

## 質量を交換する粒子間のポテンシャルについて

富山大学大学院 理工学教育部 山埜井翔吾 (Shogo Yamanoi)

Graduate School of Science and Engineering for Education, University of Toyama

富山大学 工学部 角島 浩 (Hiroshi Kakuhata)

Faculty of Engineering, University of Toyama

### 1 はじめに

ソリトンが粒子のように振る舞い、ソリトン同士の衝突によって軌道が変化し位相シフトが起こることはよく知られている [1]. その挙動から、ソリトンを粒子としてとらえ、原子核や素粒子のモデルとしても用いられている [2]. このような見方にたって、これまでにソリトンを粒子として扱うために、ソリトンの相互作用に類似した相互作用をする二粒子系の振る舞いを調べ、その理論形式が考察されてきた [3, 4, 5]. 外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [6, 7]

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}) \quad (1)$$

のソリトン解は双方向に進行するループソリトンである. ここで,  $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$  はストリングの位置ベクトル,  $\mathbf{J}$  は一定の外部電流ベクトル,  $\tau$  は時間,  $\sigma$  はストリングに沿う弧長に対応するパラメータである.

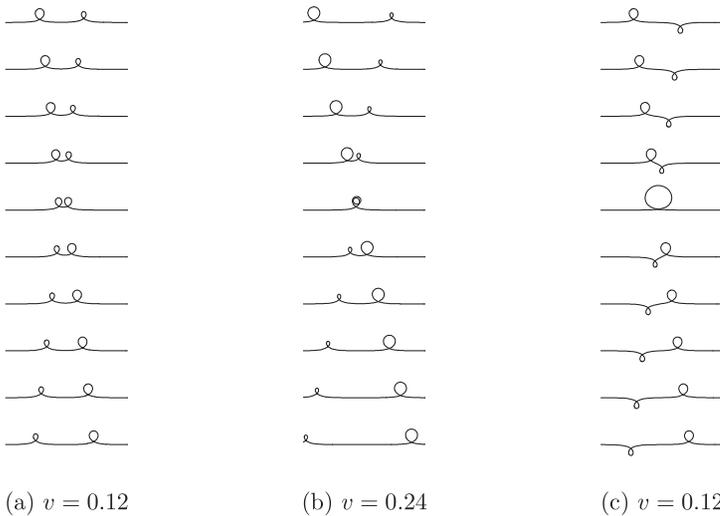


図 1: Two-soliton interaction

$\mathbf{J} = (0, 0, 1)$ ,  $Y = 0$  として,

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z - \partial_\sigma Z)X \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X - \partial_\sigma X)X\end{aligned}$$

であり, 1 ソリトン解は

$$\begin{aligned}X &= A \cos \theta \operatorname{sech} \gamma(\sigma - v\tau) \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \gamma(\sigma - v\tau) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \\ A &= 2\gamma(1 + v)\end{aligned}$$

である. 同じ速さ  $v$  の正面衝突に対する 2 ソリトン解は

$$\begin{aligned}G &= \gamma v[(1 - v) \cosh \gamma(\sigma - v\tau) + (1 + v) \cosh \gamma(\sigma + v\tau)] \\ F &= \cosh 2\gamma v\tau + 1 - v^2 + v^2 \cosh 2\gamma\sigma\end{aligned}$$

として,

$$\begin{aligned}X &= \frac{G}{F}, \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \log F\end{aligned}$$

で与えられる.

このループソリトンを基にした質量が変化する二粒子系のポテンシャルのモデルは二粒子間で主に斥力が働くことを想定して構築されている. しかし, ポテンシャルが引力を持つ場合があることを確認されている [8]. そのため, 本稿では質量変化をする二粒子のポテンシャルが引力を持つ条件を調べつつ, その原因について考察する.

## 2 質量を交換する粒子のモデル

図 1 の相互作用に似た振る舞いをする並進不変な粒子系を構築してきた.

- ・全質量  $M$  は一定であり,
- ・二粒子の質量差  $m$  が相対速度  $\dot{r}$  に比例する拘束条件を持つ
- ・一定質量の二体モデルの解を利用し, ポテンシャルの構成を行った.

この時, 運動方程式は,

$$\begin{aligned}M \frac{d}{dt} \left( \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) &= -\frac{\dot{m}}{2} \left( \dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M} \right) - \frac{dU}{dr} \\ m &= \alpha \dot{r}\end{aligned}$$

となる. ここで全質量  $M$ , 換算質量  $\mu$ , 重心  $Q$ , 相対座標  $r$ , 質量差  $m$  はそれぞれ,

$$\begin{aligned}M &= m_1 + m_2, & \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \\ Q &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, & r &= q_2 - q_1, \\ m &= m(t) = m_2 - m_1\end{aligned}$$

で与えられる.

### 3 ハミルトニアンによるポテンシャルの適用

#### 3.1 モデルの適用

ループソリトンを基にした二粒子系の相対座標に対するハミルトニアンとして  $q_n \rightarrow \sigma_n$ ,  $r \rightarrow \rho$  とすると

$$H = \frac{1}{8} \left[ \left( M + 2 \frac{\alpha P_0}{M} \right) \dot{\rho}^2 - \frac{3\alpha^2}{2M} \dot{\rho}^4 \right] + U(\rho) = \epsilon \quad (2)$$

を得ることができる. ここでは  $Z$  の 2 ソリトン解のみを用いる.

この時, 質量差  $m$  が速度に比例するようにするため,  $\tau \rightarrow -\infty$  で,

$$m_1 = 4\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}, \quad m_2 = 4\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \quad M = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}} = 8\gamma, \quad m_0 = -\frac{8}{\sqrt{1-v^2}} = 4\gamma(-2v)$$

とする. 2 ソリトン解から二つの粒子が衝突する前の近似解は, 十分遠方で,

$$e^{2\gamma\rho} \approx \frac{e^{-4\gamma v\tau} + 4(2-v^2)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}4(1-v^2)(4-v^2)\cos^2\theta_{12}}{v^4[e^{-4\gamma v\tau} + 4\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau} + 4(1-v^2)\cos^2\theta_{12}]} e^{-4\gamma v\tau}$$

であり, 衝突した後の近似解は

$$e^{\mp 2\gamma\rho} \approx \frac{e^{4\gamma v\tau} + 4(2-v^2)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}4(1-v^2)(4-v^2)\cos^2\theta_{12}}{v^4[e^{4\gamma v\tau} + 4\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau} + 4(1-v^2)\cos^2\theta_{12}]} e^{4\gamma v\tau}$$

である. これを相対速度にすると  $\tau \rightarrow -\infty$  で,

$$\dot{\rho} \approx -2v + \frac{4v(1-v^2)\cos\theta_{12}[v^2e^{\gamma\rho} + 2(3-v^2)\cos\theta_{12}]}{v^4e^{2\gamma\rho} + 4v^2(3-v^2)\cos\theta_{12}e^{\gamma\rho} + 4(13-10v^2+v^4)\cos^2\theta_{12}} \quad (3)$$

$\tau \rightarrow \infty$  で,

$$\dot{\rho} \approx -2v + \frac{4v(1-v^2)\cos\theta_{12}[v^2e^{-\gamma\rho} + 2(3-v^2)\cos\theta_{12}]}{v^4e^{-2\gamma\rho} + 4v^2(3-v^2)\cos\theta_{12}e^{-\gamma\rho} + 4(13-10v^2+v^4)\cos^2\theta_{12}} \quad (4)$$

となる. 式 (3), 式 (4) より,  $-\infty < \tau < \infty$  において相対速度  $\dot{\rho}$  は

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -2v + \phi(\rho) \\ \phi(\rho) &= \frac{4(1-v^2)\cos\theta_{12}[v^2\cosh\gamma\rho + (3-v^2)\cos\theta_{12}]}{v[v^2\cosh 2\gamma\rho + 4(3-v^2)\cos\theta_{12}\cosh\gamma\rho]} \end{aligned} \quad (5)$$

である.

ここで,  $P_0$  は

$$P_0 = M\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2}r$$

であり, 初期値によって決まる定数でもあるため,  $\tau \rightarrow -\infty$  の時,

$$P_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P_0 = \frac{m\dot{\rho}}{2}$$

また、 $\alpha$  についても求める。

$m = \alpha\dot{\rho}$  であり、 $\tau \rightarrow -\infty$  にすると、 $m \rightarrow m_0$  となるため、 $m_0 = \alpha\dot{\rho}_0$  である。

初期条件より、 $m_0 = -8\gamma v$  でもあるため、

$$\alpha = 4\gamma$$

である。

よって、式 (2) は、

$$U(\rho) = \epsilon - \gamma(1 + v^2)\dot{\rho}^2 + \frac{3}{8}\gamma\dot{\rho}^4 \quad (6)$$

となる。この時の  $\epsilon$  は十分遠方において  $U(\rho) = 0$  となるようにするため、

$$\epsilon = 2\gamma v^2(2 - v^2) \quad (7)$$

とする。

式 (6) に式 (5)、式 (7) を代入することにより、

$$U(\rho) = 4\gamma v(1 - 2v^2)\phi(\rho) + \gamma(8v^2 - 1)\phi(\rho)^2 - 3\gamma v\phi(\rho)^3 + \frac{3}{8}\gamma\phi(\rho)^4 \quad (8)$$

を得ることができる。これにより、式 (8) は初期速度  $v$  を決めることによって全てのパラメータが一意に定まる式となった。

### 3.2 運動エネルギーについて

相対座標に対応する質量は  $\mu$  であり、相対速度は  $\dot{\rho}$  であるから、運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 \quad (9)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{M^2 - m^2}{4M} \\ \alpha &= 4\gamma \\ M &= 8\gamma \\ m &= \alpha\dot{\rho} \end{aligned}$$

であるため、運動エネルギーは式 (9) に代入することで

$$\gamma\dot{\rho}^2\left(1 - \frac{1}{4}\dot{\rho}^2\right) \quad (10)$$

となる。

ポテンシャルを表す式 (8) と運動エネルギーを表す式 (10) を基に初期速度  $v$  を変えつつ、二つの粒子がどのようにぶつかるかを観察し、考察を行う。

### 3.3 衝突の様子

初期速度  $v$  を変え、二粒子を衝突させた結果が図 2 である。青い線はポテンシャル、赤い線は運動エネルギーを表し、横軸は二粒子間の距離  $\rho$  を表す。距離が近づくとつれ、ポテンシャルは大き

くなり、運動エネルギーは小さくなる。そして、ポテンシャルと運動エネルギーが同じになったときに二つの粒子が弾く結果となる。

また、図 3a, 3b は図 2c, 2d をそれぞれ  $y$  軸が 0 付近で拡大したものである。この拡大図より、

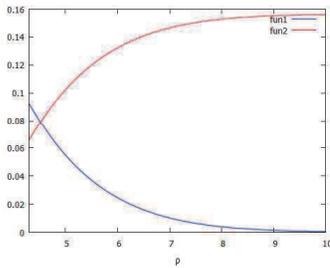
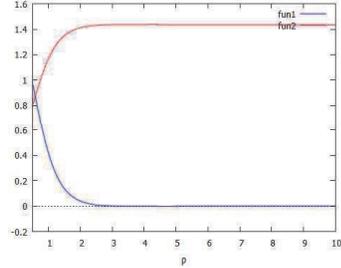
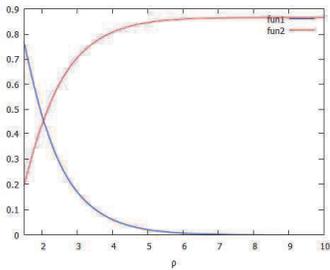
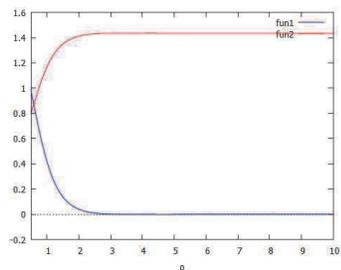
(a)  $v = 0.2$ (c)  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b)  $v = 0.5$ (d)  $v = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.01$ 

図 2: 速度別の衝突

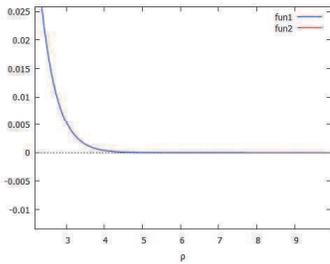
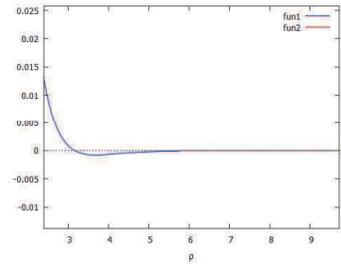
(a)  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b)  $v = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.01$ 

図 3: 拡大図

初期速度  $v$  は  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  よりも大きい場合に負の値になることがある、つまりポテンシャルに引力が発生していることが分かる。

図 4a, 4b は初期速度  $v$  を変えて  $\phi(\rho)$  の各べき乗  $\phi(\rho)^n$  ( $n = 1 \sim 4$ ) をグラフにしたものである。この二つの図より言えることは、 $\phi(\rho)$  のべき乗が増えるほど帯域が狭くなっていることである。逆に言うと、べき乗が少ないほど二つの粒子が近づくときに早く変化が起きるということである。

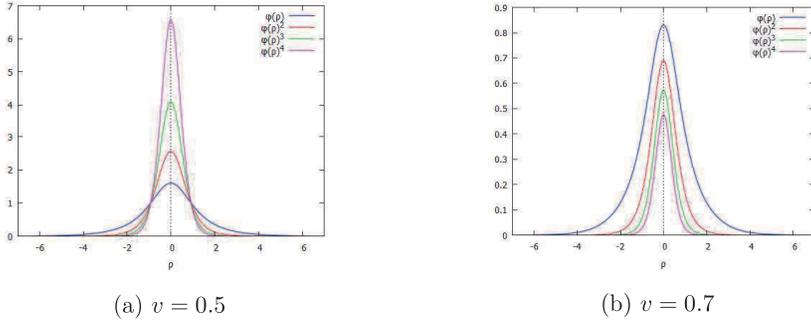


図 4:  $\phi(\rho)$  のべき乗について

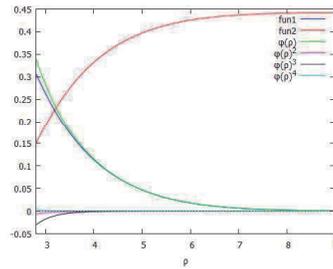


図 5:  $\phi(\rho)^2$  が負

この特性は、初期速度  $v$  の影響を受けていないことが二つの図より読み取れる。このことより、初期速度  $v$  が  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  よりも大きい時、 $\phi(\rho)$  の係数が負の値を取ることににより、ポテンシャルに引力が発生するということが分かる。

また、 $\phi(\rho)^2$  の係数も初期速度  $v$  の値によって正と負の値を取る。図 5 は、 $\phi(\rho)^2$  が負となる場合であり、ポテンシャルと運動エネルギーに加え、 $\phi(\rho)$  のべき乗をそれぞれ分けて表示したものである。この図より、 $\phi(\rho)^2$  の係数が負の時は、 $\phi(\rho)$  の値は正であり、且つ  $\phi(\rho)^2$  の値に比べて十分に大きいいためポテンシャル  $U(\rho)$  全体としての値も正となる。よって、引力が発生することはない。

図 6 より、初期速度  $v$  が一定を超えるとポテンシャルが運動エネルギーよりも大きくなり、通

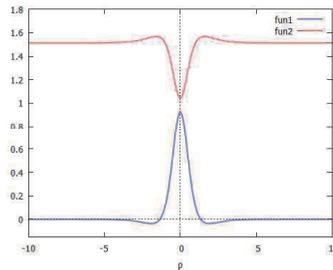


図 6:  $v = 0.77$

過する解となる。

#### 4 跳ね返る解と通過する解の境界

図2より、初期速度  $v$  を上げていくと二つの粒子が弾く距離がだんだんと近くなっていることが確認できる。そして、初期速度が一定以上となると図6のような通過する解となる。そのため、跳ね返る解と通過する解の境界は二つの粒子が弾く距離は  $\rho = 0$  だと考えられる。従って、式(8), (10)に  $\rho = 0$  を代入し、ポテンシャルと運動エネルギーが等しくなるような初期速度  $v$  を見つけてやればよい。

その結果、跳ね返る解と通過する解の境界はおおよそ  $v = 0.763918$  であると判明した。図7はその

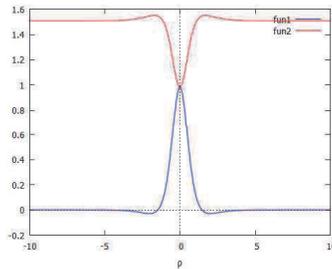


図7:  $v = 0.76391830271$

時の二粒子の衝突の様子であるが、二粒子が弾いた距離が0付近であると確認できる。

#### 5 まとめ

本稿では、二粒子のポテンシャルに引力が発生する条件と跳ね返る解と通過する解の境界を調べた。その結果、ポテンシャルに引力が発生する条件は初期速度  $v$  が  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  よりも大きいかどうかであり、その理由は  $\phi(\rho)$  の係数が負となるためであると判明した。また、跳ね返る解と通過する解の境界は  $v = 0.763918$  であると分かった。

#### 参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur. "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM". SIAM. 1981
- [2] 例えば, V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk, "The Skyrme Model: Fundamentals Methods Applications", Springer-Verlag, 1993
- [3] H. Kakuata and K. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. 68(1999)757.
- [4] H. Kakuata and K. Konno, Theor. Math. Phys65(2002)713.
- [5] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, Optical Solitons, Springer-Verlag, 1993.
- [6] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1701 「波動現象の数理と応用」, p197, 京都大学数理解析研究所, 2010年

- [7] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1761 「非線形波動現象の多様性と普遍性」, p1118, 京都大学数理解析研究所, 2011 年
- [8] 角島浩, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1800 「波動現象の研究の新たな進展」, p120, 京都大学数理解析研究所, 2012 年