻止できなかったことによる社会的損失を被ることになる．侵入者がテロリストであれば，空港での事件・犯罪を企て，最終目的場所がどこであろうと移動中にも様々な人的・物的被害を与え，それがテロ犯の利益ともなる．

前提 (A3) における警備体制には，予想される危機から幾つかのレベルがあると考えられ，体制ごとに準備される装備品や警備員の質や量といった警備資源の差違から異なる警備コストを要する．

3　基本モデルの支払関数と定式化

ここでは，問題を非ゼロ和のシュタッケルベルグ・ゲームとして定式化してゆくが，まずプレイヤーの戦略を定義する．タイプ $h \in \boldsymbol{H}$ 侵入者の純粋戦略は，全パス Ω_h から 1 つのパスを選択することでああるが，その混合戦略をパス l の選択確率 $\pi_h(l)$ で表す．その実行可能性条件は次式で与えられる．

$$\sum_{l \in \Omega_h} \pi_h(\boldsymbol{l}) = 1, \quad \pi_h(\boldsymbol{l}) \geq 0,\ \boldsymbol{l} \in \Omega_h. \tag{3}$$

タイプ h 侵入者のこの混合戦略を $\pi_h = \{\pi_h(\boldsymbol{l}),\ \boldsymbol{l} \in \Omega_h\}$ で，全タイプの混合戦略を $\pi = \{\pi_h,\ h \in \boldsymbol{H}\}$ で表す．

一方の警備側は，警備体制 $s \in \boldsymbol{S}$ をとる確率 $g(s)$ と，その総員 B_0^s の配備として $\boldsymbol{y}^s = \{\{y_i^s, i \in \boldsymbol{N}\}, \{y_e^s, e \in \boldsymbol{A}\}, \{y_r^s, r \in \boldsymbol{W}\}\}$ を計画する．y_i^s, y_e^s, y_r^s は，それぞれノード i，アーク e 及び待機ノード r への配備人員数である．さらに，侵入事案発生直後に侵入者のタイプ h とそのパス l の情報を得て，各待機場所 r から各ノード i，各アーク e への派遣人員数である $\boldsymbol{z}_l^{hs} = \{z_l^{hs}(r,i), r \in \boldsymbol{W}, i \in \boldsymbol{N}\}, \{z_l^{hs}(r,e), r \in \boldsymbol{W}, e \in \boldsymbol{A}\}$ により派遣計画を表す．またこれらの集合体として，$g = \{g(s), s \in \boldsymbol{S}\}$, $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{y}^s, s \in \boldsymbol{S}\}$ や $\boldsymbol{z}^s = \{\boldsymbol{z}_l^{hs}, l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H}\}$，$\boldsymbol{z} = \{\boldsymbol{z}^s, s \in \boldsymbol{S}\}$ といった表記も適宜用いるものとする．モデルの前提から，警備側戦略に関する実行可能性条件は次のように表される．

$$\sum_{s \in S} g(s) = 1, \quad 0 \leq g(s) \leq U(s),\ s \in \boldsymbol{S}, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in N} y_i^s + \sum_{e \in A} y_e^s + \sum_{r \in W} y_r^s \leq B_0^s, \tag{5}$$

$$\sum_{i \in N} y_i^s + \sum_{e \in A} y_e^s \leq M^s,\ s \in \boldsymbol{S}, \tag{6}$$

$$\sum_{i \in N} z_l^{hs}(r,i) + \sum_{e \in A} z_l^{hs}(r,e) = y_r^s,\ r \in \boldsymbol{W}, s \in \boldsymbol{S}, l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H}, \tag{7}$$

$$y_i^s,\ y_e^s,\ y_r^s,\ z_l^{hs}(r,i),\ z_l^{hs}(r,e) \geq 0,\ i \in \boldsymbol{N}, e \in \boldsymbol{A}, r \in \boldsymbol{W}, s \in \boldsymbol{S}, l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H}. \tag{8}$$

以後，各プレイヤーの利得を表す式を導出する．記号として，パス $\boldsymbol{l}$ 上のノード集合とアーク集合をそれぞれ $\boldsymbol{V}_l$，$\boldsymbol{E}_l$ で表す．また，$\boldsymbol{V}_l^i$ を，パス l 上での出発ノードからノード i に到るまでに通過する i 自身を含むノード集合，$\boldsymbol{E}_l^i$ を，パス l 上での出発ノードからノード i に到るまでに通過するアーク集合とする．

タイプ h の侵入者がパス $\boldsymbol{l}$ をとり，警備体制 s が配備計画 $\boldsymbol{y}^s$, $\boldsymbol{z}^{hs}$ をとることにより，パス $\boldsymbol{l}$ 上のノード $i \in \boldsymbol{V}_l$ での侵入者残存数は次式で書ける．

$$D^+_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \equiv \max\{0,\ D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s))\} \tag{9}$$

ただし，

$$\begin{aligned} D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \equiv\ & R^h_0 - \sum_{j \in V^i_l} \gamma^{hs}_j \left(y^s_j + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(j) \geq t^D_s(r,j)} z^{hs}_l(r, j) \right) \\ & - \sum_{e \in E^i_l} \gamma^{hs}_e \left(y^s_e + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(e) \geq t^D_s(r,e)} z^{hs}_l(r, e) \right) \end{aligned} \tag{10}$$

第２項はノード j での事前配備と待機所からの派遣人数の総警備員数による損耗，第３項はアーク e における同様の損耗である．

これにより，生き残った侵入者によるノード i での被害量と利益が次式で表される．

$$N_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = d^h_i D^+_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \tag{11}$$

$$R_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = p^h_i D^+_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \tag{12}$$

これをすべてのノード $i \in \boldsymbol{V}_l$ で総和をとった次の $N_{hs}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s))$ 及び $R_{hs}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s))$ が，タイプ h 侵入者のパス $\boldsymbol{l}$ と警備体制 s の警備配備計画 $(\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)$ による施設被害量及び侵入者利得である．

$$\begin{aligned} N_{hs}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) &= \sum_{i \in V_l} d^h_i D^+_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \\ R_{hs}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) &= \sum_{i \in V_l} p^h_i D^+_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \end{aligned}$$

侵入者側は確実な警備配置は知らないから，上式を警備体系のランダム化戦略 $g(s)$ により期待値をとる．

$$\begin{aligned} & N_h(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) = \sum_{s \in S} g(s) N_{hs}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = \sum_{s \in S} g(s) \sum_{i \in V_l} d^h_i D^+_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \\ & = \sum_{s \in S} g(s) \sum_{i \in V_l} d^h_i \max\left\{ 0,\ R^h_0 - \sum_{j \in V^i_l} \gamma^{hs}_j \left(y^s_j + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(j) \geq t^D_s(r,j)} z^{hs}_l(r, j) \right) \right. \\ & \qquad \left. - \sum_{e \in E^i_l} \gamma^{hs}_e \left(y^s_e + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(e) \geq t^D_s(r,e)} z^{hs}_l(r, e) \right) \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & R_h(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) = \sum_{s \in S} g(s) R_{hs}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = \sum_{s \in S} g(s) \sum_{i \in V_l} p^h_i D^+_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \\ & = \sum_{s \in S} g(s) \sum_{i \in V_l} p^h_i \max\left\{ 0,\ R^h_0 - \sum_{j \in V^i_l} \gamma^{hs}_j \left(y^s_j + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(j) \geq t^D_s(r,j)} z^{hs}_l(r, j) \right) \right. \\ & \qquad \left. - \sum_{e \in E^i_l} \gamma^{hs}_e \left(y^s_e + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(e) \geq t^D_s(r,e)} z^{hs}_l(r, e) \right) \right\} \end{aligned} \tag{14}$$

さらに，タイプ h 侵入者の混合戦略 π_h による期待被害量，期待利得は次式となる．

$$\begin{aligned} N_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) &= \sum_{l\in\Omega_h}\pi_h(l)N_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \\ R_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) &= \sum_{l\in\Omega_h}\pi_h(l)R_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \end{aligned}$$

$R_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))$ がタイプ h 侵入者の期待利得であり，彼は警備計画 $(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を知った後，これを最大にすべく次の問題を考える．

$$(P_I)\quad \max_{\pi_h} R_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) = \max_{l\in\Omega_h} R_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \tag{15}$$

この最適混合戦略を π_h^*，あるいは右辺による最適パスを $\boldsymbol{l}^*$ とすれば，警備側の支払は，侵入者の出現確率 $f(h)$ を加味した次式で表される．

$$\sum_{h\in H} f(h)\sum_{l\in\Omega_h}\pi_h^*(l)N_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) = \sum_{h\in H} f(h)N_h(\boldsymbol{l}^*,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))$$

結局，警備側は次の最小化問題を考えることになる．

$$(P_S)\quad \min_{(g,y,z)}\sum_{h\in H} f(h)\sum_{l\in\Omega_h}\pi_h^*(l)N_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) = \min_{(g,y,z)}\sum_{h\in H} f(h)N_h(\boldsymbol{l}^*,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \tag{16}$$

ここでのゲームは，警備側が先手で警備計画 (g,y,z) を立て，次に各タイプ h の侵入者が (g,y,z) を知って問題 (P_I) の最適パスをとろうとするシュタッケルベルグ・ゲームである．

4　有限な支払双行列をもつ非ゼロ和シュタッケルベルグ・ゲームの解法

ここでは，Paruchuri ら [2] の提案したシュタッケルベルグ・ゲームの解法を解説する．その解法を我々の警備ゲームに適用するやり方ついては，次節以降で述べてゆく．

Paruchuri らの方法は，一人のリーダーと複数タイプのフォロアーの間でプレイされる非ゼロ和のシュタッケルベルグ・ゲームに対する一般的な解法である．各プレイヤーは有限数の離散戦略をもつ．リーダーの戦略集合は X である．フォロワーのタイプ集合は有限加算集合 L であり，その出現確率分布 $\{p^l, l\in L\}$ をリーダーは知っている．フォロアーの純粋戦略の集合は，すべてのタイプについて共通の Q である．リーダーの戦略 $i\in X$ とタイプ l フォロアーの戦略 $j\in Q$ によるリーダーの利得を A_{ij}^l，フォロアーの利得を C_{ij}^l とする．リーダーの混合戦略を $x=\{x_i, i\in X\}$ で，タイプ $l\in L$ のフォロアーの混合戦略を $\{q_j^l, j\in Q\}$ で表す．フォロアーは x を知って自らの戦略を決めるものの，その際は必ず最適な純粋戦略が存在することから，リーダーの最適混合戦略を求める問題は次の 2 次混合整数計画問題で定式化できる．ただし，M は「ビック M」と呼ばれる十分大きな数である．

$$\begin{aligned} (MIQP)\qquad & \max_{x,q,a}\ \sum_{i\in X}\sum_{l\in L}\sum_{j\in Q} p^l x_i A_{ij}^l q_j^l \\ s.t.\qquad & \sum_{i\in X} x_i = 1, \\ & \sum_{j\in Q} q_j^l = 1,\ l\in L, \end{aligned}$$

$$0 \leq a_l - \sum_{i \in X} x_i C_{ij}^l \leq (1 - q_j^l) M, \ j \in Q, l \in L, \tag{17}$$

$$x_i \geq 0, \ i \in X, \tag{18}$$

$$q_j^l \in \{0, 1\}, \ j \in Q, l \in L. \tag{19}$$

条件 (19) から分かるように，この定式化ではフォロアーの最適戦略を純粋戦略の中から求めようとしており，また (17) 式から，任意の $j \in Q$ に対し $\sum_{i \in X} x_i C_{ij}^l \leq a_l$ が成立し，かつ左辺の j に関する最大値が a_l となることを示している．この最大化問題では，タイプ l フォロアーの利得の最大値を与える純粋戦略 q_j^l に対し，リーダーの利得を目的関数で与え，これを最大にしようとする変数 x を求めるように定式化されている．

ここで $z_{ij}^l \equiv x_i q_j^l$ で定義した新たな変数を用いることで，次のように線形の混合整数計画問題に変形できる．

$$\begin{aligned}
(MILP) \qquad & \max_{q,z,a} \ \sum_{i \in X} \sum_{l \in L} \sum_{j \in Q} p^l A_{ij}^l z_{ij}^l \\
s.t. \qquad & \sum_{i \in X} \sum_{j \in Q} z_{ij}^l = 1, \ l \in L, \\
& \sum_{j \in Q} z_{ij}^l \leq 1, \ i \in X, l \in L, \\
& q_j^l \leq \sum_{i \in X} z_{ij}^l, \ j \in Q, l \in L, \\
& \sum_{j \in Q} q_j^l = 1, \ l \in L, \\
& 0 \leq a_l - \sum_{i \in X} C_{ij}^l \left(\sum_{h \in Q} z_{ih}^l \right) \leq (1 - q_j^l) M, \ j \in Q, l \in L, \\
& \sum_{j \in Q} z_{ij}^l = \sum_{j \in Q} z_{1j}^l, \ i \in X, l \in L, \\
& z_{ij}^l \geq 0, \ i \in X, j \in Q, l \in L, \\
& q_j^l \in \{0, 1\}, \ j \in Q, l \in L.
\end{aligned}$$

以上の解法を本研究での問題に適用するにあたっての主な留意事項として，本モデルが有する次のような特徴がある．

(1) フォロアーの戦略空間は，そのタイプに依存している．

(2) リーダーである警備側の戦略は，その混合戦略 $\{g(s), s \in S\}$ の他に配備計画 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ があり，これらは連続変数で表されている．

(3) プレイヤーの利得関数には，$\max\{\}$ といった取り扱いの難しい演算が含まれている．

5　強い侵入動機を考慮したモデル（モデル２）

３節の基本モデルの定式化では，侵入者側に積極的な侵入意図があった場合にそれを過小評価する可能性がある．警備の厳重な重要施設等で，侵入者が警備網を突破してあるノードに到達する

ことが困難な場合，侵入者がどのようなパスを選択しようがそのノードに到達する残存人数はゼロとなる．そのときの利得はゼロであるから，侵入者には侵入の動機が全く生じない．しかし，実際のテロ犯はそのような事態を覚悟しつつ，たとえ自らの残存数に関する理論上の値が負となるにしても，その値が大きくなるパスをとることで小さな突破の可能性に賭け，文字通り死に物狂いで侵入計画を実行しようとするであろう．そのような強い侵入動機を考慮して，ここでは侵入者の残存数を，その正負を問わない (10) 式で置き換えたモデルを考える．

これを使って，警備体制 $s \in \boldsymbol{S}$ の配備 $(\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)$ とタイプ $h \in \boldsymbol{H}$ 侵入者のパス選択 $\boldsymbol{l} \in \Omega_h$ がとられる場合のノード i での損害と利得は，基本モデルの (11)，(12) 式から次式に変更される．

$$
\begin{aligned}
N^2_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) &= d^h_i D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \\
R^2_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) &= p^h_i D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s))
\end{aligned}
$$

この評価式によるパス $\boldsymbol{l}$ 上での総利得は次式で表される．

$$
R^2_{hs}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = \sum_{i \in V_l} R^2_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = \sum_{i \in V_l} p^h_i D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s))
$$

また，残存量 $D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s))$ の $g(s)$ による期待値は次式で表される．

$$
\begin{aligned}
D_{hi}(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) &= \sum_{s \in S} g(s) D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) \\
&= R^h_0 - \sum_{s \in S} \sum_{j \in V^i_l} \gamma^{hs}_j \left(g(s) y^s_j + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(j) \geq t^D_s(r,j)} g(s) z^{hs}_l(r, j) \right) \\
&\qquad - \sum_{s \in S} \sum_{e \in E^i_l} \gamma^{hs}_e \left(g(s) y^s_e + \sum_{r \in W | t^A_{hl}(e) \geq t^D_s(r,e)} g(s) z^{hs}_l(r, e) \right)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

基本モデルの (13)，(14) 式に対応して，このモデルにおけるタイプ h 侵入者による期待被害量及び期待利得は，

$$
\begin{aligned}
N^2_h(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) &= \sum_{s \in S} g(s) \sum_{i \in V_l} d^h_i D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = \sum_{i \in V_l} d^h_i D_{hi}(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) \\
R^2_h(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) &= \sum_{s \in S} g(s) \sum_{i \in V_l} p^h_i D_{hsi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{y}^s, \boldsymbol{z}^s)) = \sum_{i \in V_l} p^h_i D_{hi}(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))
\end{aligned}
$$

と書ける．さらに，混合戦略 π_h による上式の期待値は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
N^2_h(\pi_h, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) &= \sum_{l \in \Omega_h} \pi_h(l) N^2_h(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) = \sum_{l \in \Omega_h} \pi_h(l) \sum_{i \in V_l} d^h_i D_{hi}(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) \\
R^2_h(\pi_h, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) &= \sum_{l \in \Omega_h} \pi_h(l) R^2_h(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) = \sum_{l \in \Omega_h} \pi_h(l) \sum_{i \in V_l} p^h_i D_{hi}(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))
\end{aligned}
$$

警備情報 $(g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を得て，自らの利益を最大化しようとするタイプ h 侵入者は問題

$$
(P^2_I) \quad R^2_h(\pi^*_h, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) = \max_{\pi_h} R^2_h(\pi_h, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) = \max_{l \in \Omega_h} R^2_h(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) \tag{21}
$$

を考え，最適なパスを示す $\{\pi^*_h, h \in \boldsymbol{H}\}$ をとることになる．侵入者のこの最適反応を考慮して，警備側は，侵入者のタイプに関する期待被害

$$
\sum_{h \in H} f(h) N^2_h(\pi^*_h, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))) \tag{22}
$$

を最小化しようとする．

ここで，(20) 式から分かるように，変数 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は $g(s)$ と掛けて使用されているから，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ の代わりに次の変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ を用い，$D_{hi}(\boldsymbol{l}, (g, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$ を変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ の線形式 $D_{hi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}))$ で再定義する．

$$x_i^s \equiv g(s)y_i^s,\ x_e^s \equiv g(s)y_e^s,\ x_r^s \equiv g(s)y_r^s,\ v_l^{hs}(r,i) \equiv g(s)z_l^{hs}(r,i),\ v_l^{hs}(r,e) \equiv g(s)z_l^{hs}(r,e)$$

この新しい変数の実行可能性条件は，(5), (6), (7) 及び (8) 式に対応して次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in N} x_i^s + \sum_{e\in A} x_e^s + \sum_{r\in W} x_r^s \le g(s)B_0^s,\ s \in \boldsymbol{S},\\
&\sum_{i\in N} x_i^s + \sum_{e\in A} x_e^s \le g(s)M^s,\ s \in \boldsymbol{S},\\
&\sum_{i\in N} v_l^{hs}(r,i) + \sum_{e\in A} v_l^{hs}(r,e) = x_r^s,\ r \in \boldsymbol{W}, s \in \boldsymbol{S}, l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H},\\
&x_i^s,\ x_e^s,\ x_r^s,\ v_l^{hs}(r,i),\ v_l^{hs}(r,e) \ge 0,\ i \in \boldsymbol{N}, e \in \boldsymbol{A}, r \in \boldsymbol{W}, s \in \boldsymbol{S}, l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H}.
\end{aligned}$$

となる．これらの条件を満たす非負の変数 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{v}$ からは，$g(s) > 0$ の場合には

$$y_i^s = \frac{x_i^s}{g(s)},\ y_e^s = \frac{x_e^s}{g(s)},\ y_r^s = \frac{x_r^s}{g(s)},\ z_l^{hs}(r,i) = \frac{v_l^{hs}(r,i)}{g(s)},\ z_l^{hs}(r,e) = \frac{v_l^{hs}(r,e)}{g(s)}$$

により，条件 (5)–(8) を満たす非負の変数 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ が再構成できる．$g(s) = 0$ の場合はこの警備体制 s は採用されないことを意味するから，その配備計画 $\boldsymbol{y}^s$，$\boldsymbol{z}^s$ を立てる必要はない．

2 節では警備ゲームの基本モデルを説明し，本節では現実的な修正モデルとして侵入者の強い侵入動機のあるモデル（モデル２）を説明した．実際には，式 (10) の方が式 (9) より定式化上単純であり，このゲームの均衡解の導出手法に 4 節で解説した Paruchuri らの方法を適用すれば，次のような定式化が可能となる．

$$(P_S^2)\quad \min_{g,x,v,\pi,\eta,\zeta,\xi} \sum_{h\in\boldsymbol{H}} f(h) \sum_{l\in\Omega_h} \pi_h(l) \sum_{i\in V_l} d_i^h D_{hi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})) \tag{23}$$

$$s.t.\quad \sum_{l\in\Omega_h} \pi_h(l) = 1,\ h \in \boldsymbol{H},\quad \pi_h(l) \in \{0,1\},\ l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H} \tag{24}$$

$$0 \le a_h - \sum_{i\in V_l} p_i^h D_{hi}(\boldsymbol{l}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})) \le (1 - \pi_h(l))M,\ l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&0 \le g(s) \le U(s),\ s \in \boldsymbol{S},\\
&\sum_{i\in N} x_i^s + \sum_{e\in A} x_e^s + \sum_{r\in W} x_r^s \le g(s)B_0^s,\ s \in \boldsymbol{S},\\
&\sum_{i\in N} x_i^s + \sum_{e\in A} x_e^s \le g(s)M^s,\ s \in \boldsymbol{S},\\
&\sum_{i\in N} v_l^{hs}(r,i) + \sum_{e\in A} v_l^{hs}(r,e) = x_r^s,\ r \in \boldsymbol{W}, s \in \boldsymbol{S}, l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H},\\
&x_i^s,\ x_e^s,\ x_r^s,\ v_l^{hs}(r,i),\ v_l^{hs}(r,e) \ge 0,\ i \in \boldsymbol{N}, e \in \boldsymbol{A}, r \in \boldsymbol{W}, s \in \boldsymbol{S}, l \in \Omega_h, h \in \boldsymbol{H}.
\end{aligned}$$

目的関数 (23) は，式 (22) による．式 (24) は，問題 (21) の最適解が最適なパス選択により実現されることによる．また制約式 (25) により，各タイプ h の侵入者の利得が最大となるパスが選択されることが保障され，その最大利得が a_h により与えられる．ただし，M はビッグ M である．

6 おわりに

5 節で述べたモデルにより，警備側が侵入者に対し十分強力であった場合でも侵入者が攻撃を仕掛けてくる動機付けが可能となった．しかし，侵入者にとっては，推測しうる残存量の正負は自らの利益を考える上で大きな判断材料とすべきである．例えば，負の残存量に対し，正の残存量よりは小さな利益率を仮定すれば，残存量が負となってもそれほど大きな損失は生じないという侵入者の好みを表現でき，逆に大きな利益率を仮定すれば，負の残存量が大きな損失を生じると考える侵入者の傾向を表現できる．

警備側の好みについても同様である．油断することなく警備配備をするためには，残存量を (9) 式ではなく，負の値も考えた (10) 式を用いるべきである．しかし，一方では警備コストの問題もあり，侵入者を十分阻止できることが予想される場合には被害が少ないとして，そのカ所に対しては警備を省力化することも経済性の面からは重要であり，これは負の残存量に対して小さな被害率を想定することで表現できる．以上の設定を与える制約条件を工夫することで，モデル 2 に更なる現実的な警備要素を加味した改善モデルが提案できる．

また，侵入者の移動時間 $t^A_{hl}(j)$ や $t^A_{hl}(e)$ を，防犯カメラ等からの情報取得以降の経過時間とすることで，防犯カメラの効果をモデルの中に組み込むこともできる．以上のように，現実的な要素をさらに組み込んでモデルを改善する余地があり，本研究の拡張が期待される．

参考文献

[1] R. Hohzaki and G. Sakai, Security games taking account of invasion routes and attrition, Journal of the Operations Research Society of Japan, **60**(2), pp.156–177, 2017.

[2] P. Paruchuri, J.P. Pearce, J. Marecki, M. Tambe. F. Ordonez, and S. Kaus, Playing games for security: An efficient exact algorithm for solving Bayesian Stackelberg games, Proceedings of the 7th international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems, **2**, pp.895–902. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems.