Split Metacyclic 群の整係数群環のホッホシルトコホモロジー環について
(On Hochschild cohomology ring of the integral group ring of split metacyclic groups)

速水 孝夫 (北海学園大学工学部)
Takao Hayami (Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University)

Introduction

R を可換環，Λ を R 上有限生成で射影的な R 上の多元環，M を両側 Λ-加群としたとき，各次元 $n \geq 0$ に対するホッホシルトコホモロジー (Hochschild cohomology) 群

$$H^n(\Lambda, M) := \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^{\mathrm{e}}}(\Lambda, M)$$

が定義される．さらに $M = \Lambda$ であるとき，

$$HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(\Lambda, \Lambda)(= \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^{\mathrm{e}}}(\Lambda, \Lambda))$$

にカップ積 (または米田積) によって次数付き環としての構造を導入することができ，これを一般に Λ のホッホシルトコホモロジー環とよぶ．ホッホシルトコホモロジー環 $HH^*(\Lambda)$ は graded-commutative である．つまり，$\alpha \in HH^p(\Lambda), \beta \in HH^q(\Lambda)$ に対し，$\alpha\beta = (-1)^{pq}\beta\alpha$ が成立する．特に体上の有限次元多元環のホッホシルトコホモロジーについては，表現論との関わりで様々な研究が行なわれきている．

G を有限群とする．可換環 R 上の群環 RG のホッホシルトコホモロジー環は興味深い対象の一つである．G がアーベル群の場合，Holm [11] 及び Cibils-Solotar [3] によって環同型

$$HH^*(RG) \simeq RG \otimes_R H^*(G, R)$$

が示された．しかし，G がアーベル群でないときはこのような明確な記述を得ることは難しいと思われる．また，環同型 $HH^*(RG) \simeq H^*(G, {}_\psi RG)(= \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_{RG}(R, {}_\psi RG))$ が存在することから (例えば [14, §3], [13] などを参照)，これを通して有限群のコホモロジーに帰着することができる．ここで，${}_\psi RG$ は共役によって RG を G-加群とみなしたものである．一方で，G_i を G の共役類の代表元の中心加群とするとき，加群としての同型

$$HH^*(RG) \simeq \bigoplus_i H^*(G_i, R)$$

は以前から知られていたが ([2, Theorem 2.11.2])，Siegel-Witherspoon はこの加法群としての同型が環同型になるように，右辺に特別な積が入れられることを示した ([14])．同時に彼らはこの結果を用いて，$\mathbb{F}_3 S_3, \mathbb{F}_2 A_4, \mathbb{F}_2 D_{2^n}$ のホッホシルトコホモロジー環の構造を決定している．

以下では，Siegel-Witherspoon によって示された環同型について，簡単にご紹介したい．$g_1(=1)$, $g_2, g_3, \ldots, g_r$ は G の共役類の代表元とし，各 g_i の中心加群を G_i とする．次の 2 つの RG_i 準同型 $\theta_{g_i} : R \longrightarrow RG;\ \lambda \longmapsto \lambda g_i$, $\pi_{g_i} : RG \longrightarrow R;\ \sum_{a\in G} \lambda_a a \longmapsto \lambda_{g_i}$ はコホモロジーの写像 $\theta^*_{g_i} : H^n(G_i, R) \longrightarrow H^n(G_i, {}_\psi RG)$ と $\pi^*_{g_i} : H^n(G_i, {}_\psi RG) \longrightarrow H^n(G_i, R)$ を誘導する．そして，

$$\gamma_i : H^n(G_i, R) \longrightarrow H^n(G, {}_\psi RG); \alpha \longmapsto \mathrm{cor}^G_{G_i} \theta^*_{g_i}(\alpha)$$

と定めると，次の加法群としての同型 (Additive Decomposition) を得る:

$$\Phi : H^*(G, {}_\psi RG) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i H^*(G_i, R); \zeta \longmapsto \left(\pi^*_{g_i} \mathrm{res}^G_{G_i}(\zeta)\right)_i.$$

逆写像は $\Phi^{-1}(\alpha) = \gamma_i(\alpha) \quad (\alpha \in H^n(G_i, R))$ によって与えられる．Siegel-Witherspoon により，この加法群としての同型が環同型になるように，右辺に特別な積が入れられることが示された ([14, §5] 参照):

Theorem 1 (Product Formula). $H^*(G, {}_\psi RG)(\simeq HH^*(RG))$ において，次が成立する:

$$\gamma_i(\alpha) \smile \gamma_j(\beta) = \sum_{a\in D} \gamma_k \left(\mathrm{cor}^{G_k}_W \left(\mathrm{res}^{{}^bG_i}_W b^*\alpha \smile \mathrm{res}^{{}^{ba}G_j}_W (ba)^*\beta\right)\right)$$

ただし，$\alpha \in H^*(G_i, R)$, $\beta \in H^*(G_j, R)$ とし，D は両側剰余類 $G_i\backslash G/G_j$ の代表元の集合とする．また，$k = k(a)$ と $b = b(a)$ は $g_k = (bg_ib^{-1})((ba)g_j(ba)^{-1})$ を満たすようにとり，$W = {}^bG_i \cap {}^{ba}G_j$ とする．

特に，$\gamma_1 : H^*(G, R) \longrightarrow H^*(G, {}_\psi RG);\ \alpha \longmapsto \theta^*_1(\alpha)$ (θ^*_1 は $\theta_1 : R \to RG; r \mapsto r \cdot 1$ から誘導される) は単射環準同型である．この結果が示すことは，群環のホッホシルトコホモロジーにおけるカップ積は，有限群のコホモロジーにおけるカップ積とレストリクションやコレストリクションを用いて記述できるということである．

今回は，前回 (2017 年) のコホモロジーの集会で，ある split metacyclic 群の整係数の群のコホモロジー環の構造を決定し，さらに整係数群環 $\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー環の構造を決定したことをご報告させていただいた ([10])．今回は，前回の集会の際に発表できなかった，他の split metacyclic 群の群環のホッホシルトコホモロジーや，その後の進展状況についてご報告したい．

まず，G を次のような位数 $2r$ ($r \geq 2$) の split metacyclic 群

$$G = \langle x, y \mid x^r = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^t\rangle$$

とする．ただし，$1 \leq t \leq r-1$, $t^2 \equiv 1 \pmod r$ とする．ここでは，G の整係数群環のホッホシルトコホモロジー環を決定することを目標としている．現在までに，G が位数 $2n$ ($n \geq 3$) の二面体群 D_{2n} 場合や ([7], [5], [12])，G が位数 2^k ($k \geq 4$) の準二面体 2-群 SD_{2^k} 場合 ([8], [6])，G が $r = 4\ell$, $t = 2\ell + 1$ の場合 (2017 年のコホモロジーの集会で発表) に $HH^*(\mathbb{Z}G)$ の環構造が決定されている ([10], [1])．以下の第 1・2 章では，$r = 4\ell$ ($\ell \geq 2$), $t = 2\ell - 1$ の場合 (位数 8ℓ の準二面体群の場合) に，整係数の群のコホモロジー環の構造を決定し，さらに $\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー環の構造を決定したので，まずそれについて述べることにしたい ([9])．

§1. $r=4\ell$, $t=2\ell-1$ $(\ell \geq 2)$ の場合の整係数のコホモロジー環

第1章を通して，G は次のような位数 8ℓ $(\ell \geq 2)$ の split metacyclic 群とする:

$$G = \langle x, y \mid x^{4\ell} = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{2\ell-1} \rangle$$

ここでは，まず G の整係数のコホモロジー環について考察する．

一般の split metacyclic 群に対しては，$\mathbb{Z}$ の自由分解が Wall [15] によって与えられている．Wall の自由分解を用いると，米田積の計算やレストリクションなどの計算をする際に，相当複雑な計算が必要になる．前回のコホモロジーの集会では，これらの計算を少しでもしやすくするため，Wall の自由分解よりも使いやすい自由分解を構成することを考え，$r=4\ell$, $t=2\ell+1$ の場合に，新たな自由分解を構成することができたので，それについてご紹介した．しかしながら，今回の $r=4\ell, t=2\ell-1$ のケースは，前回の集会で発表したよりも前に計算していたものであり，Wall の自由分解を用いて計算を行っている．なお，前回構成した自由分解を位数 $2r$ の場合に一般化できたので，それについては後述させていただくことにしたい．

以下では，Wall の自由分解について述べる．$q \geq 0$ とし，$\mathbb{Z}G$ の $q+1$ 個のコピーの直和を Y_q とおき，$c_q^1, c_q^2, \ldots, c_q^{q+1} (\in Y_q)$ を，

$$c_q^k = (\underbrace{0, \ldots, 0, \overset{k}{\check{1}}, 0, \ldots, 0}_{q+1})$$

と定める．便宜上，$k<0$ または $k>q+1$ のときは，$c_q^k = 0$ としておく．また，

$$N_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} x^i & (k \geq 1), \\ 0 & (k=0), \end{cases} \quad R_k = yN_t{}^k + 1,\ S_k = yN_t{}^k - 1,\ T_{2k+1} = \frac{1}{4\ell}(t^{2k+2} - 1),$$

とおき，特に，$N = N_{4\ell}$ とする．左 $\mathbb{Z}G$-準同型 $\delta_q : Y_q \to Y_{q-1}$ を

$$\delta_q(c_q^{k+1}) = \begin{cases} Nc_{q-1}^{k+1} + R_{\frac{q-k}{2}} c_{q-1}^k & \text{for } q \text{ even},\ k \text{ even}, \\ (x-1)c_{q-1}^{k+1} - S_{\frac{q-k+1}{2}} c_{q-1}^k - T_{q-k} c_{q-1}^{k-1} & \text{for } q \text{ even},\ k \text{ odd}, \\ (x-1)c_{q-1}^{k+1} - R_{\frac{q-k+1}{2}} c_{q-1}^k - T_{q-k} c_{q-1}^{k-1} & \text{for } q \text{ odd},\ k \text{ even}, \\ Nc_{q-1}^{k+1} + S_{\frac{q-k}{2}} c_{q-1}^k & \text{for } q \text{ odd},\ k \text{ odd}. \end{cases}$$

と定める．このとき，

$$(Y, \delta) : \cdots \to Y_n \xrightarrow{\delta_n} Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{\delta_1} Y_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

は G に対する $\mathbb{Z}$ の自由分解を与える ([15])．ただし，ε は augmentation とする．

次に，G の部分群の整係数コホモロジー環について述べ，G の整係数コホモロジー環の構造について考察する．以下では，ℓ が偶数の場合と奇数の場合に分けて述べる．

§1.1 ℓ が偶数のとき

ℓ が偶数のとき，$H^n(G,\mathbb{Z})$ の加群構造は次の通り:

$$H^n(G,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } n=0, \\ 0 & \text{for } n=1,\ 3, \\ \mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k & \text{for } n=4k\ (k\neq 0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k & \text{for } n=4k+1\ (k\neq 0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k+2} & \text{for } n=4k+2, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k & \text{for } n=4k+3\ (k\neq 0). \end{cases}$$

そして，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の加群の生成元を次のようにとる:

$\xi := (2\ell, 1-\ell, 0)$, $\beta := (0,0,1) \in H^2(G,\mathbb{Z})$; $\zeta := (1, 1-\ell, 0,0,0) \in H^4(G,\mathbb{Z})$;
$\kappa := (0, 2\ell, -\frac{1}{2}(1+t^2), 0,0,0) \in H^5(G,\mathbb{Z})$.

次に，G の次の部分群

$$\langle x\rangle,\ \ \langle x^{2\ell}, y\rangle\ (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\ \ \langle xy\rangle\ (\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}),\ \ \langle x^{2\ell}\rangle,\ \ \langle y\rangle$$

の整係数コホモロジー環を考える:

$$\begin{aligned} H^*(\langle x\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\sigma]/(4\ell\sigma), \qquad (\deg\sigma = 2), \\ H^*(\langle x^{2\ell}, y\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\lambda,\mu,\nu]/(2\lambda, 2\mu, 2\nu, \nu^2+\lambda\mu^2+\lambda^2\mu), \\ &\qquad\qquad (\deg\lambda = \deg\mu = 2,\ \deg\nu = 3), \\ H^*(\langle xy\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\rho]/(4\rho), \qquad (\deg\rho = 2), \\ H^*(\langle x^{2\ell}\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\eta]/(2\eta), \qquad (\deg\eta = 2), \\ H^*(\langle y\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\vartheta]/(2\vartheta), \qquad (\deg\vartheta = 2). \end{aligned}$$

そして，G のコホモロジーと，これらの部分群のコホモロジー環の間のレストリクションやコレストリクションなどが必要になる．レストリクションは自由分解 (Y,δ) 及び部分群に対する $\mathbb{Z}$ の自由分解との間の chain map を直接構成することなどにより得られる．また，コレストリクションは，レストリクションの計算結果に，Double coset formula, Frobenius の相互律やその他の性質を用いて計算することにより得られる．これらの計算結果については，[9, §3.2, 3.3] を参照．

そして，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の加群の生成元の間の米田積を計算したり，レストリクションの計算結果を用いることにより，コホモロジーの環構造が得られた．

Proposition 2. ℓ が偶数のとき，G の整係数コホモロジー環の構造は次の通り:

$$H^*(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta,\xi,\zeta,\kappa]/(2\beta, 2\xi, 4\ell\zeta, 2\kappa, \beta\xi, \xi^2, \xi\kappa, \kappa^2-\beta^3\zeta).$$

ただし，$\deg\beta = \deg\xi = 2,\ \deg\zeta = 4,\ \deg\kappa = 5$.

Remark 3. $\ell = 2^k$ $(k \geq 1)$ のとき，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の環構造はすでに，Evens and Priddy [4] によって与えられている．

しかしながら，ℓ が 2 ベキ以外の場合に，整係数コホモロジー環の構造を決定している文献は見当たらない．

§1.2 ℓ が奇数のとき

§1.2 では，ℓ が奇数の場合を考える．まず，G の整係数のコホモロジーの加群の構造は次の通り:

$$H^n(G,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } n = 0, \\ 0 & \text{for } n = 1, \\ \mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k} & \text{for } n = 4k \ (k \neq 0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k} & \text{for } n = 4k+1 \ (k \neq 0), \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k+1} & \text{for } n = 4k+2, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k+1} & \text{for } n = 4k+3. \end{cases}$$

そして，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の加群の生成元として，

$\xi := (\ell, \frac{1}{2}(1-\ell), 0)$, $\beta := (0,0,1) \in H^2(G,\mathbb{Z})$; $\tau := (0,2,-1,0,0) \in H^3(G,\mathbb{Z})$;
$\zeta := (1, 1-\ell, 0,0,0) \in H^4(G,\mathbb{Z})$

をとり，G の次の部分群

$$\begin{aligned} &\langle x \rangle \ (\simeq \mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z}), \\ &\langle x^\ell, x^i y \rangle \quad (\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad \text{for } i = 0, 2, \\ &\langle x^\ell, x^{\ell+i} y \rangle \ (\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad \text{for } i = 1, 3, \\ &\langle x^\ell \rangle \ (\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}), \quad \langle y \rangle \ (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad \langle x^{2\ell} y \rangle \ (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

の整係数コホモロジー環

$$\begin{aligned} H^*(\langle x \rangle, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\sigma]/(4\ell\sigma), \qquad (\deg \sigma = 2), \\ H^*(\langle x^\ell, x^i y \rangle, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\lambda_i, \mu_i, \nu_i]/(2\lambda_i, 4\mu_i, 2\nu_i, \nu_i^2), \\ &\qquad (\deg \lambda_i = \deg \mu_i = 2,\ \deg \nu_i = 3 \ (i = 0, 2)), \\ H^*(\langle x^\ell, x^{\ell+i} y \rangle, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\lambda_i, \mu_i, \nu_i]/(2\lambda_i, 4\mu_i, 2\nu_i, \nu_i^2), \\ &\qquad (\deg \lambda_i = \deg \mu_i = 2,\ \deg \nu_i = 3 \ (i = 1, 3)), \\ H^*(\langle x^\ell \rangle, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\alpha]/(4\alpha), \qquad (\deg \alpha = 2), \\ H^*(\langle y \rangle, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\vartheta_1]/(2\vartheta_1), \qquad (\deg \vartheta_1 = 2), \\ H^*(\langle x^{2\ell} y \rangle, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\vartheta_2]/(2\vartheta_2), \qquad (\deg \vartheta_2 = 2) \end{aligned}$$

を考える．ℓ が偶数のときと同様，レストリクションやコレストリクションなどを計算した ([9, §5.2, 5.3] 参照)．そして，米田積やレストリクションを計算することにより，コホモロジーの環構造が得られた．

Proposition 4. ℓ が奇数のとき，G の整係数コホモロジー環の構造は次の通り：

$$H^*(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta,\xi,\tau,\zeta]/(2\beta, 4\xi, 2\tau, 4\ell\zeta, \xi^2-\ell^2\zeta, \tau^2).$$

ただし，$\deg\beta=\deg\xi=2,\ \deg\tau=3,\ \deg\zeta=4$ とする．

§2. $r=4\ell$, $t=2\ell-1\quad(\ell\geq 2)$ の場合のホッホシルトコホモロジー環

第 2 章では，G の整係数群環のホッホシルトコホモロジー環の構造についてご紹介する．積の計算は，第 1 章で得られたレストリクションやコレストリクションなどの計算結果と，Siegel-Witherspoon によって得られた環同型 (定理 1) を用いて得られる．以下では，ℓ が偶数の場合と奇数の場合に分けて述べる．

§2.1 ℓ が偶数の場合

記号は §1.1 のものをそのまま用いる．G の中心化群の整係数コホモロジーの加群構造と，加法群としての同型 (Additive Decomposition) を用いると，$\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー加群の構造が分かる．

$$HH^n(\mathbb{Z}G) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{2\ell+3} & (n=0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k+1}\oplus(\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{2\ell+1}\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & (n=4k\ (k\neq 0)), \\ 0 & (n=1), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k} & (n=4k+1\ (k\neq 0)), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k+6}\oplus(\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{2\ell-1}\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & (n=4k+2), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k+1} & (n=4k+3). \end{cases}$$

次に，G の共役類の代表元を

$$g_1=1,\ g_2=x^{2\ell},\ g_{i+2}=x^i\quad(1\leq i\leq\ell),$$
$$g_{\ell+i+2}=x^{2\ell+i}\quad(1\leq i<\ell),\ g_{2\ell+2}=y,\ g_{2\ell+3}=xy,$$

のようにとると，これらの中心化群は

$$G_1=G_2=G,\ G_{i+2}=\langle x\rangle\quad(1\leq i<2\ell),$$
$$G_{2\ell+2}=\langle x^{2\ell},y\rangle(\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),\ G_{2\ell+3}=\langle xy\rangle(\simeq\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}),$$

である．そして，次のようにおく．

$$\begin{aligned} &A_2=\gamma_1(\beta),\ B_2=\gamma_1(\xi),\ A_4=\gamma_1(\zeta),\ A_5=\gamma_1(\kappa),\ D_0=\gamma_2(1), \\ &(C_i)_0=\gamma_{i+2}(1)\quad\text{for } 1\leq i\leq\ell,\ (C_i)_2=\gamma_{i+2}(\sigma)\quad\text{for } 1\leq i\leq\ell, \\ &E_0=\gamma_{2\ell+2}(1),\ E_2=\gamma_{2\ell+2}(\mu),\ E_3=\gamma_{2\ell+2}(\nu),\ E_5=\gamma_{2\ell+2}(\mu\nu), \\ &F_0=\gamma_{2\ell+3}(1),\ F_2=\gamma_{2\ell+3}(\rho), \end{aligned}$$

$$(U_k)_0 = \begin{cases} 2 & (k=0), \\ (C_k)_0 & (0 < k \leq \ell), \\ D_0(C_{2\ell-k})_0 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ even}), \\ (C_{2\ell-k})_0 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ odd}), \\ 2D_0 & (k = 2\ell), \end{cases}$$

$$(V_k)_2 = \begin{cases} B_2 & (k=0), \\ (C_k)_2 & (0 < k \leq \ell), \\ tD_0(C_{2\ell-k})_2 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ even}), \\ t(C_{2\ell-k})_2 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ odd}), \\ D_0B_2 & (k = 2\ell). \end{cases}$$

さらに，$I_0 = D_0 + 1$, $J_0 = D_0 - 1$, $(U_{-k})_0 = D_0(U_{2\ell-k})_0$ for $1 \leq k \leq 2\ell$, $(V_{-k})_2 = D_0(V_{2\ell-k})_2$ for $1 \leq k \leq 2\ell$ とおく．

積の計算については，0 次の生成元の間の積については，$\mathbb{Z}G$ の中心における通常の積に一致することを用いる．また，他の生成元の積は定理 1(Product Formula) 及び，レストリクションやコレストリクションなどの計算結果などを使い計算することにより得られる．また，$HH^*(\mathbb{Z}G)$ は $H^*(G,\mathbb{Z})$ を部分環として含んでいることも用いる．

このとき，$H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は，上記の元の積によって生成されることが確認できる．また，環構造を記述するために必要な生成元の間の関係式もすべて得ることができた．結果として，次の定理を得た．

Theorem 5. ℓ が偶数のとき，ホッホシルトコホモロジー環 $H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は可換環であり，$\mathbb{Z}$ 上次の元の積で生成される:

$$\begin{gathered} D_0,\ (C_i)_0\ \ (1 \leq i \leq \ell),\ E_0,\ F_0 \in H^0(G, {}_\psi\mathbb{Z}G), \\ A_2,\ B_2,\ (C_i)_2\ \ (1 \leq i \leq \ell),\ E_2,\ F_2 \in H^2(G, {}_\psi\mathbb{Z}G), \\ E_3 \in H^3(G, {}_\psi\mathbb{Z}G),\ A_4 \in H^4(G, {}_\psi\mathbb{Z}G),\ A_5,\ E_5 \in H^5(G, {}_\psi\mathbb{Z}G). \end{gathered}$$

生成元の間の関係式は次の通り:

(i) degree-0 relations

$$I_0J_0 = J_0(C_\ell)_0 = J_0E_0 = J_0F_0 = 0,$$

$$(C_i)_0E_0 = \begin{cases} 2E_0 & (i\ \textit{even}), \\ 2F_0 & (i\ \textit{odd}), \end{cases} \quad (C_i)_0F_0 = \begin{cases} 2F_0 & (i\ \textit{even}), \\ 2E_0 & (i\ \textit{odd}), \end{cases}$$

$$E_0^2 = F_0^2 = 2\ell I_0\Bigg(1 + \sum_{k=1}^{(\ell/2)-1} (C_{2k})_0\Bigg) + 2\ell(C_\ell)_0,\ E_0F_0 = 2\ell\sum_{k=1}^{\ell/2} I_0(C_{2k-1})_0,$$

$$(C_i)_0(C_j)_0 = \begin{cases} (U_{i+j})_0 + (U_{i-j})_0 & (j \ \mathit{even}), \\ (U_{i+j})_0 + D_0(U_{i-j})_0 & (j \ \mathit{odd}); \end{cases}$$

(ii) degree-2 relations

$$2A_2 = 2B_2 = 4\ell(C_i)_2 = 2E_2 = 4F_2 = 0,\ D_0(C_\ell)_2 = t(C_\ell)_2,$$

$$I_0E_2 = E_0A_2,\ I_0F_2 = (C_i)_0A_2 = E_0B_2 = 0,\ F_0A_2 = F_0B_2 = 2F_2,$$

$$(C_i)_0B_2 = 2\ell(C_i)_2,\ (C_i)_0E_2 = E_0(C_i)_2 = \begin{cases} 0 & (i \ \mathit{even}), \\ 2F_2 & (i \ \mathit{odd}), \end{cases}$$

$$(C_i)_0F_2 = F_0(C_i)_2 = \begin{cases} 2F_2 & (i \ \mathit{even}), \\ 0 & (i \ \mathit{odd}), \end{cases}$$

$$(C_i)_0(C_j)_2 = \begin{cases} (V_{i+j})_2 + t(V_{i-j})_2 & (j \ \mathit{even}), \\ (V_{i+j})_2 + tD_0(V_{i-j})_2 & (j \ \mathit{odd}), \end{cases}$$

$$E_0E_2 = F_0F_2 + I_0A_2 = I_0(A_2 + B_2) + 2\ell \sum_{k=1}^{(\ell/2)-1} I_0(C_{2k})_2 + 2\ell(C_\ell)_2,$$

$$E_0F_2 = F_0E_2 = 2\ell \sum_{k=1}^{\ell/2} I_0(C_{2k-1})_2;$$

(iii) degree-3 relations

$$2E_3 = I_0E_3 = (C_i)_0E_3 = E_0E_3 = F_0E_3 = 0;$$

(iv) degree-4 relations

$$4\ell A_4 = 2E_0A_4 = 4F_0A_4 = A_2B_2 = B_2^2 = A_2(C_i)_2 = B_2E_2 = 0,$$

$$A_2F_2 = B_2F_2 = 2F_0A_4,\ B_2(C_i)_2 = 2\ell(C_i)_0A_4,$$

$$(C_i)_2(C_j)_2 = \begin{cases} ((U_{i+j})_0 + t(U_{i-j})_0)\, A_4 & (j \ \mathit{even}), \\ ((U_{i+j})_0 + tD_0(U_{i-j})_0)\, A_4 & (j \ \mathit{odd}), \end{cases}$$

$$(C_i)_2E_2 = \begin{cases} 0 & (i \ \mathit{even}), \\ 2F_0A_4 & (i \ \mathit{odd}), \end{cases} \quad (C_i)_2F_2 = \begin{cases} 2F_0A_4 & (i \ \mathit{even}), \\ 0 & (i \ \mathit{odd}), \end{cases}$$

$$E_2^2 + A_2^2 = F_2^2 = 2\ell I_0A_4 + 2\ell \sum_{k=1}^{(\ell/2)-1} I_0(C_{2k})_0A_4 + 2\ell(C_\ell)_0A_4,$$

$$E_2F_2 = 2\ell \sum_{k=0}^{(\ell/2)-1} I_0(C_{2k+1})_0A_4;$$

(v) degree-5 relations

$$2A_5 = 2E_5 = (C_i)_0A_5 = F_0A_5 = (C_i)_0E_5 = F_0E_5 = B_2E_3 = (C_i)_2E_3 = F_2E_3 = 0,$$

$$E_0A_5 = A_2E_3 = I_0E_5,\ E_0E_5 = E_2E_3 = I_0A_5;$$

(vi) degree-6 relation

$E_3^2 = 0;$

(vii) degree-7 relations

$B_2A_5 = (C_i)_2A_5 = F_2A_5 = B_2E_5 = (C_i)_2E_5 = F_2E_5 = 0;$

$A_2E_5 = E_2A_5,\ E_2E_5 = A_2A_5;$

(viii) degree-8 relations

$E_3A_5 = E_0A_2^2A_4,\ E_3E_5 = I_0A_2^2A_4;$

(ix) degree-10 relations

$A_5^2 = E_5^2 = A_2^3A_4,\ A_5E_5 = E_2A_2^2A_4.$

Remark 6. $\ell = 2^k$ $(k \geq 1)$ のとき，$HH^*(\mathbb{Z}G)$ の環構造はすでに，[8] によって与えられている．

§2.2 ℓ が奇数の場合

この章では，ℓ が奇数の場合のホッホシルトコホモロジー環について考察する．記号は §1.2 のものをそのまま用いる．ℓ が偶数のときと同様に，加法群としての同型 (Additive Decomposition) を用いると，$\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー加群が分かる．

$$HH^n(\mathbb{Z}G) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{2\ell+6} & (n=0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4n} \oplus (\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{2\ell+2} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 & (n=4k\ (k \neq 0)), \\ 0 & (n=1), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4n-4} & (n=4k+1\ (k \neq 0)), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4n} \oplus (\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{2\ell-2} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^8 & (n=4k+2), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4n-4} & (n=4k+3). \end{cases}$$

また，G の共役類の代表元を次のようにとり，

$$g_{i+1} = x^{i\ell}\ \ (i=0,1,2,3),\ g_{i+4} = x^i\ \ (1 \leq i < \ell),$$
$$g_{\ell+i+3} = x^{2\ell+i}\ \ (1 \leq i < \ell),\ g_{2\ell+i+3} = x^iy\ \ (i=0,1,2,3),$$

そして，これらの中心化群を次のようにおく:

$$G_i = G\ \ (i=1,2,3,4),\ G_{i+4} = \langle x \rangle\ \ (1 \leq i \leq 2\ell-2),$$
$$G_{2\ell+i+3} = \begin{cases} \langle x^\ell, x^iy \rangle & (i=0,2), \\ \langle x^\ell, x^{\ell+i}y \rangle & (i=1,3). \end{cases}$$

さらに，次のようにおく:

$$A_2 = \gamma_1(\beta),\ B_2 = \gamma_1(\xi),\ A_3 = \gamma_1(\tau),\ A_4 = \gamma_1(\zeta),\ D_0 = \gamma_2(1),$$

$$(C_i)_0 = \gamma_{i+4}(1) \text{ for } 1 \le i < \ell,\ (C_i)_2 = \gamma_{i+4}(\sigma) \text{ for } 1 \le i < \ell,$$
$$E_0 = \gamma_{2\ell+3}(1),\ F_0 = \gamma_{2\ell+4}(1),$$
$$(U_k)_0 = \begin{cases} 2 & (k=0), \\ (C_k)_0 & (1 \le k < \ell), \\ 2D_0 & (k=\ell), \\ D_0^2(C_{2\ell-k})_0 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ even}), \\ (C_{2\ell-k})_0 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ odd}), \end{cases}$$
$$(V_k)_2 = \begin{cases} 2B_2 & (k=0), \\ (C_k)_2 & (1 \le k < \ell), \\ 2D_0B_2 & (k=\ell), \\ tD_0^2(C_{2\ell-k})_2 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ even}), \\ t(C_{2\ell-k})_2 & (\ell < k < 2\ell \text{ and } k \text{ odd}). \end{cases}$$

また，$(U_{-k})_0 = D_0^2(U_{2\ell-k})_0$，$(V_{-k})_2 = D_0^2(V_{2\ell-k})_2$ とする $(1 \le k < \ell)$.

ℓ が偶数の場合と同様にして，$H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は，上記の元の積によって生成されることが分かり，そして，環構造を記述するために必要な生成元の間の関係式もすべて得ることができた.

Theorem 7. ℓ が奇数のとき，ホッホシルトコホモロジー環 $H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は可換環であり，$\mathbb{Z}$ 上次の元の積で生成される:

$$D_0,\ (C_i)_0\ \ (1 \le i < \ell),\ E_0,\ F_0 \in H^0(G, {}_\psi\mathbb{Z}G),$$
$$A_2,\ B_2,\ (C_i)_2\ \ (1 \le i < \ell) \in H^2(G, {}_\psi\mathbb{Z}G),$$
$$A_3 \in H^3(G, {}_\psi\mathbb{Z}G),\ A_4 \in H^4(G, {}_\psi\mathbb{Z}G).$$

生成元の間の関係式は次の通りである．また，$1 \le i, j < \ell$ とする:

(i) degree-0 relations

$$D_0^4 = 1,\ D_0E_0 = \begin{cases} F_0 & (\ell \equiv 1\ (4)), \\ D_0^2F_0 & (\ell \equiv 3\ (4)), \end{cases}$$
$$D_0(C_i)_0 = \begin{cases} (C_{\ell-i})_0 & (i\ even), \\ D_0^2(C_{\ell-i})_0 & (i\ odd), \end{cases} (C_i)_0E_0 = \begin{cases} 2E_0 & (i \equiv 0\ (4)), \\ 2F_0 & (i \equiv 1\ (4)), \\ 2D_0^2E_0 & (i \equiv 2\ (4)), \\ 2D_0^2F_0 & (i \equiv 3\ (4)), \end{cases}$$
$$E_0^2 = \ell + \sum_{\substack{1<s<\ell\ and \\ s\equiv 0\ (4)}} \ell(C_s)_0 + \sum_{\substack{1<s<\ell\ and \\ s\equiv 2\ (4)}} \ell D_0^2(C_s)_0,$$

$$(C_i)_0(C_j)_0 = \begin{cases} (U_{i+j})_0 + (U_{i-j})_0 & (j \ \ even), \\ (U_{i+j})_0 + D_0^2(U_{i-j})_0 & (j \ \ odd); \end{cases}$$

(ii) degree-2 relations

$$2A_2 = 4B_2 = 4\ell(C_i)_2 = (C_i)_0A_2 = 0,\ (C_i)_0B_2 = \ell(C_i)_2,$$

$$D_0(C_i)_2 = \begin{cases} t(C_{\ell-i})_2 & (i \ \ even), \\ tD_0^2(C_{\ell-i})_2 & (i \ \ odd), \end{cases} \quad E_0(C_i)_2 = \begin{cases} 2E_0B_2 & (i \equiv 0\ (4)), \\ 2F_0B_2 & (i \equiv 1\ (4)), \\ 2D_0^2E_0B_2 & (i \equiv 2\ (4)), \\ 2D_0^2F_0B_2 & (i \equiv 3\ (4)), \end{cases}$$

$$(C_i)_0(C_j)_2 = \begin{cases} (V_{i+j})_2 + t(V_{i-j})_2 & (j \ \ even), \\ (V_{i+j})_2 + tD_0^2(V_{i-j})_2 & (j \ \ odd); \end{cases}$$

(iii) degree-3 relations

$$2A_3 = (C_i)_0A_3 = 0;$$

(iv) degree-4 relations

$$4\ell A_4 = 4E_0A_4 = A_2(C_i)_2 = 0,\ B_2^2 = \ell^2A_4,\ B_2(C_i)_2 = \ell A_4(C_i)_0,$$

$$(C_i)_2(C_j)_2 = \begin{cases} ((U_{i+j})_0 + t(U_{i-j})_0)\,A_4 & (j \ \ even), \\ ((U_{i+j})_0 + tD_0^2(U_{i-j})_0)\,A_4 & (j \ \ odd); \end{cases}$$

(v) degree-5 relations

$$A_3(C_i)_2 = 0;$$

(vi) degree-6 relation

$$A_3^2 = 0.$$

§3. 一般の場合に向けて

第 3 章を通して，G は次のような位数 $2r$ $(r \geq 2)$ の split metacyclic 群

$$G = \langle x, y \mid x^r = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^t \rangle$$

とする．ただし，$1 \leq t \leq r-1,\ t^2 \equiv 1 \pmod r$ とする．

一般の split metacyclic 群に対しては，$\mathbb{Z}$ の自由分解が Wall [15] によって与えられているが，これを用いると，米田積の計算やレストリクションなどの計算をする際に，相当複雑な計算が必要になる．これらの計算を少しでもしやすくするため，Wall の自由分解よりも使いやすい自由分解を構成することを考えた．前回のコホモロジーの集会 (2017 年) で発表した G が $r = 4\ell,\ t = 2\ell + 1$ の場合では，Wall の自由分解を改良した新しい自由分解を構成し，それを利用して G の整係数コホモロジー環の構造を決定し，$\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー環を決定した．これにより，米田積の計算やレストリクションなどの計算

をする際に計算の煩雑さをある程度回避することができた．なお，第 1・2 章の内容については，前回のコホモロジーの集会 (2017 年) で発表したよりも前に計算したため，Wall の自由分解を用いて計算している．

今回，前回のコホモロジーの集会 (2017 年) で発表した新しい自由分解が，G の位数が $2r$ $(r \geq 2)$ の場合で一般化できることが確認できたので，まずはそれについてご報告させていただく．$q \geq 0$ とし，$\mathbb{Z}G$ の $q+1$ 個のコピーの直和を Y_q とおき，$c_q^1, c_q^2, \ldots, c_q^{q+1} (\in Y_q)$ を，

$$c_q^k = (\underbrace{0, \ldots, 0, \overset{k}{\check{1}}, 0, \ldots, 0}_{q+1})$$

と定める．便宜上，$k < 0$ または $k > q+1$ のときは，$c_q^k = 0$ としておく．また，

$$N_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} x^i & (k \geq 1), \\ 0 & (k = 0), \end{cases} \quad M_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} x^{ti} & (k \geq 1), \\ 0 & (k = 0), \end{cases} \quad T = \frac{t^2 - 1}{r}.$$

とおき，特に，$N = N_{4\ell}$ とする．左 $\mathbb{Z}G$ 準同型 $\delta_n : Y_n \to Y_{n-1} \quad (n > 0)$ を次のように定義する:

(i) n が偶数のとき，

$$\delta_n(c_n^k) = \begin{cases} (x^t - 1)c_{n-1}^k + (N_t - y)c_{n-1}^{k-1} + Tc_{n-1}^{k-2} & \text{for } n - k \equiv 0 \pmod 4, \\ Nc_{n-1}^k + (M_t + y)c_n^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 1 \pmod 4, \\ (x - 1)c_{n-1}^k - (y - 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 2 \pmod 4, \\ Nc_{n-1}^k + (y + 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

(ii) n が奇数のとき，

$$\delta_n(c_n^k) = \begin{cases} (x - 1)c_{n-1}^k - (M_t + y)c_{n-1}^{k-1} + Tc_{n-1}^{k-2} & \text{for } n - k \equiv 0 \pmod 4, \\ Nc_{n-1}^k - (N_t - y)c_n^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 1 \pmod 4, \\ (x^t - 1)c_{n-1}^k - (y + 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 2 \pmod 4, \\ Nc_{n-1}^k + (y - 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

このとき，次が成立する:

Proposition 8. 上の記号の下で，

$$(Y, \delta) : \cdots \to Y_n \xrightarrow{\delta_n} Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{\delta_1} Y_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

は G に対する $\mathbb{Z}$ の自由分解を与える．ただし，ε は augmentation とする．

この自由分解により，Wall の自由分解を用いるよりも，整係数コホモロジー環 $H^*(G, \mathbb{Z})$ の積の計算がしやすくなったり，また部分群のコホモロジー環との間のレストリクションなどの計算もかなりしやすくなると考えられる．

今回の研究集会では，r が奇数の場合に $\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー環の構造について最近分かったことを発表させていただいた．r が偶数の場合は，これまで分かっているものに加えて，前回や今回の集会で発表させていただいた場合を含めた一般の場合で，ホッホシルトコホモロジー環の構造を決定する際には，まだクリアしなければいけない点もあり，まだ結果が見える段階にはいたっていない．しかしながら，見通しはよくなっているので，今後また別の機会に，さらに一般の場合についてご報告させていただければ幸いである．

謝辞

今回の研究集会において，発表の機会を与えて頂いた埼玉大学の飛田明彦先生，および発表を勧めて下さった信州大学の佐々木洋城先生には，大変にお世話になりましたことを心よりお礼申し上げます．

参考文献

[1] A. P. Alekhin, Yu. V. Volkov and A. I. Generalov, *Hochschild cohomology ring of the modular group*, Algebra i Analiz **26** (2014), 3-39; translation in St. Petersburg Math. J. **26** (2015), 1-25.

[2] D. J. Benson, *Representations and cohomology II: cohomology of groups and modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[3] C. Cibils and A. Solotar, *Hochschild cohomology algebra of abelian groups*, Arch. Math. **68** (1997), 17–21.

[4] L. Evens and S. Priddy, *The cohomology of the semi-dihedral group*, Conference on algebraic topology in honor of Peter Hilton (Saint John's, Nfld., 1983), Contemp. Math., **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 61–72.

[5] A. I. Generalov, *The Hochschild cohomology of the integer group ring of a dihedral group. I. The even case.* (Russian) Algebra i Analiz **19** (2007),70-123; translation in St. Petersburg Math. J. **19** (2008), 723-763.

[6] A. I. Generalov, *Hochschild cohomology for the integer group ring of the semidihedral group* (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **388** (2011), Voprosy Teorii Predstavleni Algebr i Grupp. **21**, 119-151, 310-311; translation in J. Math. Sci. (N.Y.) **183** (2012), 640-657.

[7] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of dihedral groups*, Tsukuba J. Math. **31** (2007), 99-127.

[8] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the semidihedral* 2*-group*, Algebra Colloq. **18** (2011), 241-258.

[9] T. Hayami, *On Hochschild cohomology ring and integral cohomology ring for the semidihedral group*, Internat. J. Algebra Comput. **28** (2018), 257-290.

[10] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring and integral cohomology ring for a split metacyclic group*, submitted.

[11] T. Holm, *The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra: the commutative case*, Comm. Algebra **24** (1996), 1957–1969.

[12] T. Kawano, 「二面体群の整数係数ホッホシルト・コホモロジー環について」, 京都大学数理解析研究所講究録 **1466** 「有限群のコホモロジー論とその周辺」 (2006), 38-48.

[13] T. Nozawa and K. Sanada, *Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 545–556.

[14] S. F. Siegel and S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 131–157.

[15] C. T. C. Wall, *Resolutions for extensions of groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **57** (1961), 251–255.