論文 Zeros and the functional equation of the quadrilateral zeta function 関する注意 *

東京理科大学　理工学部　教養 † 中村 隆
Takashi Nakamura
Department of Liberal Arts, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

概要

この論説では論文「Zeros and the functional equation of the quadrilateral zeta function」の概要を述べ，いくつかの補足をする．証明は本論文のほうを参照していただきたい．

1 Introduction

1.1 The Riemann zeta function

まずリーマンゼータ関数の定義とその性質について復習する．$s=\sigma+it$ を複素数とするときリーマンゼータ関数は

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \sigma > 1$$

で定義される．$\zeta(s)$ は全複素平面に有理型に解析接続され，$s=1$ で極を持ち，その留数は 1 である．さらに $\zeta(s)$ は関数等式

$$\zeta(1-s) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big) \zeta(s) \tag{1.1}$$

(例えば [13, (2.1.8)]) を持つ．関数等式は同値な様々な形があるが，ここでは実零点との関連を考えこの形を採用する．級数表示から $\sigma > 1$ において $\zeta(\sigma) > 0$ であることはすぐ

〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641

にわかる．一方 [13, (2.12.4)] から

$$\big(1-2^{1-\sigma}\big)\zeta(\sigma)=1-\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}-\frac{1}{4^\sigma}+\cdots>0,\qquad 0<\sigma<1,$$

であるので，$\zeta(\sigma)<0$ が $0<\sigma<1$ において成り立つ．$\zeta(0)=-1/2<0$ であることはよく知られている ([13, (2.4.3)] などを参照)．よって関数等式 (1.1) から次が成り立つ．

Theorem A. $\zeta(s)$ の実零点は負の偶数点上にのみ存在する．

オイラー積から $\zeta(s)$ は $\sigma>1$ 零点を持たないことがわかる．関数等式 (1.1) から $\zeta(s)$ は $\sigma<0$ かつ $t\neq 0$ では零点を持たない．よって全ての複素零点は臨界領域と呼ばれる $0\le\sigma\le 1$ にあることがわかる．関数等式 (1.1) と対象性 $\zeta(\overline{s})=\overline{\zeta(s)}$ から，$\zeta(s)$ の実でない零点 (自明でない零点) は，直線 $t=0$ と $\sigma=1/2$ について対象に分布する．そのため次のように予想されている．

The Riemann hypothesis. 全ての $\zeta(s)$ の自明でない零点は $\sigma=1/2$ 上にある．

1.2 Hamburger's theorem

1921 年に Hamburger [4] は $\zeta(s)$ は関数等式 (1.1) により特徴付けられることを示した．

Theorem B. $G(s)$ を位数有限の整関数，$P(s)$ を多項式とし，

$$f(s):=\frac{G(s)}{P(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},\qquad a(n)\in\mathbb{C},\tag{H1}$$

は $\sigma>1$ で絶対収束すると仮定する．さらに

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)f(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)g(1-s),\tag{H2}$$

ただし $g(s)$ は

$$g(1-s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^{1-s}},\qquad b(n)\in\mathbb{C},$$

と書け，ある半平面で絶対収束すると仮定する．このとき，$f(s)=C\zeta(s)$ が成り立つ．

Siegel [12]，Hecke [5]，Knopp [6] などが類似や拡張を考えている．

Bochner と Chandrasekharan [2] は関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\psi(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\omega(1-s)\tag{1.2}$$

を充たす一般ディィリクレ級数 $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$ と $\omega(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n^{-s}$，ただし $a_n, b_n \in \mathbb{C}$，$\{\lambda_n\}$ と $\{\mu_n\}$ は狭義単調増加数列し，2 つの一般ディィリクレ級数はある半平面で絶対収束するものとする．[2, Theorem 7.1] において彼等は幾つかのさらなる仮定の下では上の等式を充たすものは以下のものに限る (定数倍の違いは除く) ことを示した．

$$\begin{aligned}&\big(\psi(s), \omega(s)\big) = \big(\zeta(s), \zeta(s)\big),\\&\big((2^s-1)\zeta(s), (2^{1-s}-1)\zeta(s)\big), \quad \big((2^{1-s}-1)\zeta(s), (2^s-1)\zeta(s)\big).\end{aligned} \tag{1.3}$$

1.3 Hurwitz and periodic zeta functions and their real zeros

フルビッツゼータ関数 $\zeta(s,a)$ は

$$\zeta(s,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \qquad \sigma > 1, \quad 0 < a \le 1.$$

により定義される．$\zeta(s,a)$ のディィリクレ級数は $\sigma > 1$ で絶対収束する．$\zeta(s,a)$ は全複素平面に有理型に解析接続され，$s=1$ で極を持ち，その留数は 1 である ([1, Section 12] などを参照)．χ をディィリクレ指標とし，ディィリクレ L 関数を $L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ と書くことにする．

関数 $\zeta(s,1/2) = (2^s-1)\zeta(s)$ の実零点は正でない偶数上にしかないことは Theorem A からわかる．さらに，χ が原始的であり $\chi(-1)=1$ を充たすディィリクレ L 関数 L-function $L(s,\chi)$ の実零点は正でない偶数上にあることもよく知られている．松坂 [8, Theorem 1.3] は整数 $N \le -1$ に対して, $\zeta(s,a)$ が $(-N-1,-N)$ に実零点を持つための必要充分条件は $B_{N+1}(a)B_{N+2}(a) < 0$ であること, ただし $B_N(a)$ は N 番目のベルヌーイ多項式，を示した．$N=-1$ と $N=0$ の場合は，それぞれ [9, Theorem 1.2] と [10, Theorem 1.2] で証明されていたことを注意しておく．

$0 < a \le 1$ に対して, 周期的ゼータ関数を以下で定義する ([1, Exercise 12.2] を参照)

$$\mathrm{Li}_s(e^{2\pi i a}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n a}}{n^s}, \qquad \sigma > 1.$$

明らかに $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s,1) = \zeta(s)$ が成り立つ．$0 < a < 1$ であるとき $\mathrm{Li}_s(e^{2\pi i a})$ のディィリクレ級数は $\sigma > 0$ で広義一様収束する．このとき $\mathrm{Li}_s(e^{2\pi i a})$ は全平面解析的に接続される．関数 $\zeta(s,a)$ と $\mathrm{Li}_s(z)$, ただし $|z| \le 1$，の実零点については [9, Section 1.1] などを参照していただきたい．

2 Main results and Remarks

2.1 Main results

$0 < a \leq 1/2$ に対して，2つ組フルビッツゼータ関数 $Z(s,a)$ を以下で定義する．

$$Z(s,a) := \zeta(s,a) + \zeta(s,1-a).$$

同様に $0 < a \leq 1/2$ に対して，2つ組周期的ゼータ関数 $P(s,a)$ を以下で定義する．

$$P(s,a) := \mathrm{Li}_s(e^{2\pi ia}) + \mathrm{Li}_s(e^{2\pi i(1-a)}).$$

さらに $0 < a \leq 1/2$ に対して，4つ組ゼータ関数 $Q(s,a)$ を以下で定義する．

$$Q(s,a) := Z(s,a) + P(s,a) = \zeta(s,a) + \zeta(s,1-a) + \mathrm{Li}_s(e^{2\pi ia}) + \mathrm{Li}_s(e^{2\pi i(1-a)}).$$

Theorem A の類似として次を得た.

Theorem 2.1. $1/4 \leq a \leq 1/2$ とする．$Z(s,a)$ は次の関数等式を充たし，その実零点は正でない偶数上にのみ存在する．

$$Z(1-s,a) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)P(s,a), \tag{2.1}$$

Theorem 2.2. $1/4 \leq a \leq 1/2$ とする．$P(s,a)$ は次の関数等式を充たし，その実零点は負の偶数上にのみ存在する．

$$P(1-s,a) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)Z(s,a), \tag{2.2}$$

Theorem 2.3. $1/4 \leq a \leq 1/2$ とする．$Q(s,a)$ は次の関数等式を充たし，その実零点は負の偶数上にのみ存在する．

$$Q(1-s,a) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)Q(s,a), \tag{2.3}$$

$1/4 \leq a \leq 1/2$ でないときは次が成り立つ．

Proposition 2.4. $0 < a < 1/2$ が充分小さいとき，$Z(s,a)$, $P(s,a)$ と $Q(s,a)$ は開区間 $(0,1)$ において少なくとも一つ実零点を持つ.

$a = 1/4$, $1/3$ 又は $1/2$ であるときは次が成り立つ．

Proposition 2.5. $a = 1/4$, $1/3$ 又は $1/2$ とする．リーマン予想は次のいずれかと同値.

- 全ての $Z(s,a)$ の複素零点は $\sigma = 1/2$ と $\sigma = 0$ 上にある,
- 全ての $P(s,a)$ の複素零点は $\sigma = 1/2$ と $\sigma = 1$ 上にある
- 全ての $Q(s,a)$ の複素零点は $\sigma = 1/2$ 上にある.

上記でない場合は，$Z(s,a)$, $P(s,a)$ と $Q(s,a)$ の複素零点については次が成り立つ.

Proposition 2.6. $a \in (1/4, 1/2) \cap \mathbb{Q} \setminus \{1/3\}$ とする．このとき任意の $\delta > 0$ に対して，$P(s,a)$ と $Q(s,a)$ は $C_a^\flat(\delta)T$ 以上 $C_a^\sharp(\delta)T$ 以下の複素零点を，長方形領域 $1 < \sigma < 1+\delta$, $0 < t < T$, ただし T は充分大きい，内に持つ．さらに，任意の $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ に対して，$P(s,a)$ と $Q(s,a)$ は $C_a^\flat(\sigma_1, \sigma_2)T$ 以上 $C_a^\sharp(\sigma_1, \sigma_2)T$ 以下の複素零点を，長方形領域 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $0 < t < T$ 内に持つ.

$a \in (1/4, 1/2) \cap \mathbb{Q} \setminus \{1/3\}$ 又は $0 < a < 1/2$ が超越数であるとき，関数 $Z(s,a)$ は上と同様の性質を持つ.

系として次を得る.

Corollary 2.7. $1/4 < a < 1/3$ 又は $1/3 < a < 1/2$ が有理数であるとき, $Q(s,a)$ はリーマン予想の類似を充たさない．しかしながら, $Q(s,a)$ は $\zeta(s)$ と同様に, $Q(\overline{s},a) = \overline{Q(s,a)}$ と関数等式 *(2.3)* を充たし，全ての実零点は負の偶数上にのみ存在する.

2.2 Remarks

Remark

関数等式 (2.3) は (1.1) に $Q(s,a)$ と $Q(1-s,a)$ を $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ に入れ替えれば完全に一致することを注意しておく．つまり $Q(s,a)$ と $\zeta(s)$ に対して次が成り立つ．$G(s)$ を位数有限の整関数，$P(s)$ を多項式とし，

$$h(s) := \frac{G(s)}{P(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{\nu(n)^s}, \qquad c(n) \in \mathbb{C}, \quad \nu(n) \in \mathbb{R},$$

ただし上の一般ディリクレ級数 $\sigma > 1$ で絶対収束すると仮定する．さらに $h(s)$ は次の関数等式を充たす

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)h(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)h(1-s). \tag{H2$^\diamondsuit$}$$

(1.3) に現れた関数 $(2^s-1)\zeta(s)$ と $(2^{1-s}-1)\zeta(s)$，ディリクレ L 関数 ([3, Theorem 10.2.14])，エプスタインゼータ関数 ([3, Theorem 10.2.14])，$2\zeta(s)$ とは異なる場合の [7, Theorems 2.1 and 2.2] に現れる関数，でさえも (H2$^\diamondsuit$) を充たしていない．

$Q(s,a)$ の零点は $\zeta(s)$ 同様に直線 $t=0$ と $\sigma=1/2$ に関して対象に分布している．さらに $Q(s,a)$ はリンデレーエフ予想の類似を充たすと予想される．しかし，$1/4<a<1/3$ 又は $1/3<a<1/2$ が有理数であるとき，$Q(s,a)$ はリーマン予想の類似を充たさない．ちなみに，$a=1/4,\ 1/3$ 又は $1/2$ であるときは次が成り立つ．

$$Q(s,1/2)=2(2^s+2^{1-s}-2)\zeta(s), \qquad Q(s,1/3)=(3^s+3^{1-s}-2)\zeta(s),$$
$$Q(s,1/4)=(4^s-2^s+4^{1-s}-2^{1-s})\zeta(s).$$

Daydream

これからの内容は空想といってよいほど根拠がないものもあるので，本論文には記載していない．上の注意から $Q(s,a)$ は複素零点の情報を除き，極めて $\zeta(s)$ に近い．オイラー積を持つディリクレ L 関数を除けば，$\zeta(s)$ に最も近いといってもよいのかもしれない．$a=1/4,\ 1/3$ 又は $1/2$ でない場合は，$Q(s,a)$ は絶対収束領域や臨界領域に複素零点を持つと予想される．実際に $1/4<a<1/3$ 又は $1/3<a<1/2$ が有理数であるときはそうである．$a=1/4,\ 1/3$ 又は $1/2$ という例外は，定理にある $1/4\le a\le 1/2$ の両端だけでなく，閉区間 $[1/4,1/2]$ 内にあるというのも面白い．

パラメーター a を $1/4$ から $1/2$ に動かすということを考えてみよう．$a=1/4$ であるときはリーマン予想の類似を充たす．しかし a が $1/4$ より少しでも大きくなるとリーマン予想の類似を充たさないと予想でき，有理数である場合は実際に充たさないので，以後 a は有理数として動かす．もちろん $1/4,\ 1/3$ 又は $1/2$ に限りなく近い有理数は存在する．a が $1/4,\ 1/3$ 又は $1/2$ に限りなく近づくとき，命題 2.6 に現れる零点の上限を表す a の関数 $C_a^\sharp(\delta)$ と $C_a^\sharp(\sigma_1,\sigma_2)$ はどうなるのか？もちろん 0 に収束するのだが，その様子は？一様に零点密度が “薄く” なるのか？それともどんどん臨界線に零点が “寄って” いくのか？ $1/4$ から $1/3$ に動く場合は，一度現れた臨界線上から外れた零点がまた消えるのか，それともまた寄っていくのか，その両方か？などなど考えると，ここで定義した $Q(s,a)$ は稀有な関数であり，さらなる研究が望まれるのではないだろうか．

Acknowledgments

The author was partially supported by JSPS grant 16K05077.

参考文献

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1976.

[2] S. Bochner and K. Chandrasekharan, *On Riemann's functional equation.* Ann. of Math. (2) **63** (1956), 336–360.

[3] H. Cohen, *Number theory. Vol. II. Analytic and modern tools*, Graduate Texts in Mathematics, 240. Springer, New York, 2007.

[4] H. Hamburger, *Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion.* (German) Math. Z. **10** (1921), no. 3-4, 240–254.

[5] E. Hecke, *Herleitung des Euler-Produktes der Zetafunktion und einiger L-Reihen aus ihrer Funktionalgleichung.* Math. Ann. **119** (1944). 266–287.

[6] M. Knopp, *On Dirichlet series satisfying Riemann's functional equation.* Invent. Math. **117** (1994), no. 3, 361–372.

[7] J. C. Lagarias, and W.-C. W. Li, *The Lerch zeta function I. Zeta integrals.* Forum Math. **24** (2012), no. 1, 1–48.

[8] T. Matsusaka, *Real zeros of the Hurwitz zeta function*, Acta Arithmetica, **183** (2018), no. 1, 53–62. (arXiv: 1610.07945).

[9] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **160** (2016), no. 1, 39–50.

[10] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval* $(-1, 0)$. J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), no. 1, 42–52.

[11] T. Nakamura, *Zeros and the functional equations of the quadrilateral zeta function*, arXiv:1712.05169v11.

[12] C. Siegel *Bemerkung zu einem Satz von Hamburger uber die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.* Math. Ann. **86** (1922), no. 3-4, 276–279.

[13] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function,* Second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.