Zeros of polynomials of derivatives of the Riemann zeta function

九州大学　多重ゼータ研究センター　小野塚　友一
Tomokazu Onozuka
Multiple Zeta Research Center
Kyushu University

1 Introduction

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は数論における重要な関数の 1 つであるが、それは $\zeta(s)$ の零点と素数分布との結びつきによるものである。そのため零点については多くの研究が存在するがまだ未解決の問題も残っている。その中でも一番有名なのが、いわゆるリーマン予想と呼ばれる問題である。リーマン予想とは $\zeta(s)$ の非自明な零点が全て臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上に位置するであろうという予想であり、リーマンにより提唱されて以来 150 年以上経ってなお未解決のままとなっている。

リーマンゼータ関数そのものだけでなく、その導関数 $\zeta'(s)$ の研究も行われている。導関数を研究する動機の 1 つとしてリーマン予想との同値命題が挙げられる。(Speiser[13])

「リーマン予想が真 $\iff \zeta'(s)$ が $0 < \Re(s) < 1/2$ 上に零点を持たない」

Levinson と Montgomery[9] はこの結果の類似として k 階導関数 $(k \geq 1)$ の場合を考えた。

「リーマン予想が真 $\Longrightarrow \zeta^{(k)}(s)$ が $\Re(s) < 1/2$ 上に非実零点を有限個しか持たない」

Yildirim[15] は $k = 2, 3$ の場合について精密な計算を行い次の結果を得た。

「リーマン予想が真 $\Longrightarrow \zeta''(s)$ と $\zeta'''(s)$ が $0 \leq \Re(s) < 1/2$ 上に零点を持たない」

このようにリーマン予想は $\zeta^{(k)}(s)$ の零点とも関わりあっている。

$\zeta^{(k)}(s)$ の零点に関する研究はリーマン予想との関連を探るだけでなく、その分布などについても調べられている。以下ではそれらの研究を紹介し

ていくが、そのための記号を導入しよう。関数 $f(s)$ に対して $N_{f(s)}(T_1,T_2)$、$N^{+}_{f(s)}(c;T_1,T_2)$、$N^{-}_{f(s)}(c;T_1,T_2)$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
N_{f(s)}(T_1,T_2) &:= \#\{\rho\ ;f(s)\text{ の零点} \mid T_1<\Im(\rho)<T_2\}\\
N^{+}_{f(s)}(c;T_1,T_2) &:= \#\{\rho\ ;f(s)\text{ の零点} \mid T_1<\Im(\rho)<T_2,\ \Re(s)>c\}\\
N^{-}_{f(s)}(c;T_1,T_2) &:= \#\{\rho\ ;f(s)\text{ の零点} \mid T_1<\Im(\rho)<T_2,\ \Re(s)<c\}
\end{aligned}
$$

と定義する。ただしこれらは零点の重複度を込めて個数をカウントしていることを注意しておく。このときリーマンゼータ関数について Riemann-von Mangoldt formula と呼ばれる式が知られている。

$$N_{\zeta(s)}(0,T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$

この類似として Berndt[1] は k 階導関数の零点の個数を評価した。$(k\geq 1)$

$$N_{\zeta^{(k)}(s)}(0,T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$

このように $\zeta^{(k)}(s)$ の零点は T までにだいたい $(T/2\pi)\log T$ 個存在するが、リーマン予想が正しければこれらの零点は有限個を除き実部が $1/2$ 以上となっている。実際に臨界線 $\Re(s)=1/2$ より右側に多くの零点が存在しそうであることを Levinson と Montgomery[9] は次の式により示した。

$$
\begin{aligned}
&2\pi\sum_{T<\gamma^{(k)}<T+U}\left(\beta^{(k)}-\frac{1}{2}\right)\\
&\qquad=kU\log\log\frac{T}{2\pi}-U\log\frac{(\log 2)^k}{2^{1/2}}+O\left(\frac{U^2}{T\log T}\right)+O\left(\log T\right)
\end{aligned}
$$

ただし $0<U<T$ かつ $k\geq 1$ とし、$\rho^{(k)}=\beta^{(k)}+i\gamma^{(k)}$ は $\zeta^{(k)}(s)$ の零点を表している。Levinson と Montgomery[9] は更にほとんどの零点が臨界線 $\Re(s)=1/2$ 付近にあることも示した。

$$N^{+}_{\zeta^{(k)}(s)}\left(\frac{1}{2}+\delta;0,T\right)+N^{-}_{\zeta^{(k)}(s)}\left(\frac{1}{2}-\delta;0,T\right)=O\left(\frac{T\log\log T}{\delta}\right)$$

これは $\delta>0$ について一様に評価されており、特に $\delta=(\log\log T)^2/\log T$ ととれば

$$N^{+}_{\zeta^{(k)}(s)}\left(\frac{1}{2}+\delta;0,T\right)+N^{-}_{\zeta^{(k)}(s)}\left(\frac{1}{2}-\delta;0,T\right)=O\left(\frac{N_{\zeta^{(k)}(s)}(0,T)}{\log\log T}\right)$$

となる。この式により臨界線から $(\log\log T)^2/\log T$ 以上離れている零点が少ないこと、言い換えれば臨界線に近い位置にほとんどの零点が集まっていることが分かる。

ここまではリーマンゼータ関数の導関数の零点についての結果を紹介してきた。これとは別の研究としてリーマンゼータ関数の a 点（または a 値ともいう）の研究も存在する。a 点とは $\zeta(s)=a$ となる点 s のことで、言い換えると $\zeta(s)-a$ の零点である。一般に任意の複素数 a について調べられている。a 点に関する初期の結果は Landau[2] により与えられ、a 点の個数を評価している。

$$N_{\zeta(s)-a}(1,T)=\begin{cases}\dfrac{T}{2\pi}\log\dfrac{T}{2\pi}-\dfrac{T}{2\pi}+O(\log T) & (a\neq 1)\\[2ex] \dfrac{T}{2\pi}\log\dfrac{T}{4\pi}-\dfrac{T}{2\pi}+O(\log T) & (a=1)\end{cases}$$

主要項の log の中は一般に $T/2\pi$ であるが $a=1$ のときだけ $T/4\pi$ となっている。これはディリクレ級数表示の初項の違いにより起こる現象である。一般に $\zeta(s)-a$ は

$$\zeta(s)-a=(1-a)+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

とディリクレ級数で書けるが、$a=1$ の場合には

$$\zeta(s)-1=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

と初項が $1/2^s$ になる。これが原因で log の中が変化するのである。同様のことは実は $\zeta(s)$ と $\zeta^{(k)}(s)$ でも起きており、ディリクレ級数の初項が 1 の $\zeta(s)$ は log の中が $T/2\pi$ であり、初項が $(-\log 2)^k/2^s$ の $\zeta^{(k)}(s)$ は log の中が $T/4\pi$ となっている。

a 点の個数については著者 [11] がリーマンゼータ関数の導関数の場合を調べており、次の結果が得られている。

$$N_{\zeta^{(k)}(s)-a}(1,T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$

ただし $k\geq 1$ かつ $a\neq 0$ としている。この場合、$\zeta^{(k)}(s)-a$ のディリクレ級数は $-a(\neq 0)$ が初項となるので log の中は $T/2\pi$ である。

これらの結果のさらなる一般化として Koutsaki、Tamazyan、Zaharescu[5] の 3 人は $\zeta^{(j)}(s)$ の線形和 $f(s)=c_0\zeta(s)+c_1\zeta'(s)+\cdots+c_k\zeta^{(k)}(s)$ の零点を調べて次を得た。

$$N_{f(s)}(0,T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$

ただし $c_0,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ であり $c_0,c_k\neq 0$ と仮定している。また中村 [10] は $\zeta^{(j)}(s)$ の多項式 $P(s)$ について普遍性定理を用いて調べ、任意の $1/2<\sigma_1<$

$\sigma_2 < 1$ に対して定数 C が存在して $P(s)$ は $\sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2$ と $0 < \Im(s) < T$ を満たす範囲に CT 個以上零点を持つことを示している。

Levinson[8] により臨界線付近の a 点の状況も調べられている。

$$N^{+}_{\zeta(s)-a}\left(\frac{1}{2}+\delta;T,T+U\right)+N^{-}_{\zeta(s)-a}\left(\frac{1}{2}-\delta;T,T+U\right)=O\left(\frac{U\log\log T}{\delta}\right)$$

ただし $T^{1/2} \le U \le T$、$\delta = (\log\log T)^2/\log T$、$a \in \mathbb{C}$ である。Levinson は $\delta = (\log\log T)^2/\log T$ の場合の証明を与えているが、同様に一般の $\delta > 0$ に対しても一様に評価できると述べている。著者 [11] はこの結果についても導関数の a 点に一般化しており次の式を得ている。

$$N^{+}_{\zeta^{(k)}(s)-a}\left(\frac{1}{2}+\delta;T,T+U\right)+N^{-}_{\zeta^{(k)}(s)-a}\left(\frac{1}{2}-\delta;T,T+U\right)=O\left(\frac{U\log\log T}{\delta}\right)$$

ただし $\delta = (\log\log T)^2/\log T$ かつ $T^{\alpha} \le U \le T(\alpha > 1/2)$ である。

ここまでは零点や a 点の分布についてまとめてきた。次に零点や a 点に関する和の話をする。$x > 1$ に対し Landau[6] は次の和の漸近式を示した。

$$\sum_{0<\gamma<T} x^{\rho} = -\Lambda(x)\frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

ただし $\Lambda(x)$ は x が整数のときはフォンマンゴルト関数であり、非整数のときは $\Lambda(x) = 0$ と定義する。また $\rho = \beta + i\gamma$ は $\zeta(s)$ の零点を表している。この漸近式の応用として次の事実が証明できる。

「非零実数 α に対して $\{\alpha\gamma\}_{\gamma>0}$ は mod 1 で一様に分布する」

この事実は最初に Rademacher[12] によりリーマン予想の仮定の下で示された。その後、リーマン予想の仮定を外せると Elliot[3] が主張し、Hlawka[4] がリーマン予想を仮定しない証明を与えた。Landau の結果の a 点版は Steuding[14] によって示された。(以下では $\rho_a = \beta_a + i\gamma_a$ を $\zeta(s)$ の a 点とする。)

$$\sum_{0<\gamma_a<T} x^{\rho_a} = \left(\alpha(x) - x\Lambda\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{T}{2\pi} + O(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

ただし $x \ne 1$ は正の数であり、$\alpha(x)$ は次の級数の係数により定義する。

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)-a} = \sum_{d\in 2^{-n}\mathbb{N}\ (n\in\mathbb{N})} \frac{\alpha(d)}{d^s}$$

$a \ne 1$ のときには x が整数でなければ $\alpha(x) = 0$ となる。$a = 1$ の場合、状況はもう少し複雑で、どんな整数 n に対しても $2^n x$ が整数でなければ $\alpha(x) = 0$ となる。これにより Steuding[14] は次を示した。

「非零実数 α に対して $\{\alpha\gamma_a\}_{\gamma_a>0}$ は mod 1 で一様に分布する」
この和は ($x>1$ の場合には) さらに導関数の a 点にまで拡張され次の式が成り立つ [11]。($\rho_a^{(k)}=\beta_a^{(k)}+i\gamma_a^{(k)}$ を $\zeta^{(k)}(s)$ の a 点とする。)

$$\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T} x^{\rho_a^{(k)}}$$
$$=\begin{cases} \dfrac{T}{2\pi} \displaystyle\sum_{\substack{l\geq 0\\ n_0,\ldots,n_l\geq 2\\ x=n_0\cdots n_l}} \dfrac{(-1)^{k(l+1)}}{a^{l+1}}(\log n_0)^{k+1}(\log n_1\cdots\log n_l)^k+O(\log T) & (a\neq 0)\\ \dfrac{T}{2\pi} \displaystyle\sum_{\substack{l\geq 0\\ n_0\geq 2\\ n_1,\ldots,n_l\geq 3\\ x=n_0\cdots n_l/2^{l+1}}} \left(\dfrac{-1}{(\log 2)^k}\right)^{l+1}(\log n_0)^{k+1}(\log n_1\cdots\log n_l)^k+O(\log T) & (a=0)\end{cases}$$

ただし $k\geq 1$、$a\in\mathbb{C}$、$x>1$ である。$T/2\pi$ の後に複雑な和があるが、これは次の級数の係数 $\alpha(x)$ を具体的に書き表したものである。

$$\frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{\zeta^{(k)}(s)-a}=\sum_{d\in 2^{-n}\mathbb{N}\ (n\in\mathbb{N})}\frac{\alpha(d)}{d^s}$$

$a\neq 0$ のとき、x が整数でなければ右辺の複雑な和は 0 である。$a=0$ のとき、どんな整数 n に対しても $2^n x$ が整数にならなければ右辺の和は 0 である。この結果からやはり次の事実が得られる [7]。
「非零実数 α に対して $\{\alpha\gamma_a^{(k)}\}_{\gamma_a^{(k)}>0}$ は mod 1 で一様に分布する」

2　主結果

今回の主結果は $\zeta(s),\zeta'(s),\ldots,\zeta^{(k)}(s)$ の多項式に関するものである。$k,M\in\mathbb{N}$、$d_{lj}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$、$c_j\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ としたとき、多項式によりできる関数 $F(s)$ を次で定義する。

$$F(s):=\sum_{j=1}^{M}c_j\zeta^{(0)}(s)^{d_{0j}}\zeta^{(1)}(s)^{d_{1j}}\cdots\zeta^{(k)}(s)^{d_{kj}}$$

ただし $F(s)$ は定数関数でないものとする。1900 年の国際数学者会議の場で Hilbert が指摘したことであるが、$\zeta(s)$ はどんな微分方程式の解にもならない。そのため非零な d_{lj} が 1 つでもあれば $F(s)$ は定数関数にならないことを注意しておく。

関数 $F(s)$ に対し 2 つの degree を定義する。1 つめは次で定める。

$$\deg_1(F(s)) := \max_{1\le j\le M}\sum_{l=0}^{k} d_{lj}$$

特に単項のみの場合には単に肩の数の和になる。

$$\deg_1\left(\zeta^{(0)}(s)^{d_{0j}}\zeta^{(1)}(s)^{d_{1j}}\cdots\zeta^{(k)}(s)^{d_{kj}}\right) = \sum_{l=0}^{k} d_{lj}$$

2 つめの degree は重み付き degree である。

$$\begin{aligned}&\deg_2(F(s))\\ &:= \max\left\{\sum_{l=0}^{k} l d_{lj} \;\middle|\; \deg_1\left(\zeta^{(0)}(s)^{d_{0j}}\cdots\zeta^{(k)}(s)^{d_{kj}}\right) = \deg_1(F(s)), 1\le j\le M\right\}\end{aligned}$$

これは次のようにも書き換えられる。

$$\deg_2(F(s)) = \max\left\{\sum_{l=0}^{k} l d_{lj} \;\middle|\; \sum_{l=0}^{k} d_{lj} = \deg_1(F(s)), 1\le j\le M\right\}$$

例えば単項の場合には次のように微分階数の重み付き次数となっている。

$$\deg_2\left(\zeta^{(0)}(s)^{d_{0j}}\zeta^{(1)}(s)^{d_{1j}}\cdots\zeta^{(k)}(s)^{d_{kj}}\right) = \sum_{l=0}^{k} l d_{lj}$$

今回、主結果を計算するために次を仮定した。

$$\sum_{j\in J} c_j \ne 0, \tag{2.1}$$

ただし J は次の集合である。

$$J := \left\{ j\in[1,M] \;\middle|\; \begin{array}{l}\deg_1\left(\zeta^{(0)}(s)^{d_{0j}}\cdots\zeta^{(k)}(s)^{d_{kj}}\right) = \deg_1(F(s)),\\ \deg_2\left(\zeta^{(0)}(s)^{d_{0j}}\cdots\zeta^{(k)}(s)^{d_{kj}}\right) = \deg_2(F(s))\end{array}\right\}$$

以下では主結果を紹介していくが、$s=\sigma+it$ とし、また $\rho_F=\beta_F+i\gamma_F$ を $F(s)$ の零点とする。最初の結果は $F(s)$ の非零領域を与える。

Theorem 2.1. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。任意の $\varepsilon>0$ に対して、実数 $E_{1F\varepsilon}=E_{1F}$ と E_{2F} が存在して次の領域上で $F(s)\ne 0$ である。

$$\{s\in\mathbb{C} \mid \sigma\le E_{1F}, |s+2n|\ge\varepsilon\ (n\in\mathbb{N})\}\cup\{s\in\mathbb{C}\mid\sigma\ge E_{2F}\}$$

次の結果は実軸付近の零点に関する結果である。$\mathcal{C}_{n,\varepsilon}$ を

$$\mathcal{C}_{n,\varepsilon} := \{s \in \mathbb{C} \mid |s+2n| < \varepsilon\}$$

により定める。

Theorem 2.2. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対してある正の整数 $N = N_{F,\varepsilon}$ が存在して、$n \geq N$ を満たす各領域 $\mathcal{C}_{n,\varepsilon}$ 内に $F(s)$ はちょうど $\deg_1(F(s))$ 個の零点を持つ。

次の結果を述べるために n_F を次で定める。

$$F(s) = \sum_{n=n_F}^{\infty} \frac{\eta_n}{n^s} \qquad (\eta_{n_F} \neq 0)$$

これは $F(s)$ をディリクレ表示したときの初項を表している。

Theorem 2.3. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。十分大きい T に対して次式が成り立つ。

$$N_{F(s)}(1,T) = \frac{\deg_1(F(s))T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} - \frac{T}{2\pi} \log n_F + O(\log T)$$

この結果は零点の個数を評価したものである。次に臨界線と $F(s)$ の零点との関係を見る。

Theorem 2.4. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。十分大きい T と $T^\alpha \leq U \leq T\,(\alpha > 1/2)$ に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &2\pi \sum_{T<\gamma_F<T+U} \left(\beta_F - \frac{1}{2}\right) \\ &\qquad = \deg_2(F(s)) U \log\log T + U \log \left| \frac{\sum_{j\in J} c_j}{\eta_{n_F}/n_F^{1/2}} \right| + O\left(\frac{U}{\log T}\right) \end{aligned}$$

Theorem 2.5. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。十分大きい T と $T^\alpha \leq U \leq T\,(\alpha > 1/2)$ に対して次式が $\delta > 0$ に関して一様に成り立つ。

$$N^+_{F(s)}\left(\frac{1}{2}+\delta; T, T+U\right) + N^-_{F(s)}\left(\frac{1}{2}-\delta; T, T+U\right) = O\left(\frac{U \log\log T}{\delta}\right)$$

定理 2.4 より $\deg_2(F(s))$ が正の場合には $F(s)$ の零点は臨界線の右側に多く存在していそうだと推測できる。一方、$\deg_2(F(s)) = 0$ の場合には、零点の偏りは $|\sum_{j\in J} c_j|$ と $|\eta_{n_F}/n_F^{1/2}|$ の比率により変わる。もし $|\sum_{j\in J} c_j| > |\eta_{n_F}/n_F^{1/2}|$ なら零点は臨界線の右に多く分布しそうで、逆に $|\sum_{j\in J} c_j| <$

$|\eta_{n_F}/n_F^{1/2}|$ なら左に多く分布しそうである。そのどちらでもない $|\sum_{j\in J} c_j| = |\eta_{n_F}/n_F^{1/2}|$ の場合には、定理 2.4 からは零点の偏りの情報は得られない。また定理 2.5 より、多項式 $F(s)$ の場合にもほとんどの零点は臨界線の近くに存在することが分かる。

次に零点をわたる和を見てみる。

Theorem 2.6. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。実数 $x > 1$ と十分大きい T に対して次式が成り立つ。

$$\sum_{1<\gamma_F<T} x^{\rho_F} = \left(\alpha_{(F'/F)(s)}(x)\right) \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

ただし $\alpha_{(F'/F)(s)}(x)$ は次の級数に表れる係数である。

$$\frac{F'}{F}(s) = \sum_{d\in n_F^{-n}\mathbb{N}\ \ (n\in\mathbb{N})} \frac{\alpha_{(F'/F)(s)}(d)}{d^s}$$

これらの結果を用いて次の系が示せる。

Corollary 2.7. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。非零実数 α に対して数列 $\{\alpha\gamma_F\}_{\gamma_F>1}$ は *mod 1* で一様に分布する。

3 条件 (2.1) について

主結果の証明において次の補題が重要となる。

Lemma 3.1. $F(s)$ は条件 (2.1) を満たすとする。任意の $c > 1$ と $\varepsilon > 0$ に対して、領域 $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > c, |s-(2n-1)| \geq \varepsilon\ (n \in \mathbb{N})\}$ 内で次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &F(1-s) \\ &= \left(\sum_{j\in J} c_j\right) (-\log s)^{\deg_2(F(s))} \left\{2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\ \zeta(s)\right\}^{\deg_1(F(s))} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\log s|}\right)\right) \end{aligned}$$

これは $F(s)$ の関数等式のようなものである。この補題において右辺の主要項が消えないための条件として条件 (2.1) が必要となる。これをより精密化できれば、条件 (2.1) は必要なくなる。これが今後の課題である。

参考文献

[1] B. C. Berndt, *The number of zeros for* $\zeta^{(k)}(s)$, J. Lond. Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.

[2] H. Bohr, E. Landau, J. E. Littlewood, *Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$*, Bull. de l'Acad. royale de Belgique (1913), 3–35.

[3] P. D. T. A. Elliott, *The Riemann zeta function and coin tossing*, J. Reine Angew. Math. **254** (1972), 100–109.

[4] E. Hlawka, *Über die Gleichverteilung gewisser Folgen, welche mit den Nullstellen der Zetafunktion zusammenhängen*, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. Abt. II **184** (1975), 459–471.

[5] K. P. Koutsaki, A. Tamazyan and A. Zaharescu, *On the zeros of linear combinations of derivatives of the Riemann zeta function*, Int. J. Number Theory **12** (2016), 1703–1723.

[6] E. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion*, Math. Ann. **71**, (1912), 548–564.

[7] J. Lee, T. Onozuka and A. I. Suriajaya, *Some probabilistic value distributions of the Riemann zeta function and its derivatives*, Proc. of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **92**, No. 7, (2016), 82–83.

[8] N. Levinson, *Almost all roots of $\zeta(s) = a$ are arbitrarily close to $\sigma = 1/2$*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** No. 4, (1975), 1322–1324.

[9] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133**, (1974), 49–65.

[10] T. Nakamura, *Zeros of polynomials of derivatives of zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **145**, (2017), 2849–2858.

[11] T. Onozuka, *On the a-points of derivatives of the Riemann zeta function*, European Journal of Mathematics **3**, (2017), 53–76.

[12] H. A. Rademacher, *Fourier Analysis in Number Theory, Symposium on Harmonic Analysis and Related Integral Transforms*, Cornell Univ., Ithaca, N.Y., 1956., in; *Collected Papers of Hans Rademacher*, Vol. II, 434–458, Massachusetts Inst. Tech., Cambridge, Mass., 1974.

[13] R. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*, Math. Ann. **110**, (1935), 514–521.

[14] J. Steuding, *One hundred years uniform distribution modulo one and recent applications to Riemann's zeta function*, Topics in Math. Analysis and Applications **94**, (2014), 659–698.

[15] C. Y. Yildirim, *Zeros of $\zeta''(s)$ & $\zeta'''(s)$ in $\sigma < 1/2$*, Turkish J. Math. **24**, no. 1, (2000), 89–108.

Multiple Zeta Research Center, Kyushu University
Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395
Japan
E-mail: t-onozuka@math.kyushu-u.ac.jp