超高精度な量子演算の実装に向けた 量子トモグラフィの進展と課題

東京大学 先端科学技術研究センター 杉山 太香典
Takanori Sugiyama
Research Center for Advanced Science and Technology,
The University of Tokyo.

概 要

量子コンピュータとは、量子性を利用した計算を行う装置の一種である。量子回路モデル（またはゲート型）に基づく量子コンピュータでは、計算は基本量子演算を適切な順序で実行することによって進められる。もし大規模かつ高精度な量子コンピュータがあれば、既存のコンピュータが苦手と考えられている計算問題の一部を効率的に解けることが理論的に証明されている。しかしながら、現在実現している量子コンピュータの試作機はメモリサイズも演算精度もまだまだ不十分であるため、社会的または産業的に重要かつ既存のコンピュータでも扱えないサイズの計算問題を解くことができる量子コンピュータを実現するためには、さらなる大規模化（＝量子ビット数の増大）と高精度化（＝基本量子演算の高精度化）の両立が必要不可欠である。実験技術の進展によって、90 年代から現在までに大幅な高精度化が実現された。しかしながら、産業的に価値ある計算問題を十分な精度で解くためには、さらに 2 桁程度の高精度化が必要と見積もられている。精度を改善するには演算中に生じているエラーやノイズを低減する必要があり、それにはそれらの詳細な情報を精確に評価することが求められる。このような評価手法としては Randomized Benchmarking（RB）、量子トモグラフィ(QT), ゲートセットトモグラフィ（GST）など様々な手法が提案され、利用されているが、どの手法も実用上重大な欠点を抱えている。本稿では、基本量子演算の数学的な記述と、量子コンピュータ開発における精度評価手法の役割について説明する。

キーワード： 量子コンピュータ、量子トモグラフィ.

1 量子コンピュータの基本量子演算

本稿では、基本量子演算の評価手法が満たすべき条件について説明する。量子コンピュータの理論的な基本事項については文献 [1] を、量子コンピュータ開発の

現状と課題については文献 [2, 3, 4] を、量子コンピュータを含む量子情報技術の世界的な開発状況については文献 [5] を参照されたい。

社会実装可能な量子コンピューティングを実現するためには、大規模化（＝量子ビット数の増大）と高精度化（＝基本量子演算の高精度化）の両立が必要不可欠である。ここで基本量子演算とは、１量子ビットの初期化、１量子ビットの測定、１量子ビットのゲート演算、２量子ビットにまたがるゲート演算の２種類に分類される。量子コンピュータでは、これらの基本量子演算を適切な順番で実行することで量子アルゴリズムを実行する。

以下では、基本量子演算の数学的な取り扱いについて説明する。正の整数 $d(<\infty)$ を注目する量子系の次元とする。基本量子演算の精度評価の場合、$d=2$ (１量子ビット, 1-qubit) と $d=2\times 2=4$ (２量子ビット, 2-qubit) を扱うのが基本であるが、超伝導量子ビットを含む多くの固体量子ビット系では１つの量子系の次元は３以上であり、その中で性質のよい２つの準位を用いて擬似的な２準位系を構成している。そのような量子系では本来利用する予定のない３番目の準位が演算精度に影響することがあるため、$d=3$（1-qutrit）や $d=3\times 3=9$ (2-qutrit) を扱うことがある。

量子系の状態は量子状態とよばれ、密度行列とよばれる、$d\times d$ の複素正方行列によって記述される。量子力学の公理によって、密度行列 $\rho\in\mathbb{C}^{d\times d}$ には

$$\rho \succeq 0 \quad , \tag{1}$$
$$\mathrm{Tr}\left[\rho\right] = 1, \tag{2}$$

という条件が課せられる。即ち、密度行列は半正定値（固有値が非負）かつトレースが１となる行列である。１量子ビットの初期化の場合、理想的な初期化の例としては

$$\rho_{z0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

や

$$\rho_{x0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

などがある。実際に実現された量子状態を記述する密度行列 ρ と ρ_{z0}（または ρ_{x0}）の差が初期化のエラーである。３準位系を考える場合は

$$\rho_{z0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \rho_{x0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

となる。

後ほど説明する量子系への測定結果の確率分布を扱う際、密度行列をベクトル化すると解析しやすくなる場合がある。そこで行列のベクトル化作用素（vec 作用素）vec を導入する。行列 $A = \sum_{i,j} A_{ij}\mathbb{e}_i\mathbb{e}_j^\dagger = \sum_\alpha a_\alpha B_\alpha$ に対して $\mathrm{vec}(A)$ は

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ \vdots \end{bmatrix},\ \mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{6}$$

など様々な定義がある。ここで $\{B_\alpha\}_\alpha$ は行列の正規直交基底である。基本演算の評価手法を扱っている論文では $|A\rangle\!\rangle := \mathrm{vec}(A)$ という表記を用いてベクトル化された行列を表すことが多く、式 (6) に示したように、論文によって定義が異なることがある [6, 7]。これらの定義の差は表現基底の差にすぎないが、vec 作用素に成り立つ公式の中には特定の基底でしか成り立たないものがあるため注意が必要である。表現基底の選択に依存しない性質として、以下の等式が成り立つ。

$$\mathrm{Tr}[A^\dagger B] = \mathrm{vec}(A)^\dagger \mathrm{vec}(B) = \langle\!\langle A|B\rangle\!\rangle. \tag{7}$$

ここで $\dagger$ は複素行列のエルミート共役（複素共役転置）を表す。$\langle\!\langle A| := (|A\rangle\!\rangle)^\dagger$ である。

量子系への測定の作用には、測定値の確率分布を記述する正作用素値測度（Positive Operator-Valued Measure, POVM）と、測定に伴う状態変化を記述する測定演算子の 2 種類がある。本稿では量子測定の記述として、POVM のみを扱う。POVM は $d \times d$ の複素行列の集合である。POVM $\mathbf{\Pi} = \{\Pi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ の各行列要素の添え字 ω は個々の測定値に対応し、Ω はその測定で出力される可能性のある測定値全体の集合を表す。量子力学の公理によって、POVM には

$$\Pi_\omega \succeq 0,\ \forall\omega \in \Omega, \tag{8}$$

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pi_\omega = I, \tag{9}$$

という条件が課せられる。ここで I は $d \times d$ の単位行列である。1 量子ビットの測定の場合、理想的な POVM の例としては

$$\mathbf{\Pi}_z := \{\Pi_{z0}, \Pi_{z1}\},\ \Pi_{z0} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Pi_{z1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\mathbf{\Pi}_x := \{\Pi_{x0}, \Pi_{x1}\},\ \Pi_{x0} := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \Pi_{x1} := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

などがある。

量子系へのゲート演算は $\mathbb{C}^{d\times d} \to \mathbb{C}^{d\times d}$ の線形写像によって記述される。ゲート演算 $\mathcal{G}$ と演算前の量子状態 ρ に対して、$\mathcal{G}(\rho)$ はゲート演算後の量子状態を表す。

演算後の量子系の状態も密度行列の条件を満たしている、という条件から、$\mathcal{G}$ には完全正（completely positive）かつトレース保存（trace-preserving）、という条件が課せられる。即ち、

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \otimes \mathcal{I}_{d'}(\sigma) &\succeq 0,\ \forall \sigma \succeq 0, \forall d' \in \mathbb{N}^+, && (12) \\ \mathrm{Tr}[\mathcal{G}(\rho)] &= \mathrm{Tr}[\rho], && (13) \end{aligned}$$

という条件である。ここで σ は $(d \cdot d') \times (d \cdot d')$ の複素半正定値行列、$\mathcal{I}_{d'}$ は $\mathbb{C}^{d' \times d'}$ 上の恒等写像である。ゲート演算は線形写像であるため、その作用は $d^2 \times d^2$ の複素行列で記述することができる。ゲート演算の行列表現には Kraus 表現、Choi-Jamiolkowski 表現、プロセス行列などさまざまなものが知られている。本稿では Pauli-Liouviell 表現（または Hilbert-Schmidt 表現）とよばれる、以下の等式を満たす行列表現 G のみ扱う。

$$\mathrm{vec}(\mathcal{G}(\rho)) = G\ \mathrm{vec}(\rho),\ \forall \rho \in \mathbb{C}^{d \times d}. \tag{14}$$

Pauli-Liouviell 表現の場合、ゲート演算に課される条件は以下のように表される。

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{d^2} G_{\alpha\beta} B_\alpha \otimes \bar{B}_\beta \succeq 0, \tag{15}$$

$$\mathrm{vec}(I)^\dagger G = \mathrm{vec}(I)^\dagger. \tag{16}$$

ここで $\{B_\alpha\}_{\alpha=1}^{d^2}$ は $\mathbb{C}^{d \times d}$ の正規直交基底で、vec() の変換を定義する基底である. $\bar{B}_\alpha$ は行列 B_α の複素共役行列を表す。

理想的な量子ゲートの作用はユニタリ行列 U によって $\mathcal{U}(\rho) = U\rho U^\dagger$ と表される。実装する U は実行したい量子計算アルゴリズムや各物理系で利用しやすい相互作用によって異なる。理想的なユニタリゲート $\mathcal{U}$ の Pauli-Liouviell 表現は、$vec()$ の定義を行ベクトル優先（式 (6) の 2 番目）に選んだ場合、$U \otimes \overline{U}$ で与えられる。
U の例としては、1 量子ビットゲート演算では

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

などが実装の目標となる。2 量子ビットゲート演算では

$$CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

などが U の例である。

量子系に測定を行なった場合、測定値は確率的に得られる。密度行列 ρ で記述される量子状態にある量子系に、POVM$\mathbf{\Pi}$ で記述される測定を行なった場合、測定値 ω が得られる確率は

$$p(\omega) = \mathrm{vec}(\Pi_\omega)^\dagger \mathrm{vec}(\rho) \tag{20}$$

で与えられる。状態の初期化後に G で記述されるゲート演算を行なってから測定する場合の確率は

$$p(\omega) = \mathrm{vec}(\Pi_\omega)^\dagger G\ \mathrm{vec}(\rho) \tag{21}$$

で与えられる。ゲートを複数回実行する場合は

$$p(\omega) = \mathrm{vec}(\Pi_\omega)^\dagger G_k G_{k-1} \cdots G_2 G_1\ \mathrm{vec}(\rho) \tag{22}$$

で与えられる。ここで、G_i は i 番目に実行するゲートの行列表現である。

2　基本量子演算の精度評価

実験技術の進展によって、90 年代から現在までに大幅な高精度化が実現された。しかしながら、産業的に価値ある計算問題を十分な精度で解くためには、さらに 2 桁程度の高精度化が必要と見積もられている。基本量子演算に発生するノイズは様々な自由度を持っているため、精度の改善（＝ノイズの低減）を達成するためには、ノイズの詳細な情報を精確に評価することが要求される。このような評価手法としては Randomized Benchmarking（RB）[8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]、量子トモグラフィ(QT) [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], 自己整合量子トモグラフィ (SCQT) [29, 30, 31, 32, 33, 34], など様々な手法が提案され利用されているが、どの手法も、信頼性が低い、適用できる量子演算の種類に制限がある、実行コストが極めて高い、などの重大な欠点を抱えている [36, 37, 38]。QT や SCQT の詳細については過去の講究録 [35] を参照されたい。

量子コンピュータの実機開発において精度評価手法が果たしている役割を説明する。実機開発はどの物理系でも以下のステップ 1 からステップ 5 までの手順を踏んで進められる。

ステップ 1. 装置・試料の設計と作製

ステップ 2. 試料の基礎特性評価

ステップ 3. 制御系の較正

ステップ 4. 基本量子演算の精度評価

ステップ 5. 本実験

超伝導量子回路系の場合を例に、上記５つのステップを概説する。超伝導量子回路系の場合、超伝導状態を実現・保持するための希釈冷凍機、量子コンピュータのレジスタメモリに対応する超伝導量子回路チップと冷凍機内に設置するための治具やパッケージ、量子演算を実行するための制御装置（冷凍機外に設置)、制御装置とチップをつなぐ冷凍機内配線（減衰器や増幅器を含む）などが実験装置と試料に対応する。ステップ１ではこれらの設計と作製が行われる。ステップ２では、作製された装置と試料（チップ）のなど、ハードウェアの基礎特性を評価する実験が行われる。ここでは、超伝導量子回路中の構成要素（超伝導量子ビットや制御・測定に利用される共振器）の共鳴周波数・コヒーレンス時間・結合定数などの特性パラメタの評価が行われる。基礎特性の評価では基本量子演算の一部が利用されるため、それらの演算精度の粗い較正も行われる。ステップ３では、ステップ２で得られた基礎特性パラメタの値を基に、制御装置の較正が行われる。超伝導量子回路系の場合、量子演算の制御にはマイクロ波パルスなどが利用され、パルス波形（パルス幅、各時刻の振幅と位相）の最適化が行われる。ステップ４では、実装された基本量子演算の数学的な表現（密度行列、POVM, Pauli-Liouvilell 表現）を推定するための実験を行い、実装された演算の精度が、量子誤り訂正や量子アルゴリズムの実行などステップ５の本実験を行うにあたって十分な精度に達しているかを確認する。実装された基本演算が十分な精度に達していることがステップ４で確認されるとステップ５の本実験に取り掛かる。本実験では、量子誤り訂正、Shor や Grover などの代表的な量子アルゴリズム、近年注目を集めている量子超越性を実証するための量子アルゴリズムや量子優位性の実証を目標とした量子古典ハイブリッドアルゴリズムなど、様々な量子アルゴリズムが実行される。

実機開発において、量子演算の精度が初めから十分な精度に達していることはまれであり、多くの場合、様々な実験的な不完全性によって精度は不十分となる。その場合は不十分な精度を改善すべく、「ステップ１．装置・試料の設計と作製」や「ステップ３．制御系の較正」へと戻り、精度の改善に向けた試みを繰り返すことになる。精度評価手法の研究では、手法の信頼性・精確さや実行のしやすさに加えて、評価で得られた情報から装置やチップ上のノイズ源を特定することで装置・試料のより良い設計と作製につなげる手法や、評価で得られた情報を制御系のより良い較正に結びつける手法の開発も重要である。

上記のように、基本量子演算の精度評価手法の目的は

目的 1. 実装された量子演算の数学的表現を推定する。

目的 2. 実装された量子演算の精度（実装したかった理想的な量子演算とどのくらい近いか）を推定する。

の２つであり、評価の結果には以下の２つの使われ方がある。

利用方法 1. 推定された精度の値を目標値と比較し、十分な精度が達成されているかどうか判断する。

利用方法 2. 推定された量子演算の数学的表現を基に、ステップ 1 やステップ 3 に戻って改良を試みる。

目的 1 と目的 2 では、推定精度ができるだけ高い（＝信頼性の高い）手法が望ましい。利用方法 1 では、推定値と目標値を比較するため、理論または数値シミュレーションで得られた目標値と比較するのに妥当な推定値が得られる評価手法であることが要求される。また、世界一の精度の達成のような、他のグループが報告している精度を超えた演算の実装を目標としている場合は目標値は先行研究で報告されている精度の値であるため、異なる実験装置や異なる物理系での評価の結果を比較することが妥当な評価手法であることが要求される。利用方法 2 では、精度のさらなる改善に有用な情報が推定結果から得られることが求められる。

3　精度評価手法開発の世界的な状況

RB, QPT, GST などの既存の評価手法は、前節で説明した評価手法に要求される条件 (i) 推定結果の信頼性、(ii) 理論/シミュレーション値との比較の妥当性、(iii) 他の実験系との比較の妥当性、のそれぞれで問題を抱えており、量子コンピュータ開発では、既存手法の抱える問題を克服した新しい評価手法の開発が重要な課題の一つとなっている。評価手法の研究開発の重要性は、量子コンピュータ開発を先導している北米では広く認識されており、量子コンピュータ開発の方向性に関するいくつかの提言レポートや分野のレビュー論文でも取り組むべき課題の一つに挙げられている [39, 40, 41]。ただし、既存の手法で十分と考えている研究者も存在する [42]。

アメリカでは、2013 年に陸軍が既存の評価手法の問題を克服する新しい手法開発に関する公募型のプロジェクトを発足し [43]、それによって RB の派生手法が多数開発された。また、2018 年からは、評価手法の標準ソフトウェアの整備に向けた公募型のプロジェクトがアメリカ・エネルギー省主導で進められている [44]。現時点で提案されているどの評価手法も致命的な問題を抱えている状況でソフトウェアの標準化に取り組むのは時期尚早のように（少なくとも著者には）感じられるが、分野の主導権を握るために先手を打つことが目的であるとすれば、長期的な展望の下での戦略的な行動とも考えられる。プロジェクトの詳細や採択された研究グループの情報は公開されていないが、RB, QT, GST などの研究に取り組む北米の研究者の多くが同プロジェクトに関与しているものと推察される。評価手法の研究開発は量子物理学・量子情報理論・量子計算理論・量子情報実験・統計学・最適化数理・ソフトウェア開発など複数の研究/開発分野にまたがる学際領域であり、既存手法の問題点の克服には、様々な分野の研究者の協働が必要不可欠である。本稿が、そのような協働のきっかけとなることを願って筆を擱く。

参考文献

[1] 藤井啓祐, 「量子コンピューターの基礎」, オペレーションズ・リサーチ 2018 年 6 月号 特集 量子コンピューター, p.311 (2018).

[2] 阿部英介, 伊藤公平,「固体量子情報デバイスの現状と将来展望ーー万能ディジタル量子コンピュータの実現に向けて」, 応用物理 第 86 巻 第 6 号 p.453 (2017).

[3] 杉山太香典, 「超伝導量子コンピュータの開発状況〜アメリカ物理学会参加報告〜」, 日本物理学会誌 72 巻 10 号 pp.743-746 (2017).

[4] 田渕豊, 杉山太香典, 中村泰信, 「超伝導技術を用いた量子コンピュータの開発動向と展望」, 電子情報通信学会誌 vol.101, No.4, pp.400-405 (2018).

[5] 井元信之, 北川勝浩, 「エレクトロニクスを変革する量子情報技術」, 電子情報通信学会誌 2017 年 9 月号 (Vol.100 No.9).

[6] M. Paris and J. Rehacek (Eds.), "*Quantum State Estimation*", Springer (2004).

[7] C. J. Wood, J. D. Biamonte, and D. G. Cory, Quant. Inf. Comp. **15**, 0579-0811 (2015). arXiv:1111.6950 [quant-ph].

[8] J. Emerson et al., J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S347 (2005).

[9] J. Emerson et al., Science **317**, 1893 (2007).

[10] E. Knill et al., Phys. Rev. A **77**, 012307 (2008).

[11] E. Magesan et al., Phys. Rev. Lett. **106**, 180504 (2011).

[12] E. Magesan et al., Phys. Rev. A **85**, 042311 (2012).

[13] E. Magesan et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 080505 (2012).

[14] J. Gambetta et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 240504 (2012).

[15] T. Chasseur and F. K. Wilhelm, Phys. Rev. A **92**, 042333 (2015).

[16] J. Wallman et al., New J. Phys. **18**, 043021 (2016).

[17] J. Wallman et al., New J. Phys. **17**, 113020 (2015).

[18] S. Sheldon et al., Phys. Rev. A **93** 012301 (2016).

[19] J. Wallman et al., Phys. Rev. Lett. **115**, 060501 (2015).

[20] A. W. Cross et al., npj Quantum Inf. **2**, 16012 (2016).

[21] S. Kimmel et al., Phys. Rev. X **4**, 011050 (2014).

[22] U. Fano, Rev. Mod. Phys. **29**, 74 (1957).

[23] D. T. Smithey et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).

[24] Z. Hradil, Phys. Rev. A **55**, R1561 (1997).

[25] Banaszek et al., Phys. Rev. A **61**, 010304 (R) (1999).

[26] J. F. Poyatos et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 390 (1997).

[27] I. L. Chuang and M. A. Nielsen, J. Mod. Phys. **44**, 2455 (1997).

[28] A. Luis and L. L. Sanchez-Sato, Phys. Rev. Lett. **83**, 3573 (1999).

[29] S. Merkel et al., Phys. Rev. A 87, 062119 (2013). C. Stark, Phys. Rev. A **89**, 052109 (2014).

[30] C. Stark, Phys. Rev. A **89**, 052109 (2014).

[31] R. Blume-Kohout et al., arXiv:1310.4492 [quant-ph].

[32] R. Blume-Kohout et al., Nature Commun. **8**, 14485 (2017).

[33] pyGSTi, http://www.pygsti.info/, DOI: 10.5281/zenodo.1209246.

[34] T. Sugiyama, S. Imori, and F. Tanaka, arXiv:1806.02696 [quant-ph].

[35] 杉山太香典,「大規模量子計算機の実用化における統計的問題」, 数理解析研究所講究録 (2017), 2018 1-17. http://hdl.handle.net/2433/231709

[36] J. M. Epstein et al., Phys. Rev. A **89**, 062321 (2014).

[37] T. Proctor et al., Phys. Rev. Lett. **119**, 130502 (2017).

[38] J. Qi and H. K. Ng, arXiv:1805.10622 [quant-ph].

[39] S. Lloyd and D. Englund, "Future Directions of Quantum Information Processing", A Workshop on the Emerging Science and Technology of Quantum Computation, Communication, and Measurement (2016).

[40] J. Carter et al., "Technical Report: ASCR Report on a Quantum Computing Testbed for Science", U.S. Department of Energy, Office of Science and Technical Information (2017).

[41] J. M. Gambetta, J. M. Chow, and M. Steffen, npj Quantum Information **3**, 2 (2017).

[42] J. M. Martinis, npj Quantum Information **1**, 15005 (2015).

[43] U.S. Army Research Office Broad Agency Announcement W911NF-13-R-0010, Research in Quantum Computing (2013).

[44] Software Tools for Scalable Quantum Validation and Verification, Department of Defense, Army Branch (2018).