一意半単一化と正則単一化の比較*

Comparison of Uniform Semi-Unification and Rational Unification

島根大学 総合理工学部 岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University
e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

概 要

本論文では，有限項に対する一意半単一化アルゴリズムと正則項に対する単一化アルゴリズムを比較する．等式集合が有限項に対して半単一化可能であるならば，正則項に対する単一化問題として単一化可能であることを示す．さらに，この逆は成立しないことを反例を与えて示す．

1 はじめに

有限項に対する一意半単一化アルゴリズムは有限項に対する単一化アルゴリズムを拡張したものである [1, 7, 8]．また，正則項に対する単一化 (正則単一化) アルゴリズムは有限項に対する単一化アルゴリズムを拡張したものである [4, 6]．しかしながら，これまでに有限項に対する一意半単一化アルゴリズムと正則項に対する単一化アルゴリズムを比較し，その関連性を明らかにした研究はない．

本論文では，等式集合が有限項に対して半単一化可能であるならば，正則項に対する単一化問題として単一化可能であることを示す．さらに，この逆は成立しないことを反例を与えて示す．

詳しい定義は文献 [1, 4, 6, 5] を参照して頂きたい．有限項に対する単一化については，文献 [2, 3] を参照して頂きたい．

2 有限項に対する一意半単一化

本節では，文献 [1] に基づき有限項に対する一意半単一化，特に記号的半単一化について述べる．一意半単一化の概念は有限項に対してのみ定義されている．

不等式を $s \leqslant t$ と表す．ここでは，s, t を有限項とする．不等式の集合を $E = \{s_1 \leqslant t_1, \ldots, s_n \leqslant t_n\}$ とする．このとき，有限代入 τ, ρ が存在し任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $\rho(\tau(s_i)) = \tau(t_i)$ が成り立つとき，E は**半単一化可能である**という．このとき，有限代入 τ を E の**半単一化子**といい，有限代入 ρ を半単一化子 τ の**剰余代入**という．**一意半単一化問題**とは与えられた不等式の集合に対して半単一化子が存在するかを判定する問題である．

*This paper is an extended abstract and the detailed version will be published elsewhere.

定義 1 (記号 ∇，∇-変数，∇-項，演算子 ∇ [1])

1. $\mathcal{F}$ に含まれない 1 引数の特別な関数記号 ∇ を使用する．
2. 下記の通り **∇-項**を定義する：(i) $x \in \mathcal{V}$ かつ $i \geq 0$ のとき，$\nabla^i(x)$ は ∇-項であり，$\nabla^i(x)$ は $\overbrace{\nabla(\ldots\nabla}^{i\,回}(x)\ldots)$ の略記である，(ii) 任意の $f \in \mathcal{F}_n$ と ∇-項 $t_1, \ldots, t_n$ に対して $f(t_1, \ldots, t_n)$ は ∇-項である．∇-項上の等式を **∇-等式**とよぶ．
3. $\nabla^i(x)$ の形式の ∇-項を **∇-変数**とよぶ．$\nabla^i(x)$ を x^i と略記する．したがって，$x^0 = x, \nabla(x^i) = x^{i+1}$，かつ，任意の $j \leq i$ に対して $x^j \trianglelefteq x^i$．∇-変数と ∇-項の集合をそれぞれ $\mathcal{V}^*$ と $T_{fin}(\mathcal{F}, \mathcal{V}^*)$ により表す．
4. ∇-項上の 1 **引数演算子** ∇ を帰納的に定義する：
$\nabla(x^i) = x^{i+1}, \nabla(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\nabla(t_1), \ldots, \nabla(t_n))$．

定義 2 (∇-代入 [1])

1. 次の条件を満たす部分写像 $\sigma : \mathcal{V}^* \to T_{fin}(\mathcal{F}, \mathcal{V}^*)$ を **∇-代入**とする：(i) 定義域 $dom(\sigma)$ が有限である，(ii) 任意の $x \in \mathcal{V}$ に対して高々1 つの i が存在して $x^i \in dom(\sigma)$ を満たす，(iii) 任意の $x^i, y^i \in dom(\sigma)$ に対して，$y^j \not\trianglelefteq \sigma(x^i)$．
2. ∇-代入の ∇-項 t に対する適用 $\sigma(t)$ を下記の通り帰納的に定義する：(i) 任意の $i \leq j$ について $y^i \notin dom(\sigma)$ のとき $\sigma(y^j) = y^j$，(ii) ある $i \leq j$ について $y^i \in dom(\sigma)$ のとき $\sigma(y^j) = \nabla^{j-i}(\sigma(y^i))$，(iii) $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$．
3. ∇-代入の ∇-項 t に対する多数回の適用 $\sigma^*(t)$ を下記の通り帰納的に定義する：(i) 任意の $x^i \in dom(\sigma)$ について $x^i \not\trianglelefteq t$ のとき $\sigma^*(t) = t$，(ii) それ以外のとき，$\sigma^*(t) = \sigma^*(\sigma(t))$．

定義 3 (記号的半単一化 [1]) ∇-等式の集合 E に対して，$\sigma^*(s) = \sigma^*(t)$ を満たす ∇-代入 σ を E の**半単一化子**であるという．E が半単一化子をもつとき，E は**半単一化可能である**という．**記号的半単一化問題**とは与えられた ∇-等式の集合に対して半単一化子が存在するか判定する問題である．

3 有限項に対する一意半単一化と正則項に対する単一化の比較

本節では，有限項に対する一意半単一化アルゴリズムと正則項に対する無限項上の単一化アルゴリズムを定義する推論規則をそれぞれ与える．また，推論規則による等式集合の変形過程を具体例を用いて示す．

定義 4 (有限項に対する一意半単一化の推論規則 [1]) P を ∇-等式の集合とする．以下では，記号 $\uplus$ は互いに素な集合の和をとる演算を表す．また，$\perp$ は解をもたないことを表す記号とする．

1. Decompose：$f \in \mathcal{F}_n$ のとき，$\{f(s_1, \ldots, s_n) \approx f(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P \Longrightarrow \{s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n\} \cup P$，
2. Reduce：$x^i \gtrdot t$ のとき，$\{x^i \approx t, C[x^i] \approx u\} \uplus P \Longrightarrow \{x^i \approx t, C[t] \approx u\} \cup P$，
3. Orient：$x^i \in \mathcal{V}^*$ かつ $t \notin \mathcal{V}^*$ のとき，$\{t \approx x^i\} \uplus P \Longrightarrow \{x^i \approx t\} \cup P$，
4. Delete：$\{x^i \approx x^i\} \uplus P \Longrightarrow P$，

5. Clash：$f \neq g$ かつ $f, g \in \mathcal{F}$ のとき，$\{f(s_1, \ldots, s_m) \approx g(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P \Longrightarrow \perp$，

6. Check：$t \notin \mathcal{V}^*$ かつ $x^i \trianglelefteq t$ のとき，$\{x^i \approx t\} \cup P \Longrightarrow \perp$，

定義 5 (正則項 [4]) 項 t が**正則**であるとは，t の部分項集合が有限であるときをいう．

命題 6 (正則項に対する単一化 [4]) 正則項に対する無限項上の単一化は決定可能であり，単一化可能であるときに最汎単一化子を求めるアルゴリズムが存在する．また，最汎単一化子は正則代入となる． □

等式を $s \approx t$ と表す．ここでは s, t は有限項とする．等式集合を $E = \{s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n\}$ とする．このとき，正則代入 σ が存在し任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $\sigma(s_i) = \sigma(t_i)$ が成り立つとき，E は**無限項上で単一化可能である**という．このとき，正則代入 σ を**単一化子**という．**単一化問題**とは与えられた等式集合に対して単一化子が存在するか判定する問題である．

定義 7 (正則項に対する無限項上の単一化の推論規則 [6]) P を等式集合とする．以下では，記号 $\uplus$ は互いに素な集合の和をとる演算を表す．また，$\perp$ は解をもたないことを表す記号とする．

1. Delete : $\{s \approx s\} \uplus P \rightsquigarrow P$，
2. Decompose : $f \in \mathcal{F}_n$ のとき，$\{f(s_1, \ldots, s_n) \approx f(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P \rightsquigarrow \{s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n\} \cup P$，
3. Orient : $s \notin \mathcal{V}$ のとき，$\{s \approx x\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx s\} \cup P$，
4. Coalesce : $x \in \mathcal{V}(P)$ かつ $x \neq y$ のとき，$\{x \approx y\} \uplus P \rightsquigarrow \{x := y\}(P) \cup \{x \approx y\}$，
5. Merge : $s, t \notin \mathcal{V}$ かつ $|s| \leq |t|$ のとき，$\{x \approx s, x \approx t\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx s, s \approx t\} \cup P$，
6. Clash : $f, g \in \mathcal{F}$ かつ $f \neq g$ のとき，$\{f(s_1, \ldots, s_m) \approx g(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P \rightsquigarrow \perp$．

E を等式集合とする．このとき，$\nabla(E) = \{\nabla(s) \approx t \mid s \approx t \in E\}$ とする．

例 8 ([7]) 文献 [7] において，この例は有限項に対する一意半単一化で失敗することが示されている．実際，文献 [1] で与えられている一意半単一化の推論規則を用いても下記の通り失敗する．

$$\begin{array}{ll}
\nabla(E) = & \{\nabla(\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(y))) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)))\} \\
= & \{\mathsf{f}(\mathsf{h}(y^1), \mathsf{h}(y^1)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)))\} \\
\Longrightarrow_{\mathsf{Dec}} & \{\mathsf{h}(y^1) \approx \mathsf{h}(y), \mathsf{h}(y^1) \approx \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))\} \\
\Longrightarrow^*_{\mathsf{Dec}} & \{y^1 \approx y, y^1 \approx \mathsf{h}(y)\} \\
\Longrightarrow_{\mathsf{Red}} & \{y^1 \approx y, y \approx \mathsf{h}(y)\} \\
\Longrightarrow_{\mathsf{Check}} & \perp
\end{array}$$

次に，等式集合 E が正則項に対する無限項上の単一化で成功することを示す．

$$\begin{array}{ll}
E = & \{\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(y)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)))\} \\
\rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{\mathsf{h}(y) \approx \mathsf{h}(y), \mathsf{h}(y) \approx \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))\} \\
\rightsquigarrow_{\mathsf{Del}} & \{\mathsf{h}(y) \approx \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))\} \\
\rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{y \approx \mathsf{h}(y)\} = \gamma \in NF(\rightsquigarrow)
\end{array}$$

このとき，$\gamma^\star = \{y := \mathsf{h}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(\ldots)))\}$ である．$\gamma^\star(\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(y))) = \mathsf{f}(\mathsf{h}^\omega, \mathsf{h}^\omega) = \gamma^\star(\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))))$ より，正則代入 $\gamma^\star$ は E の単一化子である．したがって，E は正則項上に対する無限項上の単一化で成功する．E は出現検査により，有限項に対する単一化で失敗する．

以降では，等式集合は有限項 s, t に対する等式 $s \approx t$ のみを含むとする．すなわち，無限項が等式に現れることはない．また，有限項を単に項と表す．

定義 9 (等号) 等式集合 E に対して，E により生成される**等号** $\approx_E$ を次の条件を満たす最小の同値関係とする : (i) 任意の $s \approx t \in E$ に対して，$s \approx_E t$，(ii) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，$f(s_1, \ldots, s_n) \approx_E f(t_1, \ldots, t_n)$ と任意の $1 \leq i \leq n$ について $s_i \approx_E t_i$ は同値である．

定義 10 (矛盾性) 等式集合 E が次の条件を満たすとき**矛盾**であるという : $f \neq g$ かつ $f, g \in \mathcal{F}$ のとき，$f(s_1, \ldots, s_m) \approx_E g(t_1, \ldots, t_n)$．さらに，$E$ が矛盾でないとき，**無矛盾**であるという．

補題 11 等式集合 E が無限項上で単一化可能であると仮定し，σ を E の単一化子とする．このとき，任意の有限項 s, t に対して，$s \approx_E t$ ならば $\sigma(s) = \sigma(t)$ が成り立つ． □

補題 12 等式集合 E に対して，$E \rightsquigarrow^* E' \neq \bot$ とする．このとき，$\approx_E = \approx_{E'}$ が成り立つ． □

補題 13 (無矛盾性と単一化可能性) 等式集合 E が無矛盾であることと E が無限項上で単一化可能であることは同値である． □

定義 14 (∇-等号 [1]) ∇-等式の集合 P に対して，P により生成される **∇-等号** $\equiv_P$ を次の条件を満たす最小の同値関係とする : (i) 任意の $s \approx t \in P$ に対して，$s \equiv_P t$，(ii) $s \equiv_P t$ のとき，$\nabla(s) \equiv_P \nabla(t)$，(iii) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，$f(s_1, \ldots, s_n) \equiv_P f(t_1, \ldots, t_n)$ と任意の $1 \leq i \leq n$ について $s_i \equiv_P t_i$ は同値である．

定義 15 (∇-矛盾性 [1]) ∇-等式の集合 P が次の条件を満たすとき **∇-矛盾**であるという : (i) $x^i \trianglelefteq s$ かつ $s \notin \mathcal{V}^*$ のとき $x^i \equiv_P s$，または，(ii) $f \neq g$ かつ $f, g \in \mathcal{F}$ のとき，$f(s_1, \ldots, s_m) \equiv_P g(t_1, \ldots, t_n)$．さらに，$P$ が ∇-矛盾でないとき，**∇-無矛盾**であるという．

命題 16 (∇-無矛盾性と半単一化可能性 [1]) 等式集合 $E = \{s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n\}$ に対して，次の 3 つは同値である : (i) $\nabla(E) = \{\nabla(s_1) \approx t_1, \ldots, \nabla(s_n) \approx t_n\}$ は半単一化可能である，(ii) $\{s_1 \leqslant t_1, \ldots, s_n \leqslant t_n\}$ は半単一化可能である，(iii) $\nabla(E)$ は ∇-無矛盾である． □

以下では，項 s または ∇-項 s に対して，$\overbrace{\nabla(\ldots\nabla}^{i\,回}(s)\ldots)$ を s^i と表す．

定義 17 ∇-項から ∇-記号を取り除いた項を求める関数 φ を下記の通り定義する : (1) 任意の $x \in \mathcal{V}$ と $i \geq 0$ に対して，$\varphi(\nabla^i(x)) = x$，(2) 任意の $f \in \mathcal{F}_n$ と ∇-項 $t_1, \ldots, t_n$ に対して，$\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n))$．

補題 18 等式集合を E とする．項 s, t を $\mathcal{V}(C_s) = \mathcal{V}(C_t) = \emptyset$ なる文脈 $C_s, C_t \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\})$ を用いて，$s = C_s[x_1, \ldots, x_n], t = C_t[y_1, \ldots, y_m]$ と表す．このとき，$s \approx_E t$ ならば，ある $k, l \geq 0$ が存在して，$C_s = \varphi(C'_s)$ かつ $C_t = \varphi(C'_t)$ を満たすある ∇-文脈 $C'_s, C'_t \in T(\mathcal{F} \cup \{\nabla, \square\})$ に対して $C'_s[x_1^k, \ldots, x_n^k] \equiv_{\nabla(E)} C'_t[y_1^l, \ldots, y_m^l]$ が成り立つ．いま $s' = C'_s[x_1, \ldots, x_n], t' = C'_t[y_1, \ldots, y_m]$ とする．このとき，${s'}^k \equiv_{\nabla(E)} {t'}^l$ が成り立つ． □

定理 19 等式集合 E に対して，$\nabla(E)$ が有限項に対して半単一化可能であるとき E は正則項に対する無限項上の単一化問題として単一化可能である． □

次に，等式集合 E が正則項に対する無限項上の単一化問題として単一化可能であるが，$\nabla(E)$ が有限項に対する半単一化問題として失敗する例を示す．すなわち，定理 19 の逆は成立しない．

例 20 (反例 [8]) 例 8 の $E = \{\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(y)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)))\}$ のときを考える．このとき，E は正則項に対する無限項上の単一化問題として単一化可能である．しかしながら，$\nabla(E)$ は有限項に対する半単一化問題として失敗する．なぜならば，Check 規則により出現検査で失敗する．

4　むすび

本論文では，有限項に対する一意半単一化アルゴリズムと正則項に対する単一化アルゴリズムを比較した．等式集合が有限項に対して半単一化可能であるならば，正則項に対する単一化問題として単一化可能であることを示した．さらに，この逆は成立しないことを反例を与えて示した．

謝辞

本研究の一部は京都大学数理解析研究所の補助で行われた．

参考文献

[1] Aoto, T. and Iwami, M. : Termination of rule-based calculi for uniform semi-unification, *Proceedings of the 7th International Conference on Language and Automata Theory and Applications*, LNCS, Vol. 7810, Springer-Verlag, 2013, pp. 56–67.

[2] Baader, F. and Nipkow, T. : *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[3] Baader, F. and Snyder, W. : Unification theory, Handbook of Automated Reasoning, Volume I, Robinson, A. and Voronkov, A. (eds.), Elsevier, 2001, pp. 445–533.

[4] Courcelle, B. : Fundamental properties of infinite trees, *Theoretical Computer Science*, Vol. 25, No. 2 (1983), pp. 95–169.

[5] 岩見宗弘，青戸等人：無限項書き換えシステムにおける強頭部正規化可能性および一般生成性の自動反証，コンピュータソフトウェア，Vol. 29，No. 1 (2012)，pp. 211–239.

[6] 岩見宗弘：正則項上の単一化について，コンピュータソフトウェア, Vol. 35, No. 4 (2018), pp. 151-163.

[7] Kapur, D., Musser, D., Narendran, P. and Stillman, J. : Semi-unification, *Theoretical Computer Science*, Vol. 81, No. 2 (1991), pp. 169–187.

[8] Oliart, A. and Snyder, W. :Fast algorithms for uniform semi-unification, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 37, No. 4 (2004), pp. 455–484.