非正整数インデックスに対する多変数荒川-金子ゼータ関数の解析接続とその非正整数点における特殊値について

東北大学大学院理学研究科数学専攻　伊東 邦大 *
Kunihiro Ito
Mathematical Institute, Tohoku University

概 要

金子と津村は, B 型多重添え字ポリ Bernoulli 数を導入し, 非正整数からなるインデックスに対して B 型多重添え字ポリ Bernoulli 数を特殊値に持つ多変数ゼータ関数 $\eta(-k_1,\dots,-k_r;s_1,\dots,s_r)$ を定義した. そして, 積分の変形から B 型ポリ Bernoulli 数の双対性の自然な拡張を示した. これを踏まえ本研究では, C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数を導入し, 多変数関数 $\tilde{\xi}(-k_1,\dots,-k_r;s_1,\dots,s_r)$ が全複素空間へ解析接続されることを示し, 特殊値に現れる C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数に対して, C 型ポリ Bernoulli 数の双対性の拡張と考えられる公式を得た.

1　導入・先行研究

ポリ Bernoulli 数 $\{B_n^{(k)}\}$ 及び $\{C_n^{(k)}\}$ は古典的な Bernoulli 数 $\{B_n\}$ の一般化であり, [1] と [2] において次のように母関数を用いて導入された:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} := \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} := \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{e^{t}-1}.$$

ここで $\mathrm{Li}_k(z)$ はポリログ関数であり,

$$\mathrm{Li}_k(z) := \sum_{0<m} \frac{z^m}{m^k}$$

で定められる. ポリログ関数は $k=1$ のとき対数関数 $-\log(1-z)$ のテイラー展開になるため, $B_n^{(1)} = C_n^{(1)} = B_n$ がすべての非負整数 n について成り立つことに注意する.

ポリ Bernoulli 数は多くの関係式を満たす. そのうちの一つが, 次に述べる双対性である:

定理 1 ([1, Theorem 2], [3, Section 2]). 非負整数 k, m に対して

$$B_m^{(-k)} = B_k^{(-m)}, \tag{1}$$

$$C_m^{(-k-1)} = C_k^{(-m-1)} \tag{2}$$

が成り立つ.

*matera14ito@gmail.com

Riemann ゼータ関数の非正整数点での特殊値が Bernoulli 数を用いて書き表せることはよく知られている．荒川と金子は 1999 年の論文 [2] において「Bernoulli 数の一般化であるポリ **Bernoulli 数を特殊値に持つようなゼータ関数は存在するか**」という問題を取扱い，正整数 k に対して定まる次の関数 (荒川-金子ゼータ関数)

$$\xi(k;s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{e^t-1}dt \quad (\Re(s)>0)$$

を導入した．関数 $\xi(k;s)$ は全複素平面へ正則に解析接続され，その非正整数点における特殊値は C 型ポリ Bernoulli 数で表示される ([2, Theorem 6 (i)]):

$$\xi(k;-m) = (-1)^m C_m^{(k)} \quad (m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

つまり，C 型ポリ Bernoulli 数を特殊値に持つゼータ関数は荒川-金子ゼータ関数 $\xi(k;s)$ となる．一方，B 型ポリ Bernoulli 数に対応するゼータ関数の構成については，[2] の研究を引き続き進展させた論文 [4] において，金子と津村がより一般的な設定の解答を与えた．まず正整数 $k_1,\ldots,k_r$ に対して関数 $\eta(k_1,\ldots,k_r;s)$ を

$$\eta(k_1,\ldots,k_r;s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^{t})}{1-e^t}dt \quad (\Re(s)>1-r)$$

で定義する (金子-津村ゼータ関数)．ここで $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ は

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

で定められる多重ポリログ関数である．このとき，関数 $\eta(k_1,\ldots,k_r;s)$ は全複素平面へ正則に解析接続され，その非正整数点における特殊値は B 型多重ポリ Bernoulli 数で表示される ([4, Theorem 2.3]):

$$\eta(k_1,\ldots,k_r;-m) = B_m^{(k_1,\ldots,k_r)} \quad (m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

ここで多重ポリ Bernoulli 数 $\{B_n^{(k_1,\ldots,k_r)}\}$ 及び $\{C_n^{(k_1,\ldots,k_r)}\}$ は，ポリ Bernoulli 数のさらなる一般化であり，次の母関数で定められる:

$$\sum_{n=0}^\infty B_n^{(k_1,\ldots,k_r)}\frac{t^n}{n!} := \frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^{-t})}{1-e^{-t}},$$
$$\sum_{n=0}^\infty C_n^{(k_1,\ldots,k_r)}\frac{t^n}{n!} := \frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^{-t})}{e^{t}-1}.$$

正整数点における特殊値についても興味深い結果がある．これを述べるために，幾つか記号を準備する．正整数からなるインデックス $\mathtt{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して，$\mathtt{k}_+ := (k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+1)$ とし，$\mathtt{k}^*$ は $\mathtt{k}$ の双対インデックスとする．また非負整数からなるインデックス $\mathtt{j}=(j_1,\ldots,j_r)$ に対して，$\mathtt{j}$ の重さ $|\mathtt{j}| := j_1+\cdots+j_r$, $\mathtt{j}$ の深さ $d(\mathtt{j}) := r$ を定める．さらに同じ深さ r のインデックス $\mathtt{k}$, $\mathtt{j}$ に対して，インデックスの和 $\mathtt{k}+\mathtt{j}$ を成分ごとの和 $\mathtt{k}+\mathtt{j} := (k_1+j_1,\ldots,k_r+j_r)$ で定め，記号 $b(\mathtt{k};\mathtt{j})$ で成分ごとの二項係数の積

$$b(\mathtt{k};\mathtt{j}) := \prod_{i=1}^r\binom{k_i+j_i-1}{j_i}$$

を表すものとする．このとき正整数点における特殊値は，次のように多重ゼータ値及び多重ゼータスター値の線形和で表される:

定理 2 ([4, Theorem 2.5])**.** 任意の正整数からなるインデックス $\mathtt{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と正整数 m に対して

$$\xi(k_1,\ldots,k_r;m) = \sum_{|\mathtt{j}|=m-1,d(\mathtt{j})=n} b((\mathtt{k}_+)^*;\mathtt{j})\zeta((\mathtt{k}_+)^*+\mathtt{j}),$$

$$\eta(k_1,\ldots,k_r;m) = (-1)^{r-1}\sum_{|\mathtt{j}|=m-1,d(\mathtt{j})=n} b((\mathtt{k}_+)^*;\mathtt{j})\zeta^\star((\mathtt{k}_+)^*+\mathtt{j})$$

が成り立つ．但し，いずれの和でもインデックス $\mathtt{j}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ は重さ $m-1$, 深さ $n := d((\mathtt{k}_+)^*)$ を亘る．

このように, 非正整数点における特殊値と正整数点における特殊値の両観点から, 荒川-金子ゼータ関数と金子-津村ゼータ関数は対をなす対象だといえる.

金子と津村のもう一つ重要な仕事は, B 型ポリ Bernoulli 数の双対性 (式 (1)) を二通りに拡張したことである. その一つ目は, 多重ポリ Bernoulli 数の双対性であり, 二つ目は, (上添え字に加えて) 下添え字も多重化した多重添え字ポリ Bernoulli 数 (multi-indexed poly-Bernoulli number) の双対性である. ここでは, より対称性の高い後者の双対性を説明する. 多重添え字ポリ Bernoulli 数は複素数 $s_1, \ldots, s_r$ と整数 $d \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して

$$\sum_{n_i,\ldots,n_r \geq 0} B_{n_1,\ldots,n_r}^{(s_1,\ldots,s_r),(d)} \prod_{j=1}^{r} \frac{t_j^{n_j}}{n_j!} := \frac{\mathrm{Li}^{ш}_{s_1,\ldots,s_r}(1-e^{-t_1-\cdots-t_r}, \ldots, 1-e^{-t_{r-1}-t_r}, 1-e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^{d}(1-e^{-t_j-\cdots-t_r})}$$

なる母関数で定義される数であり, 右辺に現れる $\mathrm{Li}^{ш}_{s_1,\ldots,s_r}(z_1, \ldots, z_r)$ は多変数 (シャッフル型) 多重ポリログ関数:

$$\mathrm{Li}^{ш}_{s_1,\ldots,s_r}(z_1, \ldots, z_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2-m_1} \cdots z_r^{m_r-m_{r-1}}}{m_1^{s_1} \cdots m_r^{s_r}}$$

である. 簡単のため $\mathbb{B}_{m_1,\ldots,m_r}^{(k_1,\ldots,k_r)} := B_{m_1,\ldots,m_r}^{(k_1,\ldots,k_r),(r)}$ とおく. 金子と津村の示した双対性は, $\mathbb{B}_{m_1,\ldots,m_r}^{(k_1,\ldots,k_r)}$ について次のように述べられる:

定理 3 ([4, Theorem 5.4])**.** 非負整数 $k_1, \ldots, k_r$, $m_1, \ldots, m_r$ に対して

$$\mathbb{B}_{m_1,\ldots,m_r}^{(-k_1,\ldots,-k_r)} = \mathbb{B}_{k_1,\ldots,k_r}^{(-m_1,\ldots,-m_r)}. \tag{3}$$

定理 3 で $r = 1$ の場合を考えれば, ポリ Bernoulli 数の双対性 (式 (1)) の拡張となっていることが確かめられる. 証明に用いられたのが, 非正整数からなるインデックスに対して定まる多変数ゼータ関数 $\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r)$ である. 関数 $\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r)$ は, 多変数多重ポリログ関数を用いて次のように定められる:

定義 1 ([4, Definition 5.6])**.** 非負整数 $k_1, \ldots k_r$ に対して

$$\begin{aligned} &\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r) \\ &:= \frac{1}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(s_j)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} t_j^{s_j-1} \frac{\mathrm{Li}^{ш}_{-k_1,\ldots,-k_r}(1-e^{t_1+\cdots+t_r}, \ldots, 1-e^{t_{r-1}+t_r}, 1-e^{t_r})}{\prod_{j=1}^{r}(1-e^{t_j+\cdots+t_r})} \prod_{j=1}^{r} dt_j \end{aligned} \tag{4}$$

$$(\Re(s_j) > 0,\ j = 1, \ldots, r).$$

関数 $\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r)$ は全複素空間へ正則に解析接続され, 非正整数点における特殊値が多重添え字ポリ Bernoulli 数で表される ([4, Theorem 5.7]):

$$\eta(-k_1, \ldots, -k_r; -m_1, \ldots, -m_r) = \mathbb{B}_{m_1,\ldots,m_r}^{(-k_1,\ldots,-k_r)} \quad (m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

一方で積分の変形から

$$\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r) = \mathbb{B}_{k_1,\ldots,k_r}^{(s_1,\ldots,s_r)}$$

が成り立つ ([4, Theorem 5.10]). これらのことから双対性 (定理 3) が導かれる.

正整数からなるインデックスに対する荒川-金子ゼータ関数と金子-津村ゼータ関数の対応関係を考えれば, 非正整数からなるインデックスに対する両ゼータ関数にも, 同様の対応関係があるべきである. 実際, 一変数の場合には関数 $\tilde{\xi}(-k_1, \ldots, -k_r; s)$ が定められ, 関数 $\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r)$ のときと同様の手法で解析接続と特殊値の双対性が計算される (このことは [4] でも述べられている). しかし, 多変数の場合の $\tilde{\xi}(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r)$ にあたる関数については, 収束性の課題があり [4] では言及されていない. 本研究では, 収束性の詳細な議論を行うことで多変数荒川-金子ゼータ関数を適切に定義し, 特殊値に現れる数 (C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数) の双対性を考察した.

2 主結果

C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数と多変数荒川-金子ゼータ関数を, 次で定める:

定義 2. 複素数 $s_1, \ldots, s_r$ と整数 $d \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, *C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数* $\{C_{n_1,\ldots,n_r}^{(s_1,\ldots,s_r),(d)}\}$ を

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \geq 0} C_{n_1,\ldots,n_r}^{(s_1,\ldots,s_r),(d)} \prod_{j=1}^{r} \frac{t_j^{n_j}}{n_j!} := \frac{\mathrm{Li}^{\sqcup\!\sqcup}_{s_1,\ldots,s_r}(1-e^{-t_1-\cdots-t_r}, \ldots, 1-e^{-t_{r-1}-t_r}, 1-e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^{d}(e^{t_j+\cdots+t_r}-1)}$$

で定める.

定義 3. 非負整数 $k_1, \ldots, k_r$, 但し $k_1 \geq 1$, と整数 $d \in \{1, \ldots, r\}$ に対して, 関数 $\tilde{\xi}(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r; d)$ を

$$\begin{aligned}
&\tilde{\xi}(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r; d) \\
&:= \frac{1}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(s_j)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} t_j^{s_j-1} \frac{\mathrm{Li}^{\sqcup\!\sqcup}_{-k_1,\ldots,-k_r}(1-e^{t_1+\cdots+t_r}, \ldots, 1-e^{t_{r-1}+t_r}, 1-e^{t_r})}{\prod_{j=1}^{d}(e^{-t_j-\cdots-t_r}-1)} \prod_{j=1}^{r} dt_j \qquad (5) \\
&\qquad (\Re(s_j) > 0,\ j = 1, \ldots, r)
\end{aligned}$$

で定める.

式 (4) で定義される多変数金子-津村ゼータ関数 $\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r)$ と比べると, 式 (5) は分母の指数因子の分だけ収束性が悪くなっている. 今回判明したのは, インデックスに「$k_1 \geq 1$」という条件を付ければ積分が収束することである. 主定理は次のように述べられる:

定理 4. 関数 $\tilde{\xi}(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r; d)$ は全複素空間へ正則に解析接続され, 次の式が成り立つ*:*

$$\tilde{\xi}(-k_1, \ldots, -k_r; -m_1, \ldots, -m_r; d) = C_{m_1,\ldots,m_r}^{(-k_1,\ldots,-k_r),(d)} \quad (m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

多変数金子-津村ゼータ関数 $\eta(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r)$ についての結果 ([4, Theorem 5.7]) と同様に, 多重添え字ポリ Bernoulli 数が特殊値に現れる. 特殊値の双対性に関する主張を述べやすくするために, C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数のバリエーション $\{\mathsf{C}_{n_1,\ldots,n_r}^{(s_1,\ldots,s_r)}\}$ を定義する: 複素数 $s_1, \ldots, s_r$ に対して

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \geq 0} \mathsf{C}_{n_1,\ldots,n_r}^{(s_1,\ldots,s_r)} \prod_{j=1}^{r} \frac{x_j^{n_j}}{n_j!} := e^{-x_1-\cdots-x_r} \sum_{l_1,\ldots,l_r \geq 1} \prod_{j=1}^{r} \frac{(1-e^{-x_j-\cdots-x_r})^{l_j-1}}{(l_1+\cdots+l_j-j+1)^{s_j}}.$$

$r = 1$ のときを考えると, 任意の整数 k について $\mathsf{C}_m^{(k)} = C_m^{(k)}$ が分かる. 多変数荒川-金子ゼータ関数の積分の変形により, C 型ポリ Bernoulli 数の双対性 (式 (2)) の一般化と考えられる次の等式を得る.

定理 5. 非負整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して

$$\tilde{\xi}(-k_1-1, -k_2, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r) = \mathsf{C}_{k_1,\ldots,k_r}^{(s_1-1,s_2,\ldots,s_r)}$$

が成り立つ. したがって, 非負整数 $m_1, \ldots, m_r$ に対して

$$\mathbb{C}_{m_1,\ldots,m_r}^{(-k_1-1,-k_2,\ldots,-k_r)} = \mathsf{C}_{k_1,\ldots,k_r}^{(-m_1-1,-m_2,\ldots,-m_r)} \qquad (6)$$

が成り立つ. 但し $\mathbb{C}_{m_1,\ldots,m_r}^{(k_1,\ldots,k_r)} := C_{m_1,\ldots,m_r}^{(k_1,\ldots,k_r),(r)}$.

式 (6) で $r = 1$ とすると, ポリ Bernoulli 数の双対性 (式 (2)) が得られる.

荒川-金子ゼータ関数 $\xi(k_1, \ldots, k_r; s)$ と関数 $\tilde{\xi}(-k_1, \ldots, -k_r; s_1, \ldots, s_r; d)$ を踏まえることによって, 正整数からなるインデックスに対する多変数関数 $\xi(k_1, \ldots, k_r; s_1, \ldots, s_r; d)$ を定義できる. この関数の解析接続と非正整数点および正整数点における特殊値の研究については, 改めて述べる予定である.

謝辞

2018 年度 RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」での講演機会をくださいました世話人の見正秀彦先生, 鈴木正俊先生, また本研究への有益な助言をしてくださった立教大学の小森靖先生, 首都大学東京の津村博文先生, 大阪体育大学の佐々木義卓先生, 上智大学の中筋麻貴先生, 九州大学の小野塚友一氏に心より感謝を申し上げます. 本研究発表には, JSPS 科研費 JP16H06336 および JP15K04774 の支援を受けました.

参考文献

[1] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), no. 1, 221–228.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189–209.

[3] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, Algebraic and analytic aspects of zeta functions and L-functions, MSJ Mem., vol. 21, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, pp. 73–85.

[4] M. Kaneko and H. Tsumura, *Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **232** (2018), 19–54.