

# 折り紙ユニットによる凸多面体構成問題について — 実現可能な展開図の列挙 —

九州工業大学・大学院工学研究院 藤田 敏治

Toshiharu Fujita

Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology

## 1 はじめに

折り紙ユニットによる凸多面体構成問題については、既に ([2]) で扱った。そこでは問題を3段階に分けており、具体的には「展開図列挙問題」「凸多面体を構成可能な辺の接続問題」「同型判定問題」からなるものである。この中で、「展開図列挙問題」については詳細に扱っていなかったこともあり、ここで改良型の定式化とともに改めて動的計画法による解法および数値計算の結果を与える。

## 2 折り紙ユニットによる凸多面体構成問題

折り紙ユニットと呼ばれる部品を複数組み合わせることで各種の多面体を作成することができる。折り紙ユニットとは、1枚の正方形あるいは長方形の折り紙から作成されるもので、継手や差し込み口をもつ多角形の形状をしたものである。ユニットの継手が、他のユニットの差し込み口に差し込まれることでユニット同士がつながっていき、1種類（場合によっては数種類）のユニットを多数組み合わせることで多様な多面体を作成できる。例えば [5, 6] の中で三村は、正方ユニットおよび3角ユニット、三角正方ユニットと呼ばれるものを用いて、正多面体や準正多面体をはじめ実に様々な多面体の構成方法を与えている。また、[7, 8, 9, 10] においては一般3角ユニットなるものが考案され、星形正多面体なども正確に実現されている。本報告（および [2]）における「折り紙ユニットによる凸多面体構成問題」では、凸多面体に制限はするが、[5, 6] で用いられた正方ユニットおよび3角ユニットから如何なる多面体を作成できるかについて考えるものである。実際、一定数のユニットで作成可能な凸多面体すべてを求める問題として定式化されている。

## 3 展開図列挙問題

3段階に分けられた問題の一つである「凸多面体を構成可能な辺の接続問題」によって、特定の形に接続したユニット（展開図）に対し、どのようにユニット同士をつなげていけば凸多面体が構成可能であるかは解決した。また、「凸多面体を構成可能な辺の接続問題」から得られる解（ユニット間の接続情報）は一般に極めて多数にのぼるが、その解に対して「同型判定問題」を適用することで、実際に作成してみることなく、構成される凸多面体が合同か否かが判定できた。

しかし、特定の数のユニットのみを利用した場合でも、その接続の仕方によって展開図に相当する部分の形が異なり、作成できる凸多面体も一般に異なる。よって、ユニットのあらゆる接続の仕方、すなわち構成可能なすべての展開図を考慮しなければならないが、ユニット数が増えるにつれ、その種類は爆発的に増加する。そこで、ユニットの接続法も含めて動的計画問題として定式化し、一定数のユニットを用いてどのような凸多面体が構成可能であるかを考えるのが「展開図列挙問題」である。

以下、最初に正方ユニットに対する「展開図列挙問題」を定式化し、その後、より複雑となる3角ユニットの場合について考える。

3.1 正方ユニットの場合

詳細は [2] にゆずるが、正方ユニットによって実現可能な展開図は、一般に複数の合同な正方形をその 1 つの辺同士を共有させるように接続することで得られるものとなる。実際、 $n$  個のユニットについて考える場合、 $n$  個の正方形の辺と辺を接続し、実現可能なすべての多角形を列挙することが必要となる。

定式化にあたり、初期状態は正方形 (1 個の正方ユニットに対応する展開図) とし、ステージごとに正方形を 1 個接続していき、得られた図形を展開図として次状態と考える。状態としてあらわされた展開図のどの辺に次の正方形を接続すかが決定である。そして、最終状態として現れる展開図に「凸多面体を構成可能な辺の接続問題」を適用し、その展開図で凸多面体が構成可能か否かを判定する。

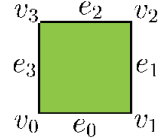


図 1: 初期状態

まず、状態・決定・状態推移についての概略を説明する。初期状態は正方形であるが、この正方形の頂点に対し反時計回りに  $v_0, v_1, v_2, v_3$  とラベルを付け、頂点  $v_i$  と  $v_{i+1}$  の間の辺に  $e_i$  とラベルを付ける (図 1 参照)。そして、頂点  $v_i$  の内角を  $\alpha_i$  とする。なお、ここでの頂点とは、接続する正方形の単位で考えたものとする。よって、2 つの正方形を接続した場合、得られる図形は長方形となり通常の意味での頂点は 4 個であるが、正方形単位でみた場合、2 つの長辺上に各 1 個の頂点が存在し、頂点は 6 個と考える。また、展開図に  $p$  個の頂点がある場合、 $v_p$  は  $v_0$  と同一視するものとする (図 2 参照)。

このとき、状態は各頂点の内角を順に並べた  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$  とあらわされる ( $d$  は頂点の数  $-1$ )。決定は、状態があらわす展開図に対し、正方形を接続する辺の番号をあらわすものとする。決定  $m$  をとった場合、 $e_m$  を共有するように新たな正方形が接続される。その結果、新たな展開図では、頂点  $v_0, v_1, \dots, v_m$  はその位置が変わらず、新たに接続された正方形上の頂点にラベル  $v_{m+1}, v_{m+2}$  が与えられ、直前の展開図における  $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_d$  については、頂点番号がそれぞれ  $+2$  されることとなる。辺  $e_i$  および内角  $\alpha_i$  についても、頂点の変更に合わせて更新する。

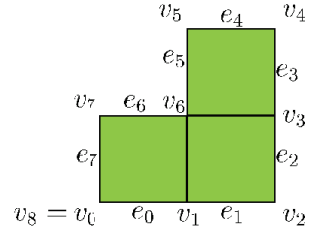


図 2: 一般の状態

以上のことから、状態空間と決定空間、可能決定集合はそれぞれ

$$\text{状態空間} : Y = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \mid d = 3, 4, \dots; \alpha_i = 90, 180, 270, 360 (i = 0, 1, \dots, d)\}$$

$$\text{決定空間} : V = \{t \mid t = 0, 1, \dots\}$$

$$\text{可能決定集合} : V((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)) = \{t \in V \mid t \leq d\} \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in Y$$

となる。初期状態は  $y_0 = (90, 90, 90, 90)$  である。また、状態  $y = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in Y$  と実行可能な決定  $t \in V(y)$  に対し、状態推移  $f(y, t)$  を以下のように定める：

$$f((\alpha_0, \dots, \alpha_d), t) = (\alpha'_0, \dots, \alpha'_{d+2})$$

ただし

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & t - d < i < t \\ \alpha_i + 90 & i = t \\ 90 & i = t + 1 \\ 90 & i = t + 2 \\ \alpha_{i-2} + 90 & i = (t + 3) \pmod{d + 3} \\ \alpha_{i-2} & t + 4 \leq i \leq d + 2. \end{cases}$$

例 3.1 図 3 の多角形 (展開図) は状態：

$$y_1 = (90, 180, 90, 90, 180, 90)$$

であらわされる。これに対し決定  $t_1 = 2$  は、辺  $e_2$  へ正方形を接続することを表し、

$$y_2 = (90, 180, 180, 90, 90, 180, 180, 90)$$

へと推移する。 □

ここで、 $\alpha'_i = 360$  なる  $i$  が存在するならば、頂点  $v_i$  は平面上ですでに正方形に囲まれた状態である。このとき、その前後の辺に正方形を接続しても頂点  $v_i$  の内角が  $360^\circ$  を超え、凸多面体を構成することはできない。よって、この冗長な辺を削除するため、 $\alpha'_i = 360$  なる  $i$  が存在する場合には、次の操作を実行する。

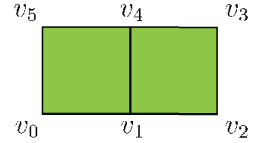


図 3: 状態  $y_1$

$$\alpha''_j = \alpha'_j \quad (j = 0, 1, \dots, i-2), \quad \alpha''_{i-1} = \alpha'_{i-1} + \alpha'_{i+1}, \quad \alpha''_j = \alpha'_{j+2} \quad (j = i, i+1, \dots, d)$$

ただし、 $i = 0$  のときは

$$\alpha''_0 = \alpha'_1 + \alpha'_{d+2}, \quad \alpha''_j = \alpha'_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, d)$$

$i = d$  のときは

$$\alpha''_0 = \alpha'_0 + \alpha'_{d-1}, \quad \alpha''_j = \alpha'_j \quad (j = 1, 2, \dots, d)$$

とし、 $(\alpha''_0, \dots, \alpha''_d)$  を推移後の状態とみなし、これをあらためて  $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_{d+2})$  とおく ( $d$  を 2 減じる)。そして、 $\alpha'_i = 360$  なる  $i$  が存在しなくなるまでこの操作を繰り返す。

例 3.2 図 4 の左の状態は

$$(90, 180, 90, 180, 90, 90, 360, 90, 90, 180)$$

であらわされる。このとき、図 4 の右の状態：

$$(90, 180, 90, 180, 90, 180, 90, 180)$$

へと変換する。 □

以上の推移で得られる状態には、合同な図形（鏡像も含む）が別状態として生じている場合がある。これらを同一視するため、推移により状態を生成した際には、必ず以下の変換を行うものとする。

生成された状態を  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$  とするとき、頂点の位置を 1 つずつ、ずらして得られる内角ベクトル：

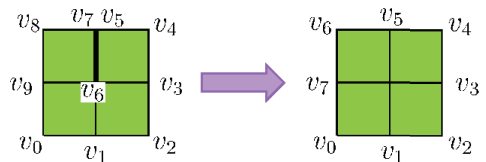


図 4:  $\alpha_i = 360$  の処理

$$\begin{aligned} &(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}, \alpha_d) \\ &(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d-1}, \alpha_d, \alpha_0) \\ &(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{d-1}, \alpha_d, \alpha_0, \alpha_1) \\ &\quad \vdots \\ &(\alpha_d, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}, \alpha_{d-1}) \end{aligned}$$

および、その逆順：

$$\begin{aligned} &(\alpha_d, \alpha_{d-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0) \\ &(\alpha_0, \alpha_d, \alpha_{d-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1) \\ &(\alpha_1, \alpha_0, \alpha_d, \alpha_{d-1}, \dots, \alpha_3, \alpha_2) \\ &\vdots \\ &(\alpha_{d-1}, \alpha_{d-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_d) \end{aligned}$$

を考え、これらの全体を辞書式順序で最小化したベクトルを求める。それをあらためて  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$  とみなし、推移後の状態とする。この操作により、合同な展開図は状態としての一意な表現をもつ。なお、頂点ラベル  $v_i$  および辺ラベル  $e_i$  についても、最終的に得られた状態  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$  に合わせて付け替えて考える。

利得関数  $R$  および終端利得関数  $K$  については

$$R((\alpha_0, \dots, \alpha_d), t) = \begin{cases} 1 & (\exists i; \alpha_i > 360) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$K((\alpha_0, \dots, \alpha_d)) = (\text{多角形 } (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \text{ を与えたときの「凸多面体を構成可能な辺の接続問題」(2) の最適値})$$

と定める。利得関数値は、ある期の展開図において、すでに頂点に集まっている角の大きさが  $360^\circ$  を超えれば 1 となり、そうでない場合は 0 となる。また、終端利得関数は、終端状態であらわされる展開図に対して、凸多面体が構成可能であれば 0 を、そうでなければ 1 をとる。

最後に、期数  $N$  を

$$N = (\text{接続する正方ユニットの数}) - 1$$

と定めるとき、初期状態  $y_0 = (90, 90, 90, 90)$  に対する次の決定過程問題の最適値が 0 であれば、 $N+1$  個のユニットで構成し得る展開図でかつ凸多面体が作成可能なものが存在したことをあらわす。

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad &\text{Minimize } R(y_0, t_0) \vee R(y_1, t_1) \vee \dots \vee R(y_{N-1}, t_{N-1}) \vee K(y_N) \\ &\text{subject to } y_{n+1} = f(y_n, v_n), v_n \in V(y_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

ただし、 $\vee$  は最大演算子をあらわす：

$$a \vee b := \max(a, b), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

また、問題 (P) の最適政策に従って生じる最終状態によって、必要な展開図すべてが得られる。

問題 (P) に対する部分問題は、

$$W^n(y_n) = \min_{t_n, \dots, t_{N-1}} [R(y_n, t_n) \vee \dots \vee R(y_{N-1}, t_{N-1}) \vee K(y_N)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W^N(y_N) = K(y_N)$$

と定義され、最適値関数  $W^n$  に対して、次の再帰式が導かれる。

$$W^n(y) = \min_{t \in V(y)} [R(y, t) \vee W^{n+1}(f(y, t))], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

$$W^N(y) = K(y) \quad (2)$$

このとき、最適決定関数  $\pi_n^*$  を

$$\pi_n^*(y) = \operatorname{argmin}_{t \in V(y)} [R(y, t) \vee W^{n+1}(f(y, t))], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

と定めることにより、最適政策  $\pi^* = \{\pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_{N-1}^*\}$  を得る。

なお、ここで定式化された問題では、利得関数が決定に依存しないため、

$$Q(y) = R(y, t), \quad y \in X, t \in V(y)$$

とおくとき、再帰式(1)は

$$\begin{aligned} W^n(y) &= \min_{t \in V(y)} [Q(y) \vee W^{n+1}(f(y, t))] \\ &= Q(y) \vee \min_{t \in V(y)} W^{n+1}(f(y, t)), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

**例 3.3** ユニット数が3のとき、考えうる展開図を全て求めたい。この場合、 $N = 2$  とし、初期状態： $y_0 = (90, 90, 90, 90)$  に対し、再帰式(2),(4)を計算すればよい。なお、本報告では「凸多面体を構成可能な辺の接続問題」に言及していないため、ここでの終端利得はつねに“凸多面体が構成可能である”ことをあらわすとし、 $K(y) = 0$  とおく。(実際、ユニット数が3の場合、いずれの終端状態(展開図)においても凸多面体は構成可能となる。)

具体的には、再帰式:

$$\begin{aligned} W^0(y) &= Q(y) \vee \min_{t \in \{0,1,2,3\}} W^1(f(y, t)) \\ W^1(y) &= Q(y) \vee \min_{t \in \{0,1,2,3,4,5\}} W^2(f(y, t)) \\ W^2(y) &= K(y) = 0 \end{aligned}$$

を用いて  $W^0(y_0)$  を求めればよい。

$$\begin{aligned} W^0(y_0) &= Q(y_0) \vee \min_{t \in \{0,1,2,3\}} W^1(f(y_0, t)) \\ &= Q(y_0) \vee \min [W^1(f(y_0, 0)), W^1(f(y_0, 1)), W^1(f(y_0, 2)), W^1(f(y_0, 3))] \end{aligned}$$

ここで

$$Q(y_0) = Q((90, 90, 90, 90)) = 0$$

で

$$f(y_0, 0) = f((90, 90, 90, 90), 0) = (180, 90, 90, 180, 90, 90).$$

ここで、 $(180, 90, 90, 180, 90, 90)$  の並べ替えを考えて最小元を求め、内角並びの部分を書き換えることにより

$$f(y_0, 0) = (90, 90, 180, 90, 90, 180)$$

と定まる。これより

$$W^1(f(y_0, 0)) = Q((90, 90, 180, 90, 90, 180)) \vee \min_{t \in \{0,1,2,3,4,5\}} W^2(f((90, 90, 180, 90, 90, 180), t))$$

最終状態を求めると

$$\begin{aligned} f((90, 90, 180, 90, 90, 180), 0) &= (180, 90, 90, 180, 180, 90, 90, 180) \\ &= (90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180) \quad (\text{最小元で書き換え}) \end{aligned}$$

決定  $t = 1, 2, 3, 4, 5$  に対しても同様に求めると

$$\begin{aligned} f((90, 90, 180, 90, 90, 180), 1) &= (90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270) \\ f((90, 90, 180, 90, 90, 180), 2) &= (90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270) \\ f((90, 90, 180, 90, 90, 180), 3) &= (90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180) \\ f((90, 90, 180, 90, 90, 180), 4) &= (90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270) \\ f((90, 90, 180, 90, 90, 180), 5) &= (90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270) \end{aligned}$$

となる。したがって、最終状態は次の 2 種類となる：

$$(90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180), \quad (90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270)$$

これに対し

$$\begin{aligned} W^2((90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180)) &= K((90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180)) = 0 \\ W^2((90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270)) &= K((90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270)) = 0 \end{aligned}$$

より

$$W^1(f(y_0, 0)) = W^1((90, 90, 180, 90, 90, 180)) = 0 \vee \min(0, 0, 0, 0, 0) = 0$$

$$\pi_1^*((90, 90, 180, 90, 90, 180)) = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

を得る。

さらに  $W^1(f(y_0, 1))$ ,  $W^1(f(y_0, 2))$ ,  $W^1(f(y_0, 3))$  を求めなければならないが

$$\begin{aligned} f(y_0, 1) &= f((90, 90, 90, 90), 1) = (90, 180, 90, 90, 180, 90) \\ f(y_0, 2) &= f((90, 90, 90, 90), 2) = (90, 90, 180, 90, 90, 180) \\ f(y_0, 3) &= f((90, 90, 90, 90), 3) = (180, 90, 90, 180, 90, 90) \end{aligned}$$

より、最小元に置き換えると、いずれも  $(90, 90, 180, 90, 90, 180)$  となり、 $f(y_0, 0)$  に一致する。したがって

$$\begin{aligned} W^0(y_0) &= Q(y_0) \vee \min [W^1(f(y_0, 0)), W^1(f(y_0, 1)), W^1(f(y_0, 2)), W^1(f(y_0, 3))] \\ &= 0 \vee \min [0, 0, 0, 0] = 0 \\ \pi_0^*(y_0) &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

よって、どの決定をとっても（どの接続の仕方でも）最適（凸多面体が構成可能）となり、3つのユニットに基づく展開図は、最終状態として得られた次の 2 通りとなる：

$$(90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180), \quad (90, 90, 180, 90, 180, 90, 90, 270).$$

□

3.2 3角ユニットの場合

状態は正方ユニットの場合と同様で、展開図の各頂点に対応する角の大きさとする。なお、ここでいう頂点も、3角ユニット1個に対応するひし形の頂点で、接続することで重なるものを同一視したものである。ただし、正方形に代わり、正3角形2個が連なるひし形が基本形であるので、展開図の頂点数を  $d$  とするとき、

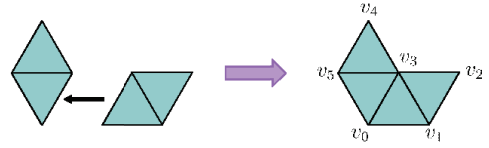


図 5: 3角ユニットの接続 (右手系 ← 右手系)

$$\text{状態空間} : Y = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \mid d = 3, 4, \dots; \alpha_i = 60, 120, 180, 240, 300, 360 \ (i = 0, 1, \dots, d)\}$$

となる。

決定はユニットの種類  $H$  とユニットを接続する辺番号  $t$  からなる  $(H, t)$  であらわす。正方ユニットの場合は、ユニットの種類を考える必要はなかったが、3角ユニットでは右手系ユニットと（その鏡像である）左手系ユニットを組み合わせることで、同じユニット数でも異なる凸多面体を構成できるため、ユニットの種類を決定として与える必要が生じるのである。実際、図5における多角形は正4

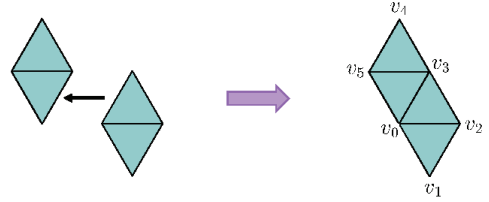


図 6: 3角ユニットの接続 (右手系 ← 左手系)

面体の展開図になりえないが、図6の方は正4面体の展開図となる。すなわち、ユニットの種類  $H$  とは、その期に接続する3角ユニットの種類をあらわすものであり、 $H = R$  のときは右手系ユニットを、 $H = L$  のときは左手系ユニットを接続するものとする。例えば、決定  $(R, 3)$  は右手系ユニットを辺  $e_3$  に接続することをあらわす。以上のことから、決定空間、可能決定集合はそれぞれ

$$\text{決定空間} : V = \{(H, t) \mid H = R, L, t = 0, 1, \dots\}$$

$$\text{可能決定集合} : V((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)) = \{(H, t) \in V \mid t \leq d\} \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in Y$$

となる。なお、初期状態は右手系と左手系のどちらを選択しても、作成可能な展開図の形は本質的に変わらないので、右手系としての  $y_0 = (60, 120, 60, 120)$  とする。また、一般に現状態  $y = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in Y$  と決定  $v = (H, t) \in V(y)$  に対する状態推移法則

$$f((\alpha_1, \dots, \alpha_d), (H, t)) = (\alpha'_0, \dots, \alpha'_{d+2})$$

は、以下のように定める。

まず

$$\beta_1^1 = 60, \beta_2^1 = 120, \beta_3^1 = 60, \beta_4^1 = 120$$

$$\beta_1^2 = 120, \beta_2^2 = 60, \beta_3^2 = 120, \beta_4^2 = 60$$

とおき、「 $H = R, t:$ 偶数」または「 $H = L, t:$ 奇数」のとき  $\tau = 1$ 、「 $H = L, t:$ 偶数」または「 $H = R, t:$ 奇数」のとき  $\tau = 2$  とする。このとき、

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & m - d + 1 < i < m \\ \alpha_i + \beta_1^\tau & i = m \\ \beta_2^\tau & i = m + 1 \\ \beta_3^\tau & i = m + 2 \\ \alpha_{i-2} + \beta_4^\tau & i = (m + 3) \pmod{d + 2} \\ \alpha_{i-2} & m + 4 \leq i \leq d \end{cases}$$

と置く。この後の処理 — 冗長な辺の削除等 — については、正方ユニットの場合と同様とする。  
利得関数  $R$  および終端利得関数  $K$  についても同様に

$$R((\alpha_0, \dots, \alpha_d), (H, t)) = \begin{cases} 1 & (\exists i; \alpha_i > 360) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$K((\alpha_0, \dots, \alpha_d)) = (\text{多角形 } (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \text{ を与えたときの「凸多面体を構成可能な辺の  
接続問題」([2])の最適値})$$

と定める。

以上の置き換えにより、正方ユニットと同様の再帰式 (2),(4) を用いることで、凸多面体が構成可能なすべての展開図が得られる。

## 4 おわりに

ここで得られた再帰式を用いて、計算機 (Core i7-8700, メモリ 32G) により数値計算を実行した。結果を表 1 に示す。これは、ユニット数ごとの“凸多面体が構成可能な展開関数”である。なお、カッコ内の数は、凸多面体が構成可能ではない展開図も含めての展開図総数である。ユニット数が 18 以上の正方ユニットおよびユニット数が 12 以上の 3 角ユニットについては、メモリ不足のため結果が得られなかった。

参考までに、[2] の結果も利用して、実際に構成される凸多面体数を求め、得られた値を表 2 に示す (空欄は、現状で求めることができていないもの)。ここでの凸多面体とは 2 面体 (表と裏のみ) も含むもので、“凸多面体数”列のカッコ内の数は、左が 2 面体の数、右が真の (体積が正の) 凸多面体の数である。また、“辺の組合せ数”列の数は、展開図において凸多面体が構成可能となる辺の組合せの数を表している。一般に、一つの展開図に対して複数の凸多面体が構成可能で、しかも異なる辺の組合せから合同な凸多面体が構成される場合も多数あり、この列の数は、展開関数よりも相当に大きな数となっている。この膨大な“辺の組合せ数”から、“凸多面体数”を求めるのが、[2] における「同型判定問題」である。

## 謝辞

本研究は科研費 15K05004 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] E. D. Demaine and J. O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms*, Cambridge Univ. Press, 2007
- [2] T. Fujita, 折り紙ユニットを用いた凸多面体の構成  
— 相互依存型決定過程によるアプローチ —, 京都大学数理解析研究所講究録 1912, 17-25, 2014.
- [3] T. Fujita: Mutually dependent decision processes models, *Bulletin of the Kyushu Institute of Technology*, **63** (2016), 15-26.
- [4] A. Lubiw and J. O'Rourke, When can a polygon fold to a polytope?, Technical Report 048, Smith College, 1996
- [5] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型, 九州工業大学研究報告 (工学) 47, 87-97, 1983
- [6] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型 II, 九州工業大学研究報告 (工学) 49, 69-76, 1984



ユニット数	正方ユニット		3角ユニット	
1	1	(1)	1	(1)
2	1	(1)	2	(2)
3	2	(2)	9	(9)
4	5	(5)	40	(40)
5	12	(12)	238	(238)
6	35	(35)	1,514	(1519)
7	108	(108)	10,145	(10,343)
8	369	(369)	68,657	(72,809)
9	1,280	(1,297)	458,118	(526,196)
10	4,587	(4,745)	2,964,308	(3,875,956)
11	16,472	(17,699)	18,361,487	(29,013,410)
12	59,323	(67,237)		
13	208,921	(258,552)		
14	729,150	(1,005,171)		
15	2,420,683	(3,942,358)		
16	8,731,578	(15,584,323)		
17	34,026,715	(62,029,713)		

表 1: 計算機による結果

ユニット数	正方ユニット		3角ユニット	
	凸多面体数	辺の組合せ数	凸多面体数	辺の組合せ数
1	1 (1+0)	2	1 (1+0)	2
2	3 (3+0)	5	4 (3+1)	9
3	3 (2+1)	15	7 (5+2)	56
4	8 (6+2)	55	13 (8+5)	306
5	6 (4+2)	148	17 (7+10)	1918
6	13 (7+6)	502	29 (12+17)	10145
7	11 (5+6)	1,539	39 (13+26)	73,166
8	23 (11+12)	5,135	65 ( )	422,058
9	17 (5+12)	15,385	88 ( )	2,353,875
10	31 (13+18)	51,935	134 ( )	12,497,475
11	28 (7+21)	150,673		
12	50 (16+34)	467,775		
13	41 ( )	1,304,070		
14	68 ( )	4,032,905		
15	65 ( )	10,444,301		

表 2: 凸多面体数

- [7] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型 III, 九州工業大学研究報告 (工学) 49, 77-85, 1984
- [8] F. Mimura, Some Stellated Polyhedrons Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences, 32, 3-8, 2009
- [9] F. Mimura, Two Compounds Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences 32, 27-30, 2009
- [10] 三村文武, 岩下有里, ユニットによる星形多面体の構成, 広島経済大学研究論集 34, 23-34, 2011