

# 静電場中でノズルから噴出する 平面ジェット先端部の形状

同志社大学・高機能微粒子研究センター 吉永隆夫

Takao Yoshinaga

Research Center for Highly-Functional Nanoparticles,  
Doshisha Univ.

## 1 まえおき

静電場中での液体ジェットの安定性や崩壊の問題は、電気流体力学 (EHD) の代表的な問題の一つであるだけでなく、微細液滴や薄いポリマーシートの形成など工業、医薬、農業等の分野で重要である [1]。このような問題の解析的な取り扱いはいまだ、ジェットの電気伝導性が非常に良いかもしくは悪い場合について、定常流れや周期攪乱に対して調べられてきた [2, 3]。

最近、Yoshinaga [4] は中間的な電気伝導性の平面ジェットが平行電場中にあるときの線形安定性を調べ、界面に現れる表面電荷分布が表面張力や空力効果による不安定性に重要な影響を及ぼすことを示した。さらに、このような中間的な電気伝導性のジェットに対して、Yoshinaga と Okamoto [5] はスリットノズルから噴出した平面ジェットの先端付近での変形を解析的に調べている。そこでは、ジェットの特徴的な変形がジェットの電気伝導性を示す電気ペクレ数  $Pe$  と外部電場の強さを表す電気オイラー数  $\Lambda$  により大きく影響を受けることが示された。すなわち、 $\Lambda$  が大きいと  $Pe$  が小さくなる (外部電場が強くとジェットの電気伝導性がよくなる) ほどジェット界面に現れる表面電荷はクーロン力により下流方向に引っ張られジェットは薄くなりながら加速する。一方、 $\Lambda$  が小さいと  $Pe$  が大きくなる (外部電場が弱くとジェットの電気伝導性が悪くなる) ほど、先端部が表面張力により丸く膨れながら減速し、下流に行くにつれて厚みを増すことが示された。

しかし、線形安定性解析 [4] から、 $\Lambda$  や  $Pe$  以外にジェット流体と周囲流体の誘電率や電気伝導性もまた周期攪乱の安定性に大きく影響を与えることが示されているので、ノズルから噴出したジェットの変形にも大きな影響があることが予想される。そこで本研究では、平面ジェット先端部の変形に及ぼすジェット流体と周囲流体の誘電率や電気伝導性の影響を調べる。解析は Yoshinaga と Okamoto [5] に従い長波近似の下でジェットの非線形方程式を導出し、ジェット流体と周囲流体の誘電率比や電気伝導率比に注目した解析を行う。さらに、この解析で得られる結果の定性的な理解のために、その軸が一様電場に垂直方向に置かれた液体円柱の変形との関連について述べる。

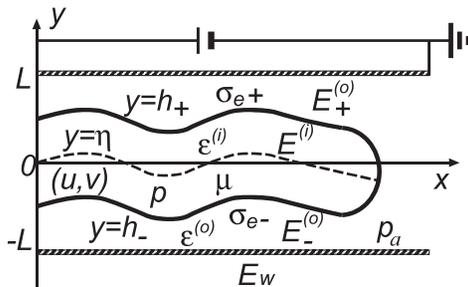


図 1: A two-dimensional planar liquid jet between two parallel sheath walls on which an external electric field is imposed.

## 2 長波近似と非線形発展方程式

図 1 は 2 次元  $x, y$  座標系でノズルから噴出する平面ジェットの様子を示している. 外部電場  $E_w$  は  $y = \pm L$  で平行な 2 枚の平板シースで与えられる. ジェット界面が  $y = \pm h(x, t)$  で与えられ, ジェット内部の流速成分および圧力が  $u(x, y, t), v(x, y, t), p(x, y, t)$  で与えられ, ジェットの密度, 粘性率, 表面張力係数は  $\rho, \mu, \sigma$  である. 一方, ジェット流体と外部流体の誘電率をそれぞれ  $\epsilon^{(j)}, \epsilon^{(o)}$ , 電気伝導率をそれぞれ  $K^{(j)}, K^{(o)}$  とする. 簡単のために, 外部流体の密度や粘性は無視し, 重力の影響は考えないものとする.

このとき, 流体の基礎方程式はジェット部 ( $-h(x, t) < y < h(x, t)$ ) の連続の式と運動方程式である. 一方, 電荷はジェット界面にだけ分布しており (Leaky-dielectric モデル), ジェットの電気伝導性が悪いいため電荷の拡散時間が磁場の拡散時間に比べて十分大きい (EHD 近似) と仮定する. その結果, ジェット流体部 ( $-h(x, t) < y < h(x, t)$ ) および周囲部 ( $-L < y < -h(x, t), h(x, t) < y < L$ ) での電場の連続と渦なしの式が課される. さらに, ジェット界面での電荷の単位時間当たりの増加が界面を通して流入する電流に等しいとする電荷保存の式を課す. 一方, 境界条件としては界面 ( $y = \pm h$ ) での流体の運動学的条件と電場によるクーロン力を含む力学的な条件を課す. さらに, ジェット界面  $y = h(x, t)_{\pm}$  での表面電荷  $\sigma_e(x, t)_{\pm}$  を含む界面での電場の連続の式を課す.

これらの方程式をより簡単な方程式に還元するために,  $V$  を静電ポテンシャルに対して, ジェット内外部でのポテンシャルの分布が  $\Delta V = 0$  で与えられることに注意して, 以下の長波近似を用いる:

$$u(x, y, t) = \sum_{j=0}^n [y - \eta(x, t)]^j u_j(x, t), \quad (1a)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{j=0}^n [y - \eta(x, t)]^j v_j(x, t), \quad (1b)$$

$$p(x, y, t) = \sum_{j=0}^n [y - \eta(x, t)]^j p_j(x, t). \quad (1c)$$

ここで、ジェット中心面  $\eta = (h_+ + h_-)/2$  がジェット厚み  $b = h_+ - h_-$  とともに導入されている。

Yoshinaga と Okamoto [5] に従い基礎方程式にこれらの展開を用いて若干の計算の後、最低次の近似で以下の無次元化したジェットの長波方程式を得る：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} = -b \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{1}{\text{Wb}} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial K_+}{\partial x} + \frac{K_-}{b} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ & + \frac{4}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & + \Lambda \left[ \Sigma_+ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} \left( 1 - \frac{L}{b} \right) + \frac{E_w}{b} \right) - \frac{\Sigma_-}{2\epsilon_P} \frac{\partial \Sigma_-}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \left( \frac{\Sigma_+^2}{4} - \frac{\Sigma_-^2}{4\epsilon_P} \right) \right], \end{aligned} \quad (2c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Wb}} \frac{K_-}{b} + \Lambda \left( -\frac{\Sigma_+}{b} \frac{\partial \eta}{\partial x} E_w - \frac{\eta}{b} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} E_w \right), \quad (2d)$$

$$\frac{\partial \Sigma_+}{\partial t} + u \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} + \Sigma_+ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Pe}} (1 - \epsilon_P \sigma_R) \frac{\partial b}{\partial x} E_w, \quad (2e)$$

$$\frac{\partial \Sigma_-}{\partial t} + u \frac{\partial \Sigma_-}{\partial x} + \Sigma_- \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Pe} \epsilon_P} \left[ 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} (1 - \epsilon_P \sigma_R) E_w + \Sigma_- \right], \quad (2f)$$

ここで、 $\kappa_{\pm}$  は曲率で、 $u, v$  の添え字は省略されており、 $\Sigma_{\pm} = \sigma_{e+} \pm \sigma_{e-}$ 、 $K_{\pm} = \kappa_{+} \pm \kappa_{-}$  である。また、無次元パラメータとしては Weber 数  $\text{Wb}$  (=流体慣性力/表面張力)、Reynolds 数  $\text{Re}$  (=流体慣性力/粘性力)、電気ペクレ数  $\text{Pe}$  (=電荷の拡散時間/流体運動の代表時間)、電気オイラー数  $\Lambda$  (=静電圧/流体慣性力) や誘電率比  $\epsilon_P = \epsilon^{(i)}/\epsilon^{(o)}$  や電気伝導率比  $\sigma_R = K^{(o)}/K^{(i)}$  が導入されている。さらに、対称モード変形 ( $h_+ = -h_-$ ) では、式 (2) で  $\eta = v = 0$ 、 $\Sigma_- = 0$ 、 $K_- = 0$  とおくことにより方程式系が得られるが、以下ではこの対称モード変形についてのみ考える。

### 3 数値計算

数値計算は、 $x = 0$  にあるスリットノズルから以下の初期値-境界値の条件のもとで有限差分法と CIP 法を用いて行った：(i)  $t = 0$  で  $0 \leq x \leq 1$  に対して、 $b(x, 0)/2 = \sqrt{1 - x^2}$ 、 $u(x, 0) = 1$ 、 $\sigma_{e\pm}(x, 0) = \bar{\sigma}_{e0}$ 、

(ii)  $t > 0$  で  $x = 0$  に対して  $b(0, t)/2 = u(0, t) = 1$ 、 $\sigma_{e\pm}(0, t) = \bar{\sigma}_{e0}$ 。

計算は空間刻み幅  $\Delta x = 0.1$ 、時間刻み幅  $\Delta t = 0.00001$  で行い、厚みが  $b = 0.01$  (破断) もしくは  $b/2 = L$  (シース面に接触) で打ち切った。計算におけるパラメータは  $\text{Wb} = \text{Re} = \text{Pe} = 100$ 、 $\Lambda = 0.1$ 、 $E_w = 1$ 、 $\bar{\sigma}_{e0} = 0.1$ 、 $L = 2$  でおこない、 $\epsilon_P$ 、 $\sigma_R$  をコントロールパラメータとした。

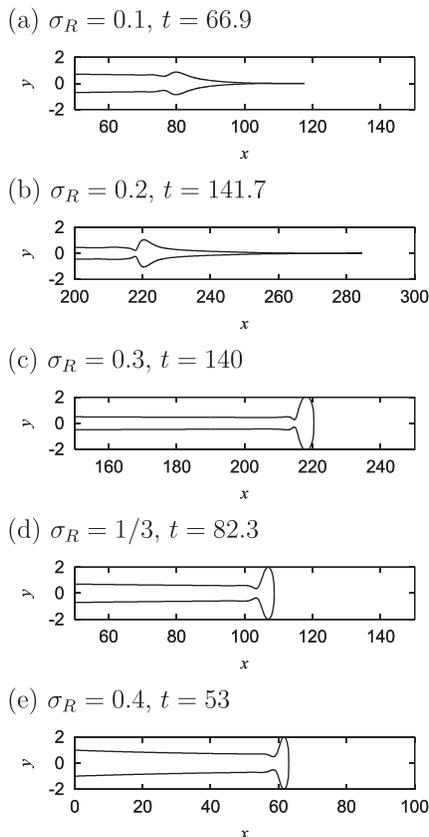


図 2: Breakup profiles of the jet for different  $\sigma_R$  keeping  $\epsilon_P = 3$ , when  $Pe = 100$ ,  $\Lambda = 0.1$  and  $Re = 100$ .

まず、 $\epsilon_P = 3$  として  $\sigma_R$  を変化させた場合の結果を図 2 に示す。 (a), (b) 図よりわかるように、 $\sigma_R = 0.1, 0.2$  ではジェット先端部に向かって薄くなっていくが、 (c) 図  $\sigma_R = 0.3$  では先端部が丸みを帯び、その大きさが時間とともに増加しシース壁に接触する。以後  $\sigma_R$  が増加するにつれて次第により早くシース面に接触する。その結果、 $\sigma_R \sim 0.2$  で先端部形状の特徴が分かれる。

次に、 $\sigma_R = 1/3$  として、 $\epsilon_P$  の変化に対する形状変化を図 3 に示す。図 (a)  $\epsilon_P = 1$  では先端部は薄くなるが、図 (b)  $\epsilon_P = 2$  では先端部に小さな円形領域が形成されその状態が長時間保持される。しかし、図 (c)  $\epsilon_P = 3$  では先端部は厚くなり、以後図 (d), (e) と  $\epsilon_P$  の増加とともにその状態が続く。そのため、 $\epsilon_P \sim 2$  で先端部形状の特徴が分かれる。

$Pe \ll 1$  で  $\epsilon_P \sigma_R = 1$  の条件は、表面電荷  $\sigma_e \simeq 0$  であることを示す [4]。実際、(2e), (2f) 式では  $\sigma_{e\pm} \simeq 0$  では  $\Sigma_{\pm} \simeq 0$  となり、 $\epsilon_P \sigma_R = 1$  を満たす。対称モード ( $\eta \equiv 0$ ) では  $\Sigma_- = 0$  であり、式 (2e) から  $\epsilon_P \sigma_R = 1$  を境にして右辺の符号が変わる。このことから、 $\epsilon_P \sigma_R = 1$

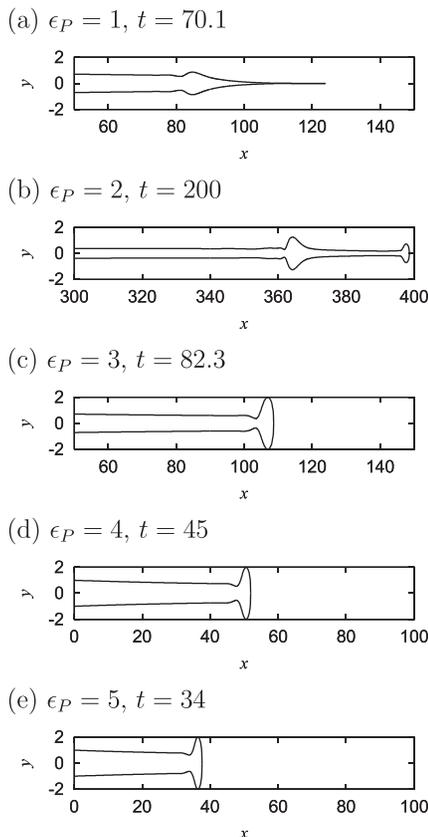


図 3: Breakup profiles of the jet for different  $\epsilon_P$  keeping  $\sigma_R = 1/3$ , when  $Pe = 100$ ,  $\Lambda = 0.1$  and  $Re = 100$ .

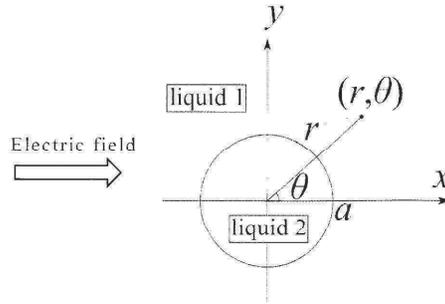


図 4: A liquid column in a uniform electric field

を境に  $\sigma_e$  の分布が変化し先端部形状の特徴も変化することが予想される。しかし上で示した数値解析では、 $\epsilon_P \sigma_R \simeq 0.6$  付近で形状の特徴が変わることが示されている。

#### 4 一様電場中での円柱の変形

前節でみたように、 $\epsilon_P \sigma_R$  の値により二つの異なる特徴の先端部形状がみられることが示された。以下では、一様電場中で液体円柱がその軸を垂直におかれた場合の円柱の変形との関連について調べる。このような解析はすでに Taylor [6] により液体球の変形に対して調べられているため、円柱に対しても同様な手法で解析することができる。

図 4 に示すように、半径  $a$  の円柱を含む任意の点を  $r, \theta$  で表す。以下では外部電場の大きさを  $E$ 、周囲流体部、円柱の電気伝導率を  $\sigma_1, \sigma_2$ 、誘電率を  $\epsilon_1, \epsilon_2$  とする。このとき、円柱内外の流体の電気伝導性が良いと仮定し、境界条件として  $r = a$  で  $V_1 = V_2$  と  $\sigma_1 E_{r1} = \sigma_2 E_{r2}$  を用いると、 $\Delta V_j = 0$  の解は以下ようになる：

$$V_1 = -E \left( r + \frac{1 - R a^2}{1 + R r} \right) \cos \theta, \quad (3a)$$

$$V_2 = -E \left( \frac{2r}{R + 1} \right) \cos \theta. \quad (3b)$$

ただし、 $R = \sigma_2 / \sigma_1$  とする。Maxwell 応力は

$$T = \epsilon (\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{I}), \quad (4)$$

で与えられるので、電場が  $\mathbf{E}_j = -\nabla V_j$  ( $j = 1, 2$ ) であることを考慮すると、円柱表面

( $r = a$ )での応力  $T\mathbf{n}$  の法線成分  $\tau_{rr}$  と接線成分  $\tau_{r\theta}$  は以下で与えられる：

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= \frac{\epsilon_1}{2}(E_{1n}^2 - E_{1t}^2) - \frac{\epsilon_2}{2}(E_{2n}^2 - E_{2t}^2) \\ &= \frac{2E^2}{(R+1)^2}[\epsilon_2 - \epsilon_1 + (\epsilon_1(R^2 + 1) - 2\epsilon_2)\cos^2\theta],\end{aligned}\quad (5a)$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= E_{1t}(\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n}) \\ &= -\frac{4E^2}{(R+1)^2}(\epsilon_1 R - \epsilon_2)\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}\quad (5b)$$

ただし、 $\mathbf{n}$  は界面での外向き単位法線ベクトルである。一方、表面電荷は  $\sigma_e = [\epsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}]_2^1$  より

$$\sigma_e = \frac{2E\cos\theta}{1+R}(\epsilon_1 - \epsilon_2 R),\quad (6)$$

で与えられる。上式より、 $\epsilon_1/\epsilon_2 = R$  すなわち  $\epsilon_P\sigma_R = 1$  の場合  $\sigma_e = 0$  となることを注意しておく。

一方、流体運動は非常に緩やかであるとしてストークス近似が成り立つとする。そのとき運動方程式はストークスの流れ関数  $\psi$  を用いて

$$\begin{aligned}\Delta^2\psi &\equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial r^2\partial\theta^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\theta^2}\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi = 0,\end{aligned}\quad (7)$$

で与えられるので、 $\psi \propto r^n \sin 2\theta$  (Michell solution) と仮定して (7) 式に用いて  $n = -2, 0, 2, 4$  を得る。さらに、流体の  $r = a$  での境界条件： $u_{r1} = u_{r2} = 0$ ,  $u_{\theta 1} = u_{\theta 2}$  を満たすよう係数を決めると

$$\psi_1 = (Aa^3r^{-2} + Ba)\sin 2\theta,\quad (8a)$$

$$\psi_2 = (Ca^{-1}r^2 + Da^{-3}r^4)\sin 2\theta,\quad (8b)$$

となる。一方、圧力は運動方程式  $\nabla p_j = \mu_j \Delta \mathbf{u}_j$ ,  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta)$  より

$$p_1 = -4\mu_1 Aar^{-2}\cos 2\theta,\quad (9a)$$

$$p_2 = -12\mu_2 Aa^{-3}r^2\cos 2\theta,\quad (9b)$$

で与えられる。以上の結果を用いて、界面  $r = a$  での力学的境界条件の法線、接線方向成分は

$$\begin{aligned}&\left[\frac{2E^2}{(R+1)^2}(\epsilon_1(R^2 + 1) - 2\epsilon_2) - 8Aa^{-1}(\mu_1 + \mu_2)\right]\cos^2\theta \\ &+ \frac{2E^2}{(R+1)^2}(\epsilon_2 - \epsilon_1) + 4Aa^{-1}(\mu_1 + \mu_2) = C,\end{aligned}\quad (10a)$$

$$\left[-\frac{2E^2}{(R+1)^2}(\epsilon_1 R - \epsilon_2) - 8Aa^{-1}(\mu_1 + \mu_2)\right]\sin 2\theta = 0.\quad (10b)$$

ここで、 $C$  は表面張力を表す。この力学的境界条件が  $\theta$  によらず成り立つためには  $\cos^2 \theta$ ,  $\sin 2\theta$  の係数が 0 になることが必要である。この結果、 $S = \epsilon_1/\epsilon_2$  とおくと

$$D \equiv SR + S(R^2 + 1) - 3 = 0, \quad (11)$$

を満たすとき円柱は変形しない。さらに詳しい解析によると、図 6 に示すように  $D > 0$  は扁長 (左図)、 $D < 0$  で扁平 (右図) に対応する。本解析において、 $\sigma_R = 1/R$ ,  $\epsilon_P = 1/S$

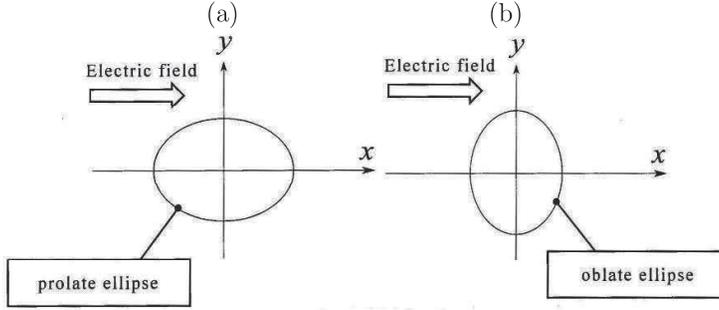


図 5: Two types of deformations of a liquid column.

に対応するので (11) は

$$D^* \equiv \sigma_R^2(1 - 3\epsilon_P) + \sigma_R + 1 = 0, \quad (12)$$

のように書き換えられ、 $D^* > 0$  で扁長、 $D^* < 0$  で扁平に対応する。このとき、液体球の場合と異なり、 $D$  に粘性比  $\mu_1/\mu_2$  が現れないことに注意する必要がある [6]。図 6 に  $(\sigma_R, \epsilon_P)$  平面での扁長 ( $D^* > 0$ )、扁平 ( $D^* < 0$ ) 領域を示す。図よりわかるように、扁長領域は一定  $\epsilon_P$  に対してより小さな  $\sigma_R$  に対して現れる。一方、一定  $\sigma_R$  ではより小さな  $\epsilon_P$  に対して現れる。このことは、図 2, 3 からわかるように先端部が薄くなる  $\epsilon_P$  や  $\sigma_R$  の領域が図 6 における扁長領域 ( $D^* > 0$ ) に対応していることがわかる。

## 5 結論

ノズルから噴出した平面ジェットの先端部形状を、ジェット流体と周囲流体の誘電率比  $\epsilon_P$  や電気伝導率比  $\sigma_R$  をパラメータとして調べた。その結果、 $\epsilon_P \sigma_R$  のある値を境にして形状が変化することがわかった。このような変化は、一様電場中での円柱の変形と類似しており、ジェット先端部の振る舞いが円柱の変形と同様な力学に支配されていると考えられる。

## 謝辞

本研究は科研費 (C:16K06082) の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表する。

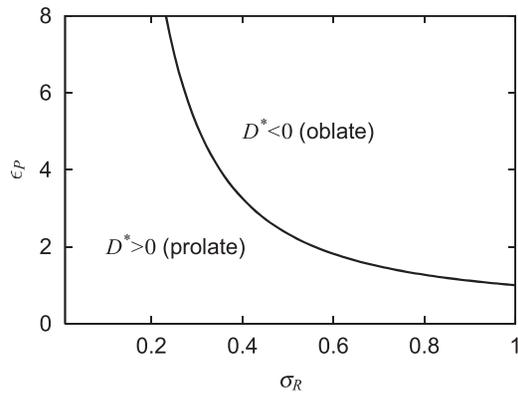


图 6: Regions of the prolate and oblate in  $\sigma_R - \epsilon_P$  space.

## 参考文献

- [1] N. Ashgriz and A. L. Yarin “Capillary instability of free Liquid jets” *Handbook of Atomization and Spray* (Ed. N. Ashgriz, Springer, 2011) pp. 3-54.
- [2] J. Fernandez de la Mora “The fluid dynamics of Taylor cones” *Annu. Rev. Fluid Mech.* 39 (2007) pp. 217-243.
- [3] A. Barrero and I. G. Loscertales “Micro- and nanoparticles via capillary flows” *Annu. Rev. Fluid Mech.* 39 (2007) pp. 89-106.
- [4] T. Yoshinaga “Linear instabilities of a planar liquid sheet in a static electric field for intermediate relaxation and convection of surface charges” *Fluid Dyn. Res.* 50 (2018) 025513.
- [5] T. Yoshinaga and M. Okamoto “Breakup modes of a planar liquid jet in a static electric field” *Fluid Dyn. Res.* 50 (2018) 045510.
- [6] G. I. Taylor “Studies in Electrohydrodynamics. I. The circulation produced in a drop by electric field” *Proc. R. Soc. A Math Phys. Eng. Sci.* 291 (1966) pp. 159-166.