多重ゼータ値に関する, 変数付き積分級数等式

東北大学理学研究科　川崎 菜穂 *
Naho Kawasaki
Mathematical Institute, Tohoku University

多重ゼータ値の間に成り立つすべての線形関係式を与えうると予想されている関係式族の一つに, 積分級数等式と呼ばれるものがある. 多重ゼータ値の積分級数等式には 2 色半順序集合に付随する多重積分が用いられており, この積分表示を Yamamoto 積分表示という. 一方, 多重ゼータ値の関係式への新たなアプローチとして, hyperlogarithms の関係式を研究する方法がある. 今回, Yamamoto 積分表示の一般化を与え, hyperlogarithms の積分級数等式を証明した ([4]). 得られた等式を特殊化することにより, 多重ゼータ値の積分級数等式や, 新たに, ある種の Euler sum の積分級数等式も得られる.

1 Hyperlogarithms

複素数 z を $z \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$ を満たすものとする. Hyperlogarithms は, 任意の正の整数 n と $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1,z\}$ に対して, $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,z,\infty\}$ 上の積分

$$I(0; a_1, \ldots, a_n; 1) := \int_0^1 \frac{dt_n}{t_n - a_n} \int_0^{t_n} \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1} - a_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{t_1 - a_1}$$

で定義される. この積分は $a_1 \neq 0$ かつ $a_n \neq 1$ を満たすとき収束する.

複素数 z が $|z| > 1$ を満たすとき, hyperlogarithms は次の級数表示をもつ:

$$I\left(0; b_1, \{0\}^{k_1-1}, \ldots, b_r, \{0\}^{k_r-1}; 1\right) = (-1)^r \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r} b_1^{m_1} b_2^{m_2-m_1} \cdots b_r^{m_r-m_{r-1}}}.$$

ただし, $\{m\}^n$ は, 非負整数 m, n に対して, $\underbrace{m, \ldots, m}_{n\text{ 個}}$ を略記したものとし, 正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ と $b_1, \ldots, b_r \in \{1, z\}$ は, 任意の正の整数 r に対して,

$$\text{“}k_r \geq 2\text{” or “}k_r = 1 \text{ かつ } b_r = z\text{”} \tag{1}$$

を満たすものとする.

正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ と $b_1, \ldots, b_r \in \{1, z\}$ に対して, $(\mathbf{k}; \mathbf{b}) = (k_1, \ldots, k_r; b_1, \ldots, b_r)$ を *index* とする. r が 0 のときは empty index とし, $\varnothing$ で表す. $b_1 = \cdots = b_r = 1$ のとき, index $(k_1, \ldots, k_r; \{1\}^r)$ を $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ として略記する. index $(\mathbf{k}; \mathbf{b})$ が *admissible* (以下, adm.) であるとは, $(\mathbf{k}; \mathbf{b})$ が条件 (1) を満たすこととする. index $\varnothing$ は, adm. index とする. index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ が adm. であるとき, $k_r \geq 2$ を満たすことに注意する.

*E-mail:naho.kawasaki.p7@gmail.com

多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ および多重ゼータスター値 $\zeta^\star(k_1,\ldots,k_r)$ は, adm. index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\ldots,k_r):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\quad\in\mathbb{R}$$

および

$$\zeta^\star(\mathbf{k})=\zeta^\star(k_1,\ldots,k_r):=\sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\quad\in\mathbb{R}$$

でそれぞれ定義されるものである. $\zeta(\varnothing)=\zeta^\star(\varnothing):=1$ とおく. 多重ゼータ値の間には, いままでに $\mathbb{Q}$ 上の様々な線形関係式が発見されているが, それらの構造はまだ完全には解明されていない. 多重ゼータ値の反復積分表示

$$I\left(0;1,\{0\}^{k_1-1},\ldots,1,\{0\}^{k_r-1};1\right)=(-1)^r\zeta(k_1,\ldots,k_r)$$

を用いることにより, hyperlogarithms の線形関係式の研究から, 多重ゼータ値の線形関係式を導くアプローチがある. このため, hypelogarithms の間の全ての線形関係式を把握することが目標の一つである. ここでは, 多重ゼータ値の積分級数等式を特殊化に持つ, hyperlogarithm の間の線形関係式を与える (Theorem 3.1).

2 代数的定式化

積分級数等式を述べるために, M. Hirose と N. Sato [1, § 2.1] による代数的定式化を導入する. これは, M. Hoffman [2] による, 多重ゼータ値の代数的定式化の一般化である. 変数 e_0,e_1,e_z に対して, $\mathcal{A}_z:=\mathbb{Q}\langle e_0,e_1,e_z\rangle$ を $\mathbb{Q}$ 上の 3 変数非可換多項式環, $\mathcal{A}:=\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle\subset\mathcal{A}_z$ を $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数非可換多項式環とし, $\mathcal{A}_z^0\subset\mathcal{A}_z^1\subset\mathcal{A}_z$ と $\mathcal{A}^0\subset\mathcal{A}^1\subset\mathcal{A}$ を

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}_z^0=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}e_z\oplus\displaystyle\bigoplus_{\substack{a\in\{1,z\}\\ b\in\{0,z\}}}e_a\mathcal{A}_ze_b & \subset & \mathcal{A}_z^1=\mathbb{Q}\oplus\displaystyle\bigoplus_{a\in\{1,z\}}e_a\mathcal{A}_z & \subset & \mathcal{A}_z\\
\cup & & \cup & & \cup\\
\mathcal{A}^0=\mathbb{Q}\oplus e_1\mathcal{A}e_0 & \subset & \mathcal{A}^1=\mathbb{Q}\oplus e_1\mathcal{A} & \subset & \mathcal{A}
\end{array}$$

とする. このとき, $\mathbb{Q}$-線形写像 $L:\mathcal{A}_z^0\to\mathbb{C}$ を

$$L(e_{a_1}\cdots e_{a_n})=I(0;a_1,\ldots,a_n;1)$$

で定義する.

$b\in\{1,z\}$ に対して, $\mathbb{Q}$-双線形写像 $*_b:\mathcal{A}_z^1\times\mathcal{A}^1\to\mathcal{A}_z^1$ を帰納的に

$$\begin{gathered}
v*_b1=v,\quad 1*_bw=w|_{1\to b},\\
e_ae_0^{p-1}v*_be_1e_0^{q-1}w=e_ae_0^{p-1}(v*_be_1e_0^{q-1}w)+e_ae_0^{q-1}(e_ae_0^{p-1}v*_bw)-e_ae_0^{p+q-1}(v*_bw)\\
\left(v\in\mathcal{A}_z^1,\ w\in\mathcal{A}^1,\ p,q\geq1,\ a\in\{1,z\}\right)
\end{gathered}$$

で定義する．ただし，自己準同型写像 $|_{a\to b}:\mathcal{A}_z\to\mathcal{A}_z$ $(a,b\in\{0,1,z\})$ は

$$e_x|_{a\to b}=\begin{cases}e_b & x=a\\ e_x & x\neq a.\end{cases}$$

で定義されるものとする．この積 $*_b$ を *b-harmonic product* と呼ぶ．1-harmonic product $*_1$ は [1, p.2] で定義されたものであり，z-harmonic product $*_z$ は今回新たに定義したものである．

$\mathbb{Q}$-双線形写像 $\circledast:(e_1\mathcal{A}_z\oplus e_z\mathcal{A}_z)\times e_1\mathcal{A}\to(e_1\mathcal{A}_ze_0\oplus e_z\mathcal{A}_ze_0)$ と $\mathbb{Q}$-双線形写像 $\vec{*}:\mathcal{A}_z^1\times e_1\mathcal{A}\to\mathcal{A}_z^1$ をそれぞれ

$$ve_be_0^{p-1}\circledast we_1e_0^{q-1}:=-(v*_bw)e_be_0^{p+q-1},\qquad v\,\vec{*}\,we_1e_0^{q-1}:=(v*_zw)e_ze_0^{q-1}$$
$$\big(v\in\mathcal{A}_z^1,\ w\in\mathcal{A}^1,\ p,q\geq1,\ b\in\{1,z\}\big)$$

で定義する．以下では，$e_{b_1}e_0^{k_1-1}\cdots e_{b_r}e_0^{k_r-1}\in\mathcal{A}_z^1$ を対応する index $(\mathbf{k};\mathbf{b})=(k_1,\dots,k_r;b_1,\dots,b_r)$ とみなしてしばしば扱うこととする．

non-empty index $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して，$\mathbf{k}^\star$ を

$$\mathbf{k}^\star=\sum_{\mathbf{k}'}(-1)^{\sigma(\mathbf{k}')}\mathbf{k}',$$

で定義する．ただし，和は $(k_1\square\cdots\square k_r)$ のそれぞれの $\square$ に ‘,’ または ‘+’ を代入して得られる index すべてをわたるものとし，$\sigma(\mathbf{k}')$ は $\square$ に ‘+’ を代入した個数とする．また，$\varnothing^\star=\varnothing$ とする．このとき，adm. index $\mathbf{k}^\star$ に対して，$L(\mathbf{k}^\star)=(-1)^r\zeta^\star(\mathbf{k})$ となる．

これらの notation を用いると，次の級数が得られる．

命題 2.1. $|z|>1$ を満たす複素数 z と non-empty indices $(\mathbf{k};\mathbf{b}),\mathbf{l}$ に対して，

$$\begin{aligned}&L\left((\mathbf{k};\mathbf{b})\circledast\mathbf{l}^\star\right)\\&=(-1)^{r+s}\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ \|\\ 0<n_1\leq\cdots\leq n_s}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}b_1^{m_1}b_2^{m_2-m_1}\cdots b_r^{m_r-m_{r-1}}},\\&L\left((\mathbf{k};\mathbf{b})\,\vec{*}\,\mathbf{l}^\star\right)\\&=(-1)^{r+s}\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ \wedge\\ 0<n_1\leq\cdots\leq n_s}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}b_1^{m_1}b_2^{m_2-m_1}\cdots b_r^{m_r-m_{r-1}}z^{n_s-m_r}}\end{aligned}$$

が成り立つ．

命題2.1 の 2 式において，右辺の級数は左辺より hyperlogarithm の和になることがわかる．これらの左辺は hyperlogarithms の積分級数等式の ‘級数’part にあたるものである．次の節で，‘積分’part について述べる．

3 主定理

[5] の中で，S. Yamamoto は 2 色半順序集合に付随する積分を導入した．多重ゼータ値や多重ゼータスター値をこの積分を用いて表示することができる．以下では，この積分の hyperlogarithms に対する一般化を与える．

定義 3.1. (1) $X = ((X, \preceq), \delta_X)$ を有限半順序集合 (finite partially ordered set) $(X, \preceq)$ と *labeling map* $\delta_X : X \to \{0, 1, z\}$ の組とし, *3-poset* と呼ぶ.

(2) 3-poset X が *admissible* (以下, adm.) であるとは, X のすべての極大元 x に対して $\delta_X(x) \neq 1$ かつ, X のすべての極小元 x に対して $\delta_X(x) \neq 0$ となることとする.

(3) adm. 3-poset X に付随する積分を

$$I(X) = \int_{\Delta(X)} \prod_{x \in X} \omega_{\delta_X(x)}(t_x)$$

で定義する. ただし,

$$\Delta(X) = \left\{ (t_x)_x \in (0,1)^X \mid t_x < t_y \text{ if } x \prec y \right\}$$

かつ,

$$\omega_a(t) := \frac{dt}{t-a} \quad (a \in \{0, 1, z\})$$

とする.

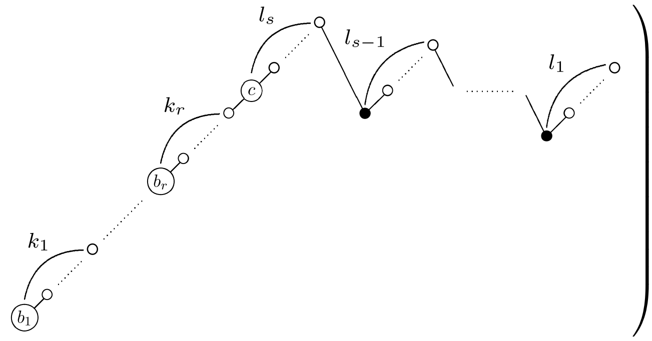
3-poset X が adm. であることと, $I(X)$ が収束することは同値である. empty 3-poset を $\varnothing$ (記号流用) で表し, $I(\varnothing) = 1$ とおく. これは empty index $\varnothing$ に対する定義 $\zeta(\varnothing) = \zeta^\star(\varnothing) = 1$ に対応している.

3-poset を表すために, 頂点 $\circ$, $\bullet$, ⓩ がそれぞれ $\delta_X(x) = 0, 1, z$ に対応している Hasse 図を用いる. このとき, 辺で結ばれた頂点の上下関係で半順序関係を表す. 以下に現われる 2 つの頂点 ⓪, ① はそれぞれ $\circ$, $\bullet$ とする.

主定理を以下に述べる.

定理 3.1 (Hyperlogarithms の積分級数等式)**.** 任意の $c \in \{0, z\}$ と non-empty indices $(\mathbf{k}; \mathbf{b})$, $\mathbf{l}$ に対して,

I



$$= \begin{cases} -L((\mathbf{k}; \mathbf{b}) \circledast \mathbf{l}^\star) & (c = 0), \\ L((\mathbf{k}; \mathbf{b}) \vec{*} \mathbf{l}^\star) & (c = z) \end{cases}$$

が成り立つ.

この定理において, $b_1 = \cdots = b_r = 1$ かつ $c = 0$ に特殊化すると, 多重ゼータ値の積分級数等式 [3, Theorem 4.1] が得られる. 一方, $z = -1$ に特殊化すると, $(k_1, \varepsilon_1), \ldots, (k_r, \varepsilon_r) \in (\mathbb{Z}_{>0} \times \{\pm 1\})$, ただし, $(k_r, \varepsilon_r) \neq (1, 1)$ に対して定義される Euler sums

$$\begin{aligned} \zeta_E((k_1, \varepsilon_1), \ldots, (k_r, \varepsilon_r)) &:= \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_r} \frac{\varepsilon_1^{m_1} \cdots \varepsilon_r^{m_r}}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \\ &= (-1)^r I(0; \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r, \{0\}^{k_1 - 1}, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_r, \{0\}^{k_2 - 1}, \ldots, \varepsilon_r, \{0\}^{k_r - 1}; 1) \end{aligned}$$

の新たな $\mathbb{Q}$-線形関係式も得られる.

謝辞

2018 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での講演機会をくださいました研究代表者の見正秀彦先生 (東京電機大学), 研究副代表者の鈴木正俊先生 (東京工業大学) に心より感謝申し上げます. 本研究発表には, JSPS 科研費 JP15K04774 および JP16H06336 の支援を受けました.

参考文献

[1] M. Hirose and N. Sato, Iterated integrals on $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,z,\infty\}$ and a class of relations among multiple zeta values, arXiv:1801.03807.

[2] M. Hoffman, The Algebra of Multiple Harmonic Series, *J. of Algebra*, **194** (1997) 477-495.

[3] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Mathematica*, **24** (2018), 2499-2521.

[4] N. Kawasaki, An Integral-Series identity of hyperlogarithms, preprint.

[5] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B68** (2017), 3-14.