The Sato-Tate conjecture and functional differential independence of symmetric power L-functions

群馬大学　名越 弘文
Hirofumi Nagoshi
Gunma University

1. 序論

1900 年にパリで開催された国際数学者会議で，Hilbert が有名な講演（23 題の問題の講演）を行った．その講演録において，リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ に関して，Hilbert [2, p. 468] は次の結果を述べている．ゼータ関数 $\zeta(s)$ は有理関数を係数とする代数的微分方程式の解になり得ないという主張である．

定理 A (Hilbert [2], 1900)**.** ゼータ関数 $\zeta(s)$ は，有理関数体 $\mathbb{C}(s)$ 上代数的微分独立性を持つ．すなわち，次が成り立つ．N は 0 以上の整数とし，P は，係数たちが $\mathbb{C}(s)$ に属する $(N+1)$ 変数多項式で，

$$P(\zeta(s), \zeta'(s), \ldots, \zeta^{(N)}(s)) = 0$$

が恒等的に成り立つとする．そのとき，P は零多項式である． ∎

現在では，この定理に対して様々な証明が知られている．[4], [7], [8], [10], [12], [13] などを参照されたい．本質的に異なる証明が少なくとも 5 つは知られているようである．例えば，Hilbert [2, p. 468] の証明は，ゼータ関数 $\zeta(s)$ の関数等式とガンマ関数 $\Gamma(s)$ に関する類似の独立性（Hölder による結果）を使うものであるが，Voronin [13] の証明は，ゼータ関数 $\zeta(s)$ のオイラー積表示を使うものである．

定理 A の拡張として，Popken [8] は次の結果を得た．

定理 B (Popken [8], 1962)**.** $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ を次の条件を満たす数論的関数たちとする：

$$\begin{gathered}\text{任意の非零ベクトル } (c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{C}^r \text{ に対して，} \\ \sum_{j=1}^{r} c_j \varphi_j(p) \neq 0 \text{ を満たす素数 } p \text{ たちが無限個存在する．}\end{gathered} \tag{1.1}$$

そのとき，形式的ディリクレ級数たち $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(n) n^{-s}, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_r(n) n^{-s}$ は $\mathbb{C}$ 上代数的独立である． ∎

この定理において，φ_j に付随するディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_j(n) n^{-s}$ は，収束するとは限らないので，形式的ディリクレ級数として考えている．形式的ディリクレ級数たちに対する積は，係数たちに対するディリクレ積として定義する ([11, Section 4.2])．この積は，収束するディリクレ級数たちに対する通常の積と同じことになる．本稿の主結果においては，収束するディリクレ級数たちを扱う．

注意 1. 収束するディリクレ級数たちに対しては，$\mathbb{C}$ 上代数的独立であるならば $\mathbb{C}(s)$ 上代数的独立であることが知られている ([7, p. 246])．もっと強い結果が [6, Proposition 4.2] にある． ∎

$\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\log n)^k n^{-s}$ であることに注意し，定理 B において

$$\varphi_1(n) = 1, \varphi_2(n) = -\log n, \ldots, \varphi_r(n) = (-\log n)^{r-1} \tag{1.2}$$

と取ると，条件 (1.1) が満たされることが分かる．よって，定理 B と注意 1 から定理 A が得られる．

また，定理 A の拡張として，Shapiro と Sparer [12] は次の結果を得た．

定理 C (Shapiro & Sparer [12], 1986)**.** $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ を次の条件を満たす数論的関数たちとする：

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(p_1) & \cdots & \varphi_1(p_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r(p_1) & \cdots & \varphi_r(p_r) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ となる相異なる素数たち } p_1, \ldots, p_r \text{ が存在する．} \tag{1.3}$$

そのとき，形式的ディリクレ級数たち $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(n) n^{-s}, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_r(n) n^{-s}$ は $\mathbb{C}$ 上代数的独立である． ∎

この定理において，先程と同じく (1.2) と取る．そのとき，行列式

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(p_1) & \cdots & \varphi_1(p_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r(p_1) & \cdots & \varphi_r(p_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (-\log p_1) & \cdots & (-\log p_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\log p_1)^{r-1} & \cdots & (-\log p_r)^{r-1} \end{vmatrix}$$

は Vandermonde の行列式であり，相異なる素数たち $p_1, \ldots, p_r$ に対して，これは 0 でないので，条件 (1.3) は満たされている．よって，定理 C と注意 1 から定理 A が得られる．

Voronin [13] [14] と Reich [9] [10] は，リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ などに対して，ある関数的微分独立性が成り立つことを示した．これは，$\mathbb{C}$ 上代数的微分独立性よりも強い独立性である．Nagoshi [6, Theorem 1.1] も参照されたい．

次の定理は，Reich [10] によって得られた．話を簡単にするため，本稿では，Reich [10] の意味での関数的独立性として最も基本的と思われる場合のみを述べる．なお，Reich [10] より強い結果が Nagoshi [6, Theorem 1.4] にある．

定理 D (Reich [10], 1984)**.** $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s}$ を，収束するディリクレ級数とし，次の条件を満たすとする：

$$\varphi(p) \neq 0 \text{ を満たす素数 } p \text{ たちが無限個存在する．}$$

そのとき，$D(s)$ は，次の意味での関数的微分独立性を満たす．N は 0 以上の整数とし，$H : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}$ は正則関数で，

$$H(D(s), D'(s), \ldots, D^{(N)}(s)) = 0$$

が恒等的に成り立つとするならば，H は零関数である．(よって特に，$D(s)$ は $\mathbb{C}$ 上代数的微分独立性を満たす．) ∎

2. Popken の条件と Shapiro-Sparer の条件の関係

代数的独立性に関する 2 つの判定条件 (1.1), (1.3) を述べたが，実は，次の命題が成り立つ．筆者の知る限り，これは新しい結果であるようだ．また，定理 1 の証明においても，これは大切となる．

命題 1. 数論的関数たち $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ は，Popken の条件 (1.1) を満たすなら，Shapiro-Sparer の条件 (1.3) も満たす． ∎

証明の概略を述べる．条件 (1.1) が成り立つと仮定する．(1.1) の和 $\sum_{j=1}^{r} c_j \varphi_j(p)$ が内積の形をしていることに注意する．ベクトル $(c_1, \ldots, c_r)$ としてある適当なものたちを取っていって，

線形代数におけるグラム・シュミットの直交化法における議論と同様な議論を行うことにより，ベクトルたち

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} \varphi_1(p_1) \\ \vdots \\ \varphi_r(p_1) \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{v}_r := \begin{pmatrix} \varphi_1(p_r) \\ \vdots \\ \varphi_r(p_r) \end{pmatrix}$$

が $\mathbb{C}$ 上線形独立となる素数たち $p_1, \ldots, p_r$ が存在することが言える．例えば，$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ と直交するベクトル $\boldsymbol{u}_4$ を取ってくると，条件 (1.1) によれば，$\langle \boldsymbol{v}_4, \overline{\boldsymbol{u}_4} \rangle \neq 0$ となる素数 $p_4(\neq p_1, p_2, p_3)$ が存在するというような議論を繰り返す．そうして，特に，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ に対応する (1.3) の行列式は 0 でない．よって命題 1 が証明された． ∎

3. 主結果 1

本稿の最初の主結果が次の定理である．これは，定理 B（収束するディリクレ級数たちの場合）と定理 D を拡張したものであり，複数個の一般のディリクレ級数たちに対する関数的独立性を扱っている．

定理 1. $D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(n) n^{-s}, \ldots, D_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_r(n) n^{-s}$ を，収束するディリクレ級数たちとし，次の条件 (つまり，Popken の条件 (1.1)) を満たすとする：

$$\begin{gathered} \text{任意の非零ベクトル } (c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{C}^r \text{ に対して，} \\ \sum_{j=1}^{r} c_j \varphi_j(p) \neq 0 \text{ を満たす素数 } p \text{ たちが無限個存在する．} \end{gathered} \tag{3.1}$$

そのとき，$D_1(s), \ldots, D_r(s)$ は，Reich の意味 (定理 D) での関数的独立性を満たす．すなわち，$H : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ は正則関数で，

$$H(D_1(s), \ldots, D_r(s)) = 0 \tag{3.2}$$

が恒等的に成り立つならば，H は零関数である． ∎

$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s}$ に対して $D^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\log n)^k \varphi(n) n^{-s}$ なので，定理 1 は定理 D の拡張となっていることが分かる．

定理 1 の証明の概略を述べる．Reich [10] の議論をうまく変形して証明する．相異なる素数たち $p_1, \ldots, p_r$ に対して，$\theta_1, \ldots, \theta_r \in [0, 1)$ を変数たちとする関数たち

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(s; \theta_1, \ldots, \theta_r) &:= \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi_j(p_k) e^{2\pi i \theta_k}}{p_k^s} \qquad (j = 1, \ldots, r), \\ D_j(s; \theta_1, \ldots, \theta_r) &:= \tilde{D}_j(s; \theta_1, \ldots, \theta_r) + \text{ある項たち} \qquad (j = 1, \ldots, r) \end{aligned}$$

を考える．ここで，$D_j(s; \theta_1, \ldots, \theta_r)$ に対する正確な記述は省略するが，

$$D_j(s; 0, \ldots, 0) = D_j(s) \tag{3.3}$$

となるようにしているものである．

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \tilde{D}_j(s; \theta_1, \ldots, \theta_r) = 2\pi i \frac{\varphi_j(p_k) e^{2\pi i \theta_k}}{p_k^s}$$

である．

σ を大きな正の実数とし，関数

$$F_\sigma(\theta_1, \ldots, \theta_r) := \Big(\tilde{D}_1(\sigma; \theta_1, \ldots, \theta_r), \ldots, \tilde{D}_r(\sigma; \theta_1, \ldots, \theta_r) \Big)$$

を考える．命題 1 の証明の議論を使うことにより，条件 (3.1) から次が言える．(1.3) の行列式と (3.4) の行列式は似ていることに注意する．

補題 1. ヤコビ行列式

$$\left|\frac{\partial F_\sigma(\theta_1,\ldots,\theta_r)}{\partial(\theta_1,\ldots,\theta_r)}\right| = \begin{vmatrix} 2\pi i \frac{\varphi_1(p_1)e^{2\pi i\theta_1}}{p_1^\sigma} & \cdots & 2\pi i \frac{\varphi_1(p_r)e^{2\pi i\theta_r}}{p_r^\sigma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\pi i \frac{\varphi_r(p_1)e^{2\pi i\theta_1}}{p_1^\sigma} & \cdots & 2\pi i \frac{\varphi_r(p_r)e^{2\pi i\theta_1}}{p_r^\sigma} \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

が $\theta_1,\ldots,\theta_r$ の関数として恒等的に零ではないような相異なる素数たち $p_1,\ldots,p_r$ が存在する． ∎

補題 1 と「$\log p_1,\ldots,\log p_r$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であること」と Kronecker-Weyl の近似定理と (3.3) を使って，次を示せる．

補題 2. 関数 $g_\sigma(t):\mathbb{R}\to\mathbb{C}^r$ を，

$$g_\sigma(t) := (D_1(\sigma+it),\ldots,D_r(\sigma+it))$$

と定義する．そのとき，空でないある開集合 $U\subset\mathbb{C}^r$ が存在して，像 $g_\sigma(\mathbb{R})$ は U において稠密である． ∎

補題 2 と仮定 (3.2) と正則関数に対する一致の定理より，$H\equiv 0$ が得られる．よって定理 1 が証明された． □

4. Sato-Tate 予想と主結果 2

k を正の偶数とし，f を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対する重さ k の正規化された正則 Hecke 固有尖点形式とする．$\tilde\lambda_f(n)$ たちは f の Hecke 固有値たちを表すとし，$\lambda_f(n) := \tilde\lambda_f(n)/n^{(k-1)/2}$ と書くとする．そのとき，ラマヌジャン予想，つまり，すべての素数 p に対して

$$\lambda_f(p)\in[-2,2]$$

となることが証明されている．

f に対するいわゆる Sato-Tate 予想とは次の主張である．

予想 (Sato-Tate 予想)**.** h を区間 $[-2,2]$ 上の任意の連続関数とするとき，

$$\frac{1}{\pi(x)}\sum_{p\le x} h(\lambda_f(p)) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} h(t)\sqrt{4-t^2}\,dt \qquad (x\to\infty)$$

が成り立つ．ここで，$\pi(x)$ は x 以下の素数たちの個数を表す． ∎

よく知られているように，この予想は現在では証明されている ([1])．

f に対する Sato-Tate 予想と関連するものとして，f に付随する対称積 L 関数たちと呼ばれるものがある．それらは次のように定義される．

$$\lambda_f(p) = \alpha_f(p)+\beta_f(p)$$

（ただし，$\alpha_f(p)\beta_f(p)=1$ と $|\alpha_f(p)|=|\beta_f(p)|=1$ を満たす）と書くとする．自然数 m に対して，m 次の対称積 L 関数 $L(s,\mathrm{sym}^m f)$ を，

$$L(s,\mathrm{sym}^m f) := \prod_p \prod_{j=0}^{m}\left(1-\frac{\alpha_f(p)^{m-j}\beta_f(p)^j}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\mathrm{Re}\, s>1)$$

と定義する．$L(s,\mathrm{sym}^1 f)$ は，f に付随する通常の L 関数 $L(s,f)$ と同じである．

f に対する Sato-Tate 予想は，「すべての自然数 m に対して，対称積 L 関数 $L(s,\mathrm{sym}^m f)$ が，軸 $\mathrm{Re}\, s=1$ まで解析接続されその軸上で零点を持たない」という主張と同値であることが知られている．

対称積 L 関数 $L(s,\mathrm{sym}^m f)$ をディリクレ級数表示して

$$L(s,\mathrm{sym}^m f) =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n)}{n^s}$$

と書くとすると，素数 p に対して

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathrm{sym}^1 f}(p) &= \lambda_f(p),\\
\lambda_{\mathrm{sym}^2 f}(p) &= \lambda_f(p)^2 - 1,\\
\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p) &= \lambda_f(p)^3 - 2\lambda_f(p),\\
\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p) &= \lambda_f(p)^4 - 3\lambda_f(p)^2 + 1,\\
\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p) &= U_m(\lambda_f(p)/2)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$U_m(x)$ は第二種チェビシェフ多項式である．

本稿の 2 番目の主結果が次の定理である．定理 1 と Sato-Tate 予想を使って証明される．

定理 2. r を自然数とする．ディリクレ級数たち

$$\begin{gathered}
\zeta(s),\ L(s,\mathrm{sym}^1 f)\,(= L(s,f))\,,\ L(s,\mathrm{sym}^2 f),\ \ldots\ , L(s,\mathrm{sym}^r f),\\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\lambda_f(n)}{n^s},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_f(n)}{n^s}
\end{gathered} \tag{4.1}$$

とそれらの導関数たちは，Reich の意味（定理 D，定理 1）で関数的独立である． ∎

証明の概略を述べる．見やすくするため，まずは，(4.1) のディリクレ級数たちのみ（つまり，導関数たちは除く）の場合を述べる．今，$(c_0,c_1,\ldots,c_r,c_{r+1},c_{r+2})$ を $\mathbb{C}^{r+3}$ の任意の非零ベクトルとする．そのとき，

$$h(t) = |c_0 + c_1 U_1(t/2) + \cdots + c_r U_r(t/2) + c_{r+1}\cos t + c_{r+2}\sin t|$$

という関数を考える．Sato-Tate 予想（先に述べたように，現在では定理である）によれば，

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\le x} h(\lambda_f(p)) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} h(t)\sqrt{4-t^2}\,dt \qquad (x\to\infty) \tag{4.2}$$

が成り立つ．$(c_0,c_1,\ldots,c_r,c_{r+1},c_{r+2}) \neq \mathbf{0}$ と $\deg U_m(x) = m$ に注意すると，(4.2) の積分は 0 でないことが分かり，

$$\sum_{p\le x} h(\lambda_f(p)) \longrightarrow \infty \qquad (x\to\infty)$$

が得られる．よって，

$$c_0 + c_1\lambda_{\mathrm{sym}^1 f}(p) + \cdots + c_r\lambda_{\mathrm{sym}^r f}(p) + c_{r+1}\cos\lambda_f(p) + c_{r+2}\sin\lambda_f(p) \neq 0$$

となる無限個の素数 p たちが存在する．すなわち，(4.1) のディリクレ級数たちに対して，Popken の条件 (3.1) が満たされている．

導関数たちも含めた場合には，部分積分も使い $\sum_{p\le x}(\log p)^m h(\lambda_f(p))$ という形の和を考察して，Popken の条件 (3.1) が満たされていることが分かる．

以上のことと定理 1 より，定理 2 が得られる． □

5. 主結果 3

定理 2 の証明の議論を同様に使うことにより，例えば，次の結果が得られる．

定理 3. r を自然数とする．ディリクレ級数たち

$$\sum_{d<0}\frac{L(1,\chi_d)}{|d|^s},\ \sum_{d<0}\frac{L(1,\chi_d)^2}{|d|^s},\ \ldots\ ,\ \sum_{d<0}\frac{L(1,\chi_d)^r}{|d|^s}$$

とそれらの導関数たちは，Reich の意味で関数的独立である．ここで，d は負の基本判別式を走り，$L(\cdot,\chi_d)$ は Kronecker 記号 $\chi_d=\left(\frac{d}{\cdot}\right)$ に付随するディリクレ L 関数を表す． ∎

証明の概略を述べる．値たちの集合 $\{L(1,\chi_{-p}) : p \text{ は素数}, p\equiv 3 \bmod 4\}$ は，区間 $(0,\infty)$ で稠密であることが，Mishou と Nagoshi [5] によって示されている．よって特に，区間 $(0,1)$ で稠密である部分集合 $\{L(1,\chi_{-p_j}) : p_j \text{ は素数}, p_j\equiv 3 \bmod 4, j=1,2,\ldots\}$ が存在する．このことと「区間 $[0,1)$ で稠密な数列は，順番をうまく入れ替えることにより，mod 1 で一様分布するような数列にできる」という von Neumann の rearrangement 定理 ([3, p. 21]) によれば，mod 1 で一様分布するような数列 $\{L(1,\chi_{-q_j}) : q_j \text{ は素数}, q_j\equiv 3 \bmod 4, j=1,2,\ldots\}$ が存在する．そして，定理 2 の証明と同様にして（Sato-Tate 予想の代わりに，通常の一様分布を使う），定理 3 は証明される． □

謝辞. 本研究集会における研究代表者の見正秀彦氏と副代表者の鈴木正俊氏に感謝致します．

References

[1] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris, R. Taylor, *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy. II*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 47 (2011), 29–98.
[2] D. Hilbert, *Mathematical problems*. Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437–479.
[3] E. Hlawka, *The theory of uniform distribution*, Translated from the German by Henry Orde, A B Academic Publishers, 1984.
[4] V. Laohakosol, *Dependence of arithmetic functions and Dirichlet series*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), 637–645.
[5] H. Mishou, H. Nagoshi, *On class numbers of quadratic fields with prime discriminant and character sums*, Kyushu J. Math. 66 (2012), 21–34.
[6] H. Nagoshi, *Hypertranscendence of L-functions for* $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, Bull. Aust. Math. Soc. 93 (2016), 388–399.
[7] A. Ostrowski, *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. 8 (1920), 241–298.
[8] J. Popken, *Algebraic dependence of arithmetic functions*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math. 24 (1962), 155–168.
[9] A. Reich, *Zetafunktionen und Differenzen-Differentialgleichungen*, Arch. Math. 38 (1982), 226–235.
[10] A. Reich, *Über Dirichletsche Reihen und holomorphe Differentialgleichungen*, Analysis 4 (1984), 27–44.
[11] H. Shapiro, *Introduction to the theory of numbers*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1983.
[12] H. Shapiro, G. Sparer, *On algebraic independence of Dirichlet series*, Commun. Pure Appl. Math. 39 (1986), 695–745.
[13] S. M. Voronin, *On differential independence of ζ-functions*, Soviet Math. Dokl. 14 (1973), 607–609.
[14] S. M. Voronin, *The functional independence of Dirichlet L-functions*. Collection of articles in memory of Yu. V. Linnik. Acta Arith. 27 (1975), 493–503 (in Russian).