Invariant groups of cellular automata

東洋大学　総合情報学部　　佐藤　忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts

Toyo University

１．まえがき

一次元セルオートマトンを大きく分類するとは定数対１写像、全射、非全射の３つのクラスに分類される。本論文では定数対１写像の不変群について論じる。

２．諸定義

一次元セルオートマトンCAとは　$CA =< Z, Q, n, f >$の四組で与えられる。ここでZは整数の集合で各オートマトンが配置されている位置の集合表わす。Qは各オートマトンの状態を表す記号列の有限集合、nは正の整数でスコープ幅と呼ばれる。
局所関数$f : Q^n \to Q$は$Q = \{a_1, \cdots, a_m\}$のときm状態スコープ幅nの局所関数という。
$c : Z \to Q$なる写像cを様相といい各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数fで一斉に変換すると新しい様相c'は

$$c'(i) = f(c(i), c(i+1), \cdots, c(i+|N|-1)) \quad \text{for all } \ i \in Z$$

で与えられる。$c \to c'$なる対応を$f_\infty(c) = c'$と書く。 $C(Q)$ で様相の集合を表すと
シフト写像 $\sigma : C(Q) \to C(Q)$ は $\sigma(c)(i) = c(i+1)$ で定義される。$k \in Z$ に対して、写像
$\sigma^k f_\infty : C(Q) \to C(Q)$ を並列写像という。

写像 $\varphi : C \to C$ がk対１写像であるとは任意の$y \in C$ に対して $\varphi^{-1}(y) \neq \phi$ ならば$|\varphi^{-1}(y)| = k$が成り立つことである。写像$\varphi : C \to C$が定数対１写像であるとは適当な正の整数kが存在してk対１写像になることである。セルオートマトンの並列写像では定数対１写像は全射である。

３．局所関数の行列表示

m状態スコープ幅nの局所関数$f : Q^n \to Q$ からド・ブルーチングラフを次のように作る。グラフのノードの集合は Q^{n-1} とする。ノード $x_1 \cdots, x_{n-1}$ から ノード $x_2 \cdots, x_n$ のエッジに $f(x_1 \cdots, x_n)$ の値を付ける。グラフは有向グラフである。このグラフの状態遷移行列を$A(f)$と書く。この行列のサイズは$m^{n-1} \times m^{n-1}$。モノイドに加法（or）を入れ、加法,乗法に分配の法則を用いてQ^*から記号列上の非可換環$R(Q)$が自然に定義される。$A(f)$は$R(Q)$上の行列である。

定理１　m 状態（$|Q|=m$）、スコープ幅 n の局所関数 $f:Q^n\to Q$ に対して m^{n-1} 状態（$|Q'|=m^{n-1}$），スコープ幅２の局所関数 $g:Q'\times Q'\to Q'$ が存在して $A(g)\cong A(f)^{n-1}$ が成立する。ここで $A(g)\cong A(f)^{n-1}$ とは $\psi:Q^{n-1}\to Q'$ なるコーディング（全単射写像）に対して $A(g)=\psi(A(f)^{n-1})$ かつ $g_\infty=\psi f_\infty\psi^{-1}$ が成り立つとことである。

例１．m 状態スコープ幅２の局所関数 $f(x,y)$ の行列表現 $A(f)$ は

$$A(f)=\begin{pmatrix} f(a_1,a_1) & \cdots & f(a_1,a_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f(a_m,a_1) & \cdots & f(a_m,a_m) \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{m}a_j\mu(a_j)$$

ここで $\mu(a_j)$ は a_j の隣接行列である。

４．局所関数の不変式と不変群

$\{1,2,\cdots,m\}$ 上の置換の集合を S_m とする。$\sigma\in S_m$ に対して m 状態スコープ幅２の局所関数 $f(x,y)$ を作用させる方法はいろいろある。例えば $\sigma*f(a_i,a_j)=f(a_{\sigma i},a_{\sigma j})$ と定義すると $\sigma*f(a_i,a_j)=f(a_i,a_j)$ のとき $\sigma*f=f$ と書き置換 σ に関して不変という。適当な置換に対して不変のとき f は不変式を持つという。
f は置換 σ に関して不変ならば σ によって生成される巡回群の各元に対しても不変でこのとき f はこの群に対して不変であるといいこの群を f の不変群または単に不変群といい $G(f)$ で表す。明らかに２つの不変群によって生成される群も不変群である。

局所関数 $f(x,y)$ が不変式を持つとその行列表現 $A(f)$ も何らかの不変量を持つはずである。

例２．$Q=\{a_1,a_2\}$ 上のスコープ幅２の局所関数 f の行列表現が以下で与えられているとする。$A(f)=\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}=a_1\mu(a_1)+a_2I$　ここで I は単位行列で $\mu(a_1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
｛１,２｝上の置換 $\sigma(1)=2,\sigma(2)=1$ を $\sigma*f(a_i,a_j)=f(a_{\sigma i},a_{\sigma j})$ のように作用させると $A(f)_{11}=A(f)_{22}=a_2$，$A(f)_{12}=A(f)_{21}=a_1$ であるから $\sigma*f=f$ が成立する。
従って f は群 $G(f)=\{\sigma,\sigma^2\}$ の作用に対して不変である。一方 $A(f)$ の不変量は 2×2 の置換行列 P に対して集合 $G(A_f)=\{P\mid PA(f)P^{-1}=A(f)\}=\{P\mid PA(f)P=A(f)\}$ $=\{\mu(a_1),\mu(a_2)\}$ は隣接行列の群と一致する。また $G(A_f)$ は $G(f)=\{\sigma,\sigma^2\}$ とも同型である。並列写像 f_∞ は２対１写像である。

例３．$Q=\{a_1,a_2,a_3\}$ 上のスコープ幅２の局所関数 f の行列表現が次のように与えられているとする。$A(f)=\begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}=a_1\mu(a_1)+a_2\mu(a_2)+a_3I$

ここで$\mu(a_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\mu(a_2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, ｛１，２，３｝上の置換$\sigma(1)=2,\sigma(2)=3,$
$\sigma(3)=1$をfに $\sigma*f(a_i,a_j)=f(a_{\sigma i},a_{\sigma j})$ のように作用させると$\sigma*f=f$ が成立。
従って$f(a_i,a_j)$は群$G(f)=\{\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$の作用に対して不変である。一方$A(f)$を不変にする置換行列$P$の集合$G(A_f)=\{P\mid PA(f)P^{-1}=A(f)\}=\{\mu(a_1),\mu(a_2),\mu(a_3)\}$
は隣接行列の群であり、$G(f)=\{\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$と同型である。並列写像$f_\infty$は３対１写像である。また、$A(f)$が以下で与えられていると

$$A(f)=\begin{pmatrix}a_3&a_1&a_2\\a_1&a_2&a_3\\a_2&a_3&a_1\end{pmatrix}=a_1\mu(a_1)+a_2\mu(a_2)+a_3I$$

｛１，２，３｝上の置換$\sigma(1)=2,\sigma(2)=3,\sigma(3)=1$を$f$に $\sigma*f(a_i,a_j)=f(a_{\sigma i}a_{\sigma^2 j})$ のように作用させると$\sigma*f=f$ なのでfは群$G(f)=\{\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$の作用に対して不変である。
一方、$A(f)$を不変にする置換行列集合$G(A_f)$は$G(A_f)=\{P\mid PA(f)P=A(f)\}$

$$=\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

であり、$G(A_f)$は隣接行列の群の真部分群である。$G(A_f)$と$G(f)=\{\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$は同型である。並列写像$f_\infty$は３対１写像である。

５．セルオートマトンの直和と不変群
２つの１次元セルオートマトン$CA_1=<Z,Q_1,n_1,f_1>$と$CA_2=<Z,Q_2,n_2,f_2>$の直和は以下のように与えられる。$CA_1\oplus CA_2=<Z,Q_1\times Q_2,(n_1,n_2),f_1\oplus f_2>$
その状態遷移行列は$A(f_1\oplus f_2)=A(f_1)\otimes A(f_2)$で与えられる。ここで右辺はテンソル積である［２］。
性質１．$(f_1)_\infty$をk_1対１写像, $(f_2)_\infty$をk_2対１写像とすると$(f_1\oplus f_2)_\infty$は$k_1 k_2$対１写像である
性質２．$G(f_1\oplus f_2)=G(f_1)\times G(f_2)$

例４．$Q=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$上のスコープ幅２の局所関数fの行列表現が以下のように与えられているとする。

$$A(f)=\begin{pmatrix}a_4&a_1&a_2&a_3\\a_1&a_4&a_3&a_2\\a_2&a_3&a_4&a_1\\a_3&a_2&a_1&a_4\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{4}a_i\mu(a_i)$$

{１，２，３，４} 上の２つの置換σとτを$f(a_i,a_j)$ に次のように作用させる。

$$\sigma * f(a_i,a_j) = f(a_{\sigma i},a_{\sigma j}),\quad \tau * f(a_i,a_j) = f(a_{\tau i},a_{\tau j})$$

ただし、$\sigma(1)=2,\sigma(2)=1,\sigma(3)=4,\sigma(4)=3$， $\tau(1)=3,\tau(2)=4,\tau(3)=1,\tau(4)=2$
$\sigma * f = f$ かつ$\tau * f = f$が成立するので $(\tau\sigma) * f = f,(\sigma\tau) * f = f$。
従ってfは群$G(f)=\{\sigma,\tau,\sigma\tau,\sigma^2\}$の作用に対して不変である。一方$A(f)$を不変にする置換行列の集合$G(A_f) = \{P \mid PA(f)P^{-1} = A(f)\}$

$$=\{\mu(a_1),\mu(a_2),\mu(a_3),\mu(a_4)\}$$

は群をなし、隣接行列の群と同じで不変群$G(f)=\{\sigma,\tau,\sigma\tau,\sigma^2\}$と同型である。$G(f)$はクラインの４元群であるから位数の巡回群の直積である。
従って並列写像f_∞は２つの２対１写像の直和なので４対１写像になる。

例５． $Q=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$上のスコープ幅２の局所関数fの行列表現が以下のように与えられているとする。

$$A(f)=\begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{4} a_i\mu(a_i)$$

{1, 2, 3, 4} 上の置換$\sigma(1)=2,\sigma(2)=3,\sigma(3)=4,\sigma(4)=1$を$f$に$\sigma*f(a_i,a_j)=f(a_{\sigma i},a_{\sigma j})$のように作用させる。$\sigma * f = f$より$G(f)=\{\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\}$で$G(f)$は位数４の巡回群である。一方、$A(f)$を不変にする置換行列$P$の集合$G(A_f)=\{P \mid PA(f)P^{-1}=A(f)\}$ $=\{\mu(a_1),\mu(a_2),\mu(a_3),\mu(a_4)\}$は隣接行列の群で不変群$G(f)$と同型である。
並列写像f_∞は４対１写像であるが２対１写像の直和に分解されない。

例６. $Q=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$上の局所関数fの行列表現が以下のように与えられているとする。

$$A(f)=\begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_3 & a_2 \\ a_1 & a_4 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{4} a_i\mu(a_i)$$

{１，２，３，４} 上の２つの置換σとτをf に$(\sigma,\tau)*f(a_i,a_j)=f(a_{\sigma i},a_{\tau j})$のように作用させる。ただし、$\sigma(1)=3,\sigma(2)=4,\sigma(3)=1,\sigma(4)=2$， $\tau(1)=4,\tau(2)=3,\tau(3)=2,\tau(4)=1$
$(\sigma,\tau) * f = f$，$(\tau,\sigma) * f = f$であるから、$(\sigma\tau,\tau\sigma) * f = f$が成立する。$f$の不変群は$G(f)=\{(\sigma,\tau),(\tau,\sigma),(\sigma\tau,\tau\sigma),(\sigma^2,\tau^2)\}$である。一方、$P,Q$ を置換行列とするとき$A(f)$を不変にする左不変群$G_\ell(A_f)=\{P|^{\exists}Q, PA(f)Q=A(f),\}$

$$=\left\{ I,\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

同様に$A(f)$を不変にする右不変群$G_r(A_f)=\{Q|^{\exists}P, PA(f)Q=A(f)\}$

$$=\left\{ I,\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

はそれぞれ群となり、この例では左不変群$G_\ell(A_f)$と右不変群$G_r(A_f)$は一致し$G(f)$と同型である。また、この不変群は隣接行列の集合$\{\mu(a_i)\,|\,1\le i\le m\}$によって生成される群の真部分群である。並列写像$f_\infty$は４対１写像である。

注意１．左不変群と右不変群が一致しない場合（但し，同型にはなっている）もある。

不変群を表でまとめると表１のようになる。

状態数	不変群のタイプ
m＝2	$G(A_f)=\{P\,\|\,PA(f)P^{-1}=A(f)\}$
m＝3	$G(A_f)=\{P\,\|\,PA(f)P=A(f)\}$
m＝4	$G(A_f)=\{P\,\|\,PA(f)P^{-1}=A(f)\}$ $G(A_f)=\{P\,\|\,PA(f)P=A(f)\}$ $G_\ell(A_f)=\{P\|^{\exists}Q, PA(f)Q=A(f)\}$ $G_r(A_f)=\{Q\|^{\exists}P, PA(f)Q=A(f)\}$

表１．置換行列による$A(f)$の不変群

６．定数対１並列写像と同値関係

文献［１］においてHedlundは並列写像が定数対１写像になるための必要十分条件を与えている。異なる$c,c'\in C(Q)$と正の整数kに対して cとc' がtotally k-separatedであるとは$^{\forall}i\in Z$に対して $c_ic_{i+1}\cdots c_{i+k-1}\ne c'_i\,c'_{i+1}\cdots c'_{i+k-1}$ が成立する事である。

定理２［１］．スコープ幅nの局所関数fによる並列写像f_∞が定数対１写像になるための必要十分条件は$^{\forall}c\in C(Q)$に対して$f_\infty{}^{-1}(c)$ に属する任意の２つの様相は totally (n-1)-separated である。

定数対１写像は全射であるので定理２よりQ^{n-1}に次のような同値関係を導入する。
f_∞を定数対１写像とする。$a_1a_2\cdots a_{n-1}＝b_1b_2\cdots b_{n-1}$のとき$a_1a_2\cdots a_{n-1}\sim b_1b_2\cdots b_{n-1}$とする。
$a_1a_2\cdots a_{n-1}\ne b_1b_2\cdots b_{n-1}$のとき
$a_1a_2\cdots a_{n-1}\sim b_1b_2\cdots b_{n-1}\Leftrightarrow Q$上の任意のワード$y_1\cdots y_\ell$に対して異なるワード
$a_1\cdots a_{\ell+n-1}$ と$b_1\cdots b_{\ell+n-1}$ に対して $y_j=f(a_j\cdots a_{j+n-1})=f(b_j\cdots b_{j+n-1})\quad(1\le j\le \ell)$
明らかにこの関係は同値関係である。従って集合Q^{n-1}を同値類に分類できる。
故に、k 対１写像ならば $k\times|\,Q^{n-1}/\sim\,|=m^{n-1}$ が成り立つ。
このことから次の定理が成り立つ。

定理３． $Q=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 上のスコープ幅スコープ幅 n の局所関数 $f:Q^n\to Q$ による並列写像が定数対１写像ならば定数は m の約数である。

７．参考文献

［1］G. A. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of shift dynamical systems. Mathematical systems Theory 3 (1969), 320-375.

［2］佐藤, 「セルオートマトンの直和とテンソル積」電子情報通信学会ソサエティ大会, 回路とシステム, A-1-9,　2016 年 9 月