On the transcendence of power series at algebraic integer points

Hajime Kaneko
Institute of Mathematics, University of Tsukuba
Research Core for Mathematical Sciences, University of Tsukuba

Abstract

べき級数に代数的数を代入した値の超越性は, 多くの数学者によって研究された. 特に, 部分空間定理の応用により, 様々なべき級数に対して, 値の超越性が証明された. 一方, Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance [4] によって, nonzero digit に着目するという新しい手法が確立され, 超越性の研究が飛躍的に進んだ. しかし, この手法は, 代入する代数的数が Pisot 数及び Salem 数の逆数である場合にのみ適用可能であった. 本稿では, より一般の代数的整数の逆数を代入する場合に, 値の超越性に関する部分的な結果を得たので, 報告する.

1 導入

べき級数に代数的数を代入した値が超越数であるかどうかを判定することは, 超越数論において主な研究テーマの一つである. 本稿では, 簡単のため整数係数のべき級数のみを考察する. 本稿では, $\mathbb{N}$ および $\mathbb{Z}^+$ により, 非負整数全体の集合および正整数全体の集合を表す. $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^\infty$ に対して, この数列を係数として持つ形式的べき級数 $f(\boldsymbol{t}; X)$ を

$$f(\boldsymbol{t}; X) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n X^n \tag{1.1}$$

により定義する. 本稿では, 無限に多くの非負整数 n が存在して $t_n \neq 0$ となる場合のみ扱う.

さて, 特に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $t_n \geq 0$ であり, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して $t_n = 1$ の場合は, $f(\boldsymbol{t}; X)$ を以下のように別の表示で表すことができる:

$$f(\boldsymbol{t}; X) = \sum_{m=0}^{\infty} X^{v_m} =: g(\boldsymbol{v}; X) \tag{1.2}$$

ただし, $\boldsymbol{v} = (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は非負整数列であり, 十分大きい m に対して, $v_{m+1} > v_m$ が成り立つ. ここで, 数列 $\boldsymbol{v}$ は, べき級数 $f(\boldsymbol{t}; X) = g(\boldsymbol{v}; X)$ において, nonzero digit の出現頻度と関連がある.

2 章では, 部分空間定理を用いて得られる結果を紹介する. 特に, べき級数が (1.2) の形に書ける場合に Corvaja, Zannier [10] の結果を紹介する. 次に, Bailey, Borwein, Crandall,

Pomerance [4] による結果およびその後の発展を紹介する．べき級数における nonzero digit の個数に着目することにより, それまでの手法では適用できない値の超越性を示せるようになった．ただし, 現在知られている超越性の結果は, 代入する値が $X = 1/\beta$ (β は Pisot 数または Salem 数) の形の場合に限定されている．今回, β が一般的な代数的整数の場合についても, 超越性の部分的な結果を得ることに成功したので, 4 章で主結果として紹介する．なお, 本稿では実数 x の整数部分, 小数部分をそれぞれ $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ と書く．

2　部分空間定理による超越性の結果

まず, 簡単のために (1.2) のように表されるべき級数の代数点における値の超越性に関する結果を紹介する．$\boldsymbol{v} = (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が,

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{v_{m+1}}{v_m} > 1 \tag{2.1}$$

を満たすと仮定する．このとき, Corvaja と Zannier [10] は, $0 < |\alpha| < 1$ を満たす任意の代数的数 α に対して, $g(\boldsymbol{v};\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{v_m}$ が超越数であることを示した．なおこの判定法は, 係数が負の整数を含む場合にも適用できる．上記の判定法の適用例として, k を 2 以上の整数とする．すると,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{k^m}$$

は超越数である．

Adamczewski は, α が Pisot 数または Salem 数の逆数の場合に, 上記の結果を改良した．ここで, Pisot 数および Salem 数の定義を復習する．$\beta > 1$ を代数的整数とし, その共役を $\beta_1 = \beta, \beta_2, \ldots, \beta_d$ と書く．β が Pisot 数であるとは, 任意の $i \geq 2$ に対して, $|\beta_i| < 1$ が成り立つことをいう．例えば, 黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$ は Pisot 数である．また, 2 以上の整数 b も Pisot 数である．一方, β が Salem 数であるとは, 以下の成立が成り立つことをいう: 任意の $i \geq 2$ に対して $|\beta_i| \leq 1$ であり, ある $j \geq 2$ が存在して $|\beta_j| = 1$．例えば, $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1 = 0$ の 1 より大きい解は Salem 数である．

さて, β は Pisot 数または Salem 数であるとする．(2.1) より弱い条件である

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{v_{m+1}}{v_m} > 1 \tag{2.2}$$

を仮定する．このとき, Adamczewski [1] は, $g(\boldsymbol{v};\beta^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{-v_m}$ が超越数であることを示した．

上記のように, 隣り合う nonzero digit の gap が大きい場合に, 部分空間定理を超越性の判定法に応用することができる．部分空間定理は, 他にも応用例がある．ここでは, 簡単のために実数の b 進展開に関連のある結果を紹介する．ただし, b は 2 以上の固定された整数である．実数 ξ の b 進展開を

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} t_n b^{-n}$$

とかく．ただし, $t_0 = \lfloor \xi \rfloor$ である．また, $n \geq 1$ に対して $t_n = t_n(b;\xi) \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ である．一意性を保証するために, 無限に多くの n に対して $t_n \leq b-2$ であるとする．Borel

[6] は, ξ が代数的無理数の場合, ξ は b 進展開に関して正規数であると予想した．さて, ξ が b 進展開に関する正規数の定義を復習する．正整数 L および $w_1, \ldots, w_L \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ に対して,

$$\lambda_N(b, \xi; w_1, \ldots, w_L) := \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \le N, (t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+L-1}) = (w_1, w_2, \ldots, w_L)\}$$

とおく． このとき, ξ が b 進展開に関して正規数であるとは, 任意の正整数 L および $w_1, \ldots, w_L \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ に対して

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \lambda_N(b, \xi; w_1, \ldots, w_L) = \frac{1}{b^L}$$

が成り立つことである．

代数的無理数の正規性に関する Borel の予想は未解決問題である．もしこの予想が証明されれば, 超越性に関する強力な判定法を与える． 例えば, 2 以上の整数 k に対して, $\eta_k := \sum_{m=0}^{\infty} b^{-n^k}$ とおく．すると, η_k は明らかに無理数であり, また b 進展開において正規数ではない．したがって, Borel の予想が正しければ, η_k は超越数である．ところが, $k \ge 3$ の場合は, η_k が超越数かどうかは未解決である．なお, $k = 2$ の場合は, 超越性が Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, Shiokawa [11] および Bertrand [5] により独立に証明されている．

Borel の予想に対する, 部分的な結果を紹介する．まず, 代数的無理数の b 進展開に関する complexity function $\rho(b, \xi; L)$ を, 以下により定義する:

$$\rho(b, \xi; L) := \mathrm{Card}\{(t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+L-1}) \in \{0, 1, \ldots, b-1\}^L \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

ξ が b 進展開において正規数ならば, 任意の正整数 L に対して, $\rho(b, \xi; L) = b^L$ が成立する．Adamczewski と Bugeaud [3] は, 代数的無理数 ξ に対して,

$$\lim_{L \to \infty} \frac{\rho(b, \xi; L)}{L} = \infty$$

であることを示した．さらに, $\delta < 1/11$ を満たす任意の実数 δ に対して, Bugeaud と Evertse [9] は,

$$\limsup_{L \to \infty} \frac{\rho(b, \xi; L)}{L (\log L)^{\delta}} = \infty$$

であることを示した．上記の結果により, b 進展開の digit が Sturmian sequence など, “小さな complexity” を持つならば, その実数は超越数であることがわかる．

次に, N 桁目までの digit の変化数 $\gamma(b, \xi; N)$ を以下により定義する:

$$\gamma(b, \xi; N) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \le N,\ t_n \ne t_{n+1}\}.$$

Bugeaud と Evertse [9] は, d 次の代数的無理数 ξ に対して, 以下を示した: 計算可能な絶対正定数 C_1, および b, ξ にのみ依存する正定数 $C_2(b, \xi)$ が存在して, $N \ge C_2(b, \xi)$ ならば

$$\gamma(b, \xi; N) \ge \frac{C_1}{(\log 6d)^{1/2}} \frac{(\log N)^{3/2}}{(\log \log N)^{1/2}}. \tag{2.3}$$

例えば, 2/3 より大きい実数 θ に対して, 数列 $\boldsymbol{w}(\theta) = (w(\theta; m))_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$w(\theta; m) = \left\lfloor 2^{m^\theta} \right\rfloor \tag{2.4}$$

とおく. すると, 任意の Pisot 数および Salem 数 β に対して,

$$g(\boldsymbol{w}(\theta); \beta^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-w(\theta;m)}$$

は超越数である. また,

$$\xi_\theta := \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^{-w(\theta;m)}$$

は超越数である. 正整数 h に対して, $2^h - 1$ の 2 進展開に 1 しか現れないことから, ξ_θ が (2.3) を満たさないためである.

$2/3 < \theta < 1$ ならば, 数列 $\boldsymbol{w}(\theta)$ は条件 (2.1) を満たさない. 実際に, 平均値の定理により,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{w(\theta; m+1)}{w(\theta; m)} = 1$$

であることがわかる. したがって, digit 変化数の評価式 (2.3) は, 超越性の新しい判定法を与える. なお, 3 章で扱う判定法と比較すると, 数列 $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^\infty$ が負の値をとる場合にも超越性を証明できることが特徴である.

その後, 評価式 (2.3) は Bugeaud [8] によって, Pisot 数および Salem 数 β によるベータ展開に関する digit 変化数に一般化された.

3 Nonzero digit と関連のある超越性の結果

前章で実数の b 進展開を定義したが, この概念は Rényi [16] により一般に実数 x の β 展開へと一般化された. 本章では, まず Pisot 数及び Salem 数 β に対して, 代数的数 ξ の nonzero digit に関して知られている結果を紹介する. その後, この結果の超越数論への応用を考察する. 本稿では, 簡単のために $0 \le x < 1$ の場合に β 展開を定義する. 1 より大きい実数 β に対して, 写像 $T_\beta : [0, 1) \to [0, 1)$ を, $T_\beta(x) = \{\beta x\}$ により定義する. 非負整数 m に対して, T_β の m 回反復合成写像を T_β^m と書くことにする. このとき, 実数 $x \in [0, 1)$ の β 展開は,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \beta^{-n}$$

で与えられる. ただし, $t_n = t_n(\beta; \xi) = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(x) \rfloor$ である. 任意の $n \ge 1$ に対して, 明らかに $0 \le t_n \le \beta$ が成り立つ. $\beta = b$ が 2 以上の整数の場合, 実数の β 展開は, 前章の b 進展開と一致する.

実数 $\xi \in [0, 1)$ に対して, nonzero digit の個数 $\lambda(\beta, \xi; N)$ を以下で定義する:

$$\lambda(\beta, \xi; N) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \le N,\ t_n \ne 0\}.$$

Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance は, $\beta = 2$ の場合に, 代数的無理数の nonzero digit の個数を研究した. ξ を代数的無理数とし, $d(\ge 2)$ をその次数とする. このとき, Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance [4] は, ξ によって定まる正定数 $C_3(\xi), C_4(\xi)$ が存在して, 以下が成り立つことを示した: $N \geq C_4(\xi)$ を満たす任意の整数 N に対して,

$$\lambda(2, \xi; N) \geq C_3(\xi) N^{1/d}. \tag{3.1}$$

なお, $C_3(\xi)$ は計算可能であるが, $C_4(\xi)$ は計算不可能である.

Adamczewski, Faverjon [2] および Bugeaud [7] は独立に, 評価式 (3.1) を整数 $b \geq 2$ に一般化した. さらに, 彼らは b, ξ によって定まる正定数 $C_5(b, \xi), C_6(b, \xi)$ が存在して, 以下が成り立つことを示した: $N \geq C_6(b, \xi)$ を満たす任意の整数 N に対して,

$$\lambda(b, \xi; N) \geq C_5(b, \xi) N^{1/d}. \tag{3.2}$$

その後, 著者 [14] によって式 (3.1) および式 (3.2) が一般化された. その結果を定式化するために, 記号を導入する. 整数列 $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$\lambda_N(\boldsymbol{t}) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N, t_n \neq 0\}$$

とおく.

定理 3.1 ([14])**.** *β を Pisot 数または Salem 数とする. $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は整数列であり, 無限に多くの n に対して $t_n \neq 0$ であるとする. ある正整数 B が存在して, 任意の非負整数 n に対して,*

$$0 \leq t_n \leq B$$

が成り立つと仮定する. さて, $f(\boldsymbol{t}; \beta^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \beta^{-n} =: \xi$ が代数的数であると仮定し, $D = [\mathbb{Q}(\beta, \xi) : \mathbb{Q}(\beta)]$ とおく.

すると, β, ξ, B のみに依存する正定数 $C_7 = C_7(\beta, \xi, B), C_8 = C_8(\beta, \xi, B)$ が存在して, 以下を満たす: $N \geq C_8$ となる任意の整数 N に対して,

$$\lambda_N(\boldsymbol{t}) \geq C_7 \left(\frac{N}{\log N} \right)^{1/D}. \tag{3.3}$$

β は再び, Pisot 数または Salem 数とする. ξ は代数的数であり, β 展開において, nonzero digit の個数が無限に存在すると仮定する. このとき, 定理 3.1 は適用可能であり, digit の列 $\boldsymbol{t} = (t_n(\beta; \xi))_{n \geq 1}$ は評価式 (3.3) を満たす.

さて, 定理 3.1 の超越数論への応用を述べる.

系 3.1. *β を Pisot 数または Salem 数とする. $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は整数列であり, 無限に多くの n に対して $t_n \neq 0$ であるとする. ある正整数 B が存在して, 任意の非負整数 n に対して,*

$$0 \leq t_n \leq B$$

が成り立つと仮定する. さて, 任意の正の実数 ε に対して,

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{\lambda_N(\boldsymbol{t})}{N^{\varepsilon}} = 0 \tag{3.4}$$

が成り立つと仮定する.

すると, $f(\boldsymbol{t}; \beta^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \beta^{-n}$ は超越数である.

2 章と同様に, 簡単のために十分大きな n に対して, $t_n \in \{0,1\}$ の場合を述べる.

系 3.2. *β を Pisot 数または Salem 数とする. $\boldsymbol{v} = (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は非負整数列であり, 十分大きい m に対して, $v_{m+1} > v_m$ が成り立つと仮定する. さらに, 任意の正の実数 R に対して,*

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{v_m}{m^R} = \infty \tag{3.5}$$

が成り立つと仮定する.

すると, $g(\boldsymbol{v};\beta^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{-v_m}$ は超越数である.

前章における条件 (2.1) および条件 (2.2) と条件 (3.5) を比較する. 条件 (2.1) は, 数列 $\boldsymbol{v} = (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の増大度が, 等比数列より大きいことを要請している. 実際, 数列 $\boldsymbol{v} = (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が条件 (2.1) を満たすと仮定する. すると, ある正定数 δ が存在して, 十分大きな m に対して $v_m > (1+\delta)^m$ となる. 一方, 条件 (3.5) では, 数列 $\boldsymbol{v} = (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の増大度が, 任意の多項式より大きいことだけを要請している. このため, 系 3.2 は, 比較的弱い条件から超越性の結果を導くといえる.

例えば,

$$v_m^{(1)} := \left\lfloor m^{\log m} \right\rfloor, \quad v_m^{(2)} := \left\lfloor m^{\log\log m} \right\rfloor$$

とおく. すると, 数列 $\boldsymbol{v}^{(1)} = (v_m^{(1)})_{m\ge1}$ および数列 $\boldsymbol{v}^{(2)} = (v_m^{(2)})_{m\ge3}$ が条件 (2.2) を満たさないことは, 平均値の定理によって確かめられる. 一方, これらの数列は, 明らかに条件 (3.5) を満たす. したがって, 任意の Pisot 数及び Salem 数 β に対して,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta^{-\lfloor m^{\log m} \rfloor}, \quad \sum_{m=3}^{\infty} \beta^{-\lfloor m^{\log\log m} \rfloor},$$

はともに超越数である. 式 (2.4) で定義された数列 $\boldsymbol{w}(\theta) = (w(\theta;m))_{n\in\mathbb{N}}$ と $\boldsymbol{v}^{(1)} = (v_m^{(1)})_{m\ge1}$, $\boldsymbol{v}^{(2)} = (v_m^{(2)})_{m\ge3}$ に関して, 以下のように大きさを比較する:

$$\begin{aligned}
\log w(\theta;m) &= \log 2 \cdot m^{\theta} + o(1), \\
\log v_m^{(1)} &= (\log m)^2 + o(1), \\
\log v_m^{(2)} &= \log m \cdot \log\log m + o(1).
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$ のほうが増大度はかなり小さい. このため, 部分空間定理の応用と比較して, 超越性を判定できるべき級数の範囲がかなり広がったといえる.

以上のように, Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance による手法は, 超越数論において強力なものである. しかし, 部分空間定理の応用と比較すると, 適用できる問題に制限がある. まず, 2 章の最初に述べた Corvaja, Zannier の判定法と比較すると, 代入する代数的数 α に制限がある. 次に, 数列 $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\infty}$ が負の値もとる場合には, 超越性の判定が難しい.

また, 本章の手法に関して, digit 変化数の解析への応用は, β が 2 以上の整数 b の場合に限られていた [12, 13]. さらに, 適用できる代数的無理数 ξ にも制限があった. 近年, 著者は川島誠氏との共同研究 [15] により, 一般の Pisot 数および Salem 数 β に対して, 代数的数 ξ の digit 変化数を研究した. その結果, ξ の最小多項式が, ある仮定を満たせば, digit 変化数に対しても下からの評価式 (3.4) の類似が成り立つことを示した.

4　主結果

一般の代数的数に対して, 定理 3.1 の類似が成立するかどうかは未解決である. β が代数的整数の場合に部分的な結果を得たので, 本章で述べる. 本章を通じて, β を 1 より大きい代数的整数とし, $\beta_1 = \beta, \beta_2, \ldots, \beta_d$ をその共役とする. ただし, 必要に応じて添え字を入れ替えることで,

$$\begin{cases} |\beta_i| > 1 & 1 \le i \le p, \\ |\beta_j| \le 1 & 1 + p \le i \le d \end{cases}$$

が成り立つとしても一般性を失わない. ここで, $p = 1$ が成立するのは, β が Pisot 数または Salem 数の時である.

定理 4.1. β は, 上記により定義された代数的整数とする. $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は整数列であり, 無限に多くの n に対して $t_n \neq 0$ であるとする. ある正整数 B が存在して, 任意の非負整数 n に対して,

$$0 \le t_n \le B$$

が成り立つと仮定する. さて, $1 \le i \le p$ に対して, $f_i(\boldsymbol{t}; \beta^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \beta_i^{-n} =: \xi_i$ とおく. 各 $1 \le i \le p$ に対して, ξ_i は代数的数であると仮定する. さて,

$$D := \min\{\deg f(X) \mid f(X) \in \mathbb{Z}[X] \backslash \{0\}, f(\xi_i) = 0 \ \mathit{for\ any}\ 1 \le i \le p\}$$

とおく.

すると, $\beta, \xi_1, \ldots, \xi_p, B$ のみに依存する正定数 C_9, C_{10} が存在して, 以下を満たす: $N \ge C_{10}$ となる任意の整数 N に対して,

$$\lambda_N(\boldsymbol{t}) \ge C_9 \left(\frac{N}{\log N}\right)^{1/D}.$$

定理 4.1 も, 定理 3.1 と同様に, べき級数の値の超越性に対して部分的な応用がある.

系 4.1. β は, 4 章のはじめに定義された代数的整数とする. $\boldsymbol{v} = (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は非負整数列であり, 十分大きい m に対して, $v_{m+1} > v_m$ が成り立つと仮定する. さらに, 任意の正の実数 R に対して,

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{v_m}{m^R} = \infty$$

が成り立つと仮定する.

すると, $g(\boldsymbol{v}; \beta_1^{-1}), g(\boldsymbol{v}; \beta_2^{-1}), \ldots, g(\boldsymbol{v}; \beta_p^{-1})$ の中で少なくとも一つは超越数である.

例えば, $\beta_1 = 4 + \sqrt{2}$ の場合を考えると, $p = 2$ かつ $\beta_2 = 4 - \sqrt{2}$ である. したがって,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_1^{-\lfloor m^{\log m} \rfloor}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \beta_2^{-\lfloor m^{\log m} \rfloor}$$

の少なくとも一つは超越数である.

また, $\beta_1 = \sqrt[3]{5}$ の場合を考える. ζ を 1 の原始 3 乗根とすると, $p = 3$ かつ $\beta_2 = \zeta \cdot \beta_1, \beta_3 = \zeta\beta_1$ である. β_2 と β_3 は互いに複素共役であることを考えると, 系 4.1 により

$$\sum_{m=3}^{\infty} \beta_1^{-\lfloor m^{\log\log m} \rfloor}, \quad \sum_{m=3}^{\infty} \beta_2^{-\lfloor m^{\log\log m} \rfloor}$$

の少なくとも一つは超越数である.

Acknowledgements

本研究は JSPS 科研費 15K17505 の助成を受けたものである.

References

[1] B. Adamczewski, *Transcendance $\ll$ à la Liouville $\gg$ de certains nombres réels*, C. R. Acad. Sci. Paris **338** (2004), 511–514.

[2] B. Adamczewski and C. Faverjon, *Chiffres non nuls dans le développement en base entière des nombres algébriques irrationnels*, C. R. Acad. Sci. Paris, **350** (2012), 1–4.

[3] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algeraic numbers I. Expansions in integer bases*, Annals of Math. **165** (2007), 547–565.

[4] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall and C. Pomerance, *On the binary expansions of algebraic numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 487–518.

[5] D. Bertrand. *Theta functions and transcendence*, The Ramanujan J. **1** (1997), 339–350.

[6] É. Borel, *Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne*, C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 591–593.

[7] Y. Bugeaud, *Distribution modulo one and diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Math. **193**, Cambridge, (2012).

[8] Y. Bugeaud, *On the β-expansion of an algebraic number in an algebraic base β*, Integers **9** (2009), 215–226.

[9] Y. Bugeaud and J.-H. Evertse, *On two notions of complexity of algebraic numbers*, Acta Arith. **133** (2008), 221–250.

[10] P. Corvaja and U. Zannier, *Some new applications of the subspace theorem*, Compositio Math. **131** (2002), 319–340.

[11] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, and I. Shiokawa. *Transcendence of Jacobi's theta series*, Proc. Japan. Acad. Sci, Ser. A bf 72 (1996), 202–203.

[12] H. Kaneko, *On the binary digits of algebraic numbers*, J. Aust. Math. Soc. **89** (2010), 233–244.

[13] H. Kaneko, *On the number of digit changes in base-b expansions of algebraic numbers*, Unif. & Distrib. Theory. (2012), **7**, 141–168.

[14] H. Kaneko, *On the number of nonzero digits in the beta-expansions of algebraic numbers*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. **136** (2016), 205–223.

[15] H. Kaneko and M. Kawashima, *The digit exchanges in the beta expansion of algebraic numbers*, preprint arXiv:1902.05349.

[16] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8** (1957), 477-493.