Scott 加群の概分裂完全列とテンサー積について

名古屋市立大学　河田成人

Shigeto Kawata
Nagoya City University

$(K,\ \mathcal{O},\ k)$ を p-モジュラー系（p は素数）とする．すなわち，$\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環で極大イデアル $\pi\mathcal{O}$ を持ち，その剰余体 $k=\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は正標数 p の代数閉体であるとし，K は $\mathcal{O}$ の商体とする．R で $\mathcal{O}$ または k を表し，有限群 G の R 上の群環を RG で表す．ここで RG-lattice とは，R 上自由で有限生成な（右）RG-加群を意味する．H を G の部分群としたとき，RG-加群 V の作用を H に制限した RH-加群を $V{\downarrow_H}$ で表し，RH-加群 W を G に誘導して得られる RG-加群 $W\otimes_{RH}RG$ を $W{\uparrow^G}$ で表すことにする．

Q を G の p-部分群とし，ヴァーテックスが Q であるような Scott RG-加群を $S(Q)$ で表そう．ここでは，$S(Q)$ の概分裂完全列に，Q をヴァーテックスとしてもつ直既約 RG-lattice をテンサーすると，どのような短完全列となるかを考察したい．

用語について詳しいことは, 有限群の表現論に関しては [NT], [B] を, また Auslander-Reiten 理論に関しては [ASS], [ARS] 等を参照してください．

1．群環の概分裂完全列

RG-lattice の短完全列 $\mathscr{A}:0\longrightarrow N\longrightarrow M\xrightarrow{f}L\longrightarrow 0$ は次の 3 条件を満たすときに，概分裂完全列とは呼ばれる [Auslander-Reiten]：

(i) $\mathscr{A}$ は分裂しない．

(ii) $L,\ N$ は直既約である．

(iii) RG-準同型写像 $g:X\longrightarrow L$ が分裂全射でなければ，g は $f:M\longrightarrow L$ を経由する．

L を射影的でない直既約な RG-lattice とする．このとき，L で終わる概分裂完全列が一意的に存在することが Auslander-Reiten や Roggenkamp-Schmidt らによって示されている．以後，L の概分裂完全列を

$$\mathscr{A}(L):0\longrightarrow \tau L\longrightarrow m(L)\longrightarrow L\longrightarrow 0$$

と書くことにする．ここで, Auslander-Reiten translation τ は，$R=\mathcal{O}$ のときは $\tau=\Omega$（Heller operator）であり ([A],[RS])，$R=k$ のときは $\tau=\Omega^2$ である ([AR]).

Auslander-Carlson や Benson-Carlson は自明な RG-加群の概分裂完全列とテンサー積に関して次の興味深い結果を証明した．

定理 1.1([AC, Theorem 3.6], [BC, Proposition 2.15]) L は直既約 RG-lattice とし，$\mathscr{A}(R_G)$ は自明な RG-加群 R_G の概分裂完全列とする．

(1) L の rank が p で割り切れれば，$\mathscr{A}(R_G)\otimes_R L$ は分裂する．

(2) L の rank が p で割り切れなければ，$\mathscr{A}(R_G)\otimes_R L$ は概分裂完全列 $\mathscr{A}(L)$ と injective の直和である．

Scott 加群の概分裂完全列とテンサー積に関して考察して上記の結果をいくぶん拡張したい．そのために必要な準備をしておく．

まず，$R=\mathcal{O}$ の場合を考える．直既約 $\mathcal{O}G$-lattice L が射影的でなければ，$\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}G}(L):=\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(L)/\{\mathrm{projective}\}$ は simple socle を持ち，その生成元 $\rho\in\mathrm{Soc}\,(\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}G}(L))$ は almost projective と呼ばれて，L の概分裂完全列 $\mathscr{A}(L)$ はこの almost projective ρ と射影被覆の pull back として構成される [T]:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{A}(L):0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\| & & \Big\downarrow & \text{pull back} & \Big\downarrow{\scriptstyle\rho} & & \\
\text{射影被覆}:0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Carlson-Jones は $\mathcal{O}G$-lattice に対して exponent を定義し，exponential property という概念を導入した．

定義 1.2[CJ] (1) $\mathcal{O}G$-lattice L に対し，$\pi^a\mathrm{id}_L$（a は 0 以上の整数）は projective であるが $\pi^{a-1}\mathrm{id}_L$ は projective でないとき，$\exp(L)=\pi^a$ と書く．

(2) $\exp(L)=\pi^a$ である直既約 $\mathcal{O}G$-lattice L に対し，$\pi^{a-1}\mathrm{id}_L$ が almost projective であるとき，L は exponential property を持つという．

注意 Knörr は irreducible $\mathcal{O}G$-lattice の拡張として virtually irreducible $\mathcal{O}G$-lattice という概念を導入した [Kn] が，この概念と exponential property という概念は同値であることが知られている [CJ].

例（[Kn], [CJ]）　exponential property を持つ $\mathcal{O}G$-lattice の例として, 次のクラスが知られている：

(i) irreducible $\mathcal{O}G$-lattice

(ii) rank が p で割り切れないような直既約 $\mathcal{O}G$-lattice

(iii) 高さ 0 の直既約 $\mathcal{O}G$-lattice

Carlson-Jones や Knörr は exponential property に関して次の事実を示した．

定理 1.3（[Kn], [CJ]）L は直既約 $\mathcal{O}G$-lattice で，Q をヴァーテックスとして持つとする．$\mathcal{O}N_G(Q)$-llatice fL は L の $(G, Q, N_G(Q))$ に関する Green 対応子であるとし，$\mathcal{O}Q$-lattice S は L の Q-source とする．このとき，L が exponential property を持てば，fL や S も exponential property を持つ．

Green 対応と概分裂完全列に関しては，次の事実が知られている．

命題 1.4　直既約 RG-lattice L は Q をヴァーテックスに持つとする．$(G, Q, N = N_G(Q))$ に関する Green 対応を f とする．このとき，次が成り立つ．

(1)[T, Theorem 35.5]　$\mathscr{A}(fL)\!\uparrow^G$ は $\mathscr{A}(L)$ と分裂列の直和である．

(2)[IH]　$\mathscr{A}(L)\!\downarrow_N$ は $\mathscr{A}(fL)$ と「Q に制限すれば分裂する短完全列」との直和である．

$R = k$ のモジュラー表現の Green ring における内積を Benson-Parker は次で定義した：kG-加群 M, N に対し

$$(M,\ N) := \dim_k \operatorname{Hom}(M, N)$$

この内積について，Benson-Parker の結果 [BP] を利用すると次の判定条件が言える．

補題 1.5　M を直既約 kG-加群とし，$\mathscr{E} : 0 \to \Omega^2 M \to X \to M \to 0$ を kG-加群の短完全列とする．Green 環において $[\mathscr{E}] = M + \Omega^2 M - X$ とおく．

(1) $\mathscr{E}$ が分裂するための必要十分条件は $([\mathscr{E}],\ M) = 0$ である．

(2)（[Ka1, Lemma 1.7], cf. [E, Lemma 1.5]）$\mathscr{E}$ が概分裂完全列 $\mathscr{A}(M)$ であるための必要十分条件は $([\mathscr{E}],\ M) = 1$ である．

2. Scott 加群の概分裂完全列

自明な RG-加群を R_G で表すこととする．まず，$R=k$ の場合，G の p-部分群 Q に対し，可移な置換加群 $k_Q\uparrow^G$ の直既約因子 $\bar{S}(Q)$ で次の 3 条件を満たすものが存在することが知られている（例えば [NT, IV. 定理 8.4] 参照）．

(i) k_G が $\bar{S}(Q)$ の台 $\mathrm{soc}(\bar{S}(Q))$ の直既約因子として現れる．

(ii) k_G が $\bar{S}(Q)$ の頭 $\mathrm{hd}(\bar{S}(Q))=\bar{S}(Q)/\bar{S}(Q)J(kG)$ の直既約因子として現れる．

(iii) $\bar{S}(Q)$ のヴァーテックスは Q である．さらに，$\bar{S}(Q)$ の $(G,Q,N=N_{G(Q)})$ に関する Green 対応子 $f\bar{S}(Q)$ は $k(N/Q)$-加群とみなせて，自明な $k(N/Q)$-加群 $k_{N/Q}$ の射影被覆である．

また，$k_Q\uparrow^G$ の直既約分解において，上の 3 条件のどの一つについても，その条件を満たすものが一意的に定まる．このような kG-加群 $\bar{S}(Q)$ を，Q をヴァーテックスに持つ Scott kG-加群と呼ぶ．

次に，$\mathcal{O}$ 上の場合を考える．k 上の置換加群の直和因子は $\mathcal{O}$ 上の置換加群の直和因子に一意的に持ち上げ可能である（例えば [NT, IV. 定理 8.9]）．$\mathcal{O}_Q\uparrow^G$ の直既約因子で $\bar{S}(Q)$ の持ち上げとなっているものを $S(Q)$ と書き，Q をヴァーテックスに持つ Scott $\mathcal{O}G$-lattice と呼ぶ：$S(Q)/\pi S(Q)\cong\bar{S}(Q)$．なお，$S(Q)$ は $\mathcal{O}_Q\uparrow^G$ の直既約因子の中で $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}G}(S(Q),\mathcal{O}_G)\neq 0$ となる唯一のものである．

Q が G の正規部分群のときは，$S(Q)$ は $\mathcal{O}(G/Q)$-lattice とみなせて，自明な $\mathcal{O}(G/Q)$-lattiice $\mathcal{O}_{G/Q}$ の射影被覆であり，入射包絡でもある．そして，次の写像 $\rho\in\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}S(Q)$ が almost projective である：

$$\rho : S(Q)\overset{\text{射影被覆}}{\twoheadrightarrow}\mathcal{O}_{G/Q}\xrightarrow{|G/Q|\pi^{-1}}\mathcal{O}_{G/Q}\overset{\text{入射包絡}}{\hookrightarrow}S(Q)$$

$S(Q)$ で終わる $\mathcal{O}G$-lattice の概分裂完全列 $\mathscr{A}(S(Q))$ について次のことが知られている．

命題 2.1　$\mathscr{A}(S(Q))$ を Q に制限して得られる短完全列は $\mathscr{A}(\mathcal{O}_Q)$ と分裂列の直和である．

$S(Q)\otimes L$ は Q-projective である．$(\mathscr{A}(S(Q))\otimes L)\downarrow_Q$ は定理 1.1(1) と命題 2.1 から分裂すると分かるので，次が成り立つ．

補題 2.2　$\mathcal{O}G$-lattice L を Q に制限した $L\downarrow_Q$ の直既約因子の rank が全て p で割り切れるとする．このとき，$\mathscr{A}(S(Q))\otimes L$ は分裂する．

直既約 $\mathcal{O}G$-lattice L は Q をヴァーテックスに持ち，その Q-source S の rank が p で割り切れないとする．このとき，$S(Q)\otimes L$ は Q-projective であるが，$(\mathscr{A}(S(Q))\otimes L)\downarrow_Q$ は定理 1.1(2) と命題 2.1 から分裂しないと分かるので，$\mathscr{A}(S(Q))\otimes L$ は分裂しない．

注意　$S(Q)$ の概分裂完全列 $\mathscr{A}(S(Q))$ の中間項 $m(L)$ は直既約で，そのヴァーテックスは $N_{G(Q)}$ の Sylow p-部分群である（[IH], [K2]）．そのため，例えば $L=S(Q)$ で Q が G の Sylow p-部分群でなければ，$\mathscr{A}(S(Q))\otimes S(Q)$ の中間項は Q-projective なので，$\mathscr{A}(S(Q))\otimes S(Q)$ に概分裂完全列は現れない．

Q が G の正規部分群であるとする．L が Q-projective であれば，$S(Q)\xrightarrow{\text{射影被覆}}\!\!\!\!\to \mathcal{O}_{G/Q}$ に L をテンサーすると分裂全射となる．また，$\mathscr{A}(S(Q))\otimes L$ は，$\rho\otimes\mathrm{id}_L$（ここで ρ は上で見た almost projective）と $S(Q)\otimes L$ の射影被覆の pull back である．L が exponential property を持つことと，$\rho\otimes\mathrm{id}_L$ が L の almost projective と 0-map の直和となることは同値である．このことと，概分裂完全列と Green 対応の関係を述べた命題 1.4 を考え合わせれば，次が成り立つ．

定理 2.3　直既約 $\mathcal{O}G$-lattice L は Q $(\neq 1)$ をヴァーテックスに持ち，L の Q-source の rank は p で割り切れないとする．もし L が exponential property を持てば，$\mathscr{A}(S(Q))\otimes L$ は $\mathscr{A}(L)$ と分裂列の直和となる．逆に，$\mathscr{A}(S(Q))\otimes L$ が $\mathscr{A}(L)$ と分裂列の直和であれば，L は exponential property を持つ．

最後に，モジュラー表現の場合を考えよう．Q が正規部分群であるときは，$\bar{S}(Q)$ は $k(G/Q)$-加群として $k_{G/Q}$ の射影被覆であり，$\Omega\bar{S}(Q)$ の台は単純で k_G に同型である．そして，次の kG-準同型写像 $\varphi:\bar{S}(Q)\to\Omega\bar{S}(Q)$ が almost projective である：

$$\varphi:\bar{S}(Q)\twoheadrightarrow k_G=k_G\hookrightarrow\Omega\bar{S}(Q)$$

すなわち，$\mathscr{A}(\bar{S}(Q))$ は φ と $\Omega\bar{S}(Q)$ の射影被覆との pull back として構成される．

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{A}(\bar{S}(Q)):0 & \longrightarrow & \Omega^2\bar{S}(Q) & \longrightarrow & m(\bar{S}(Q)) & \longrightarrow & \bar{S}(Q) & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\| & & \Big\downarrow & \text{pull back} & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\
\text{射影被覆}:0 & \longrightarrow & \Omega^2\bar{S}(Q) & \longrightarrow & P_{\Omega\bar{S}(Q)} & \longrightarrow & \Omega\bar{S}(Q) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

kG-加群 M は Q-projective とする．$\bar{S}(Q)\twoheadrightarrow k_G$ に M をテンサーすると分裂する．また，$k=k\otimes k\hookrightarrow\Omega k\otimes\bar{S}(Q)$ に M をテンサーしたものは，M から $\Omega k\otimes M$ の写像と 0-map と

の和であるので，$\varphi \otimes \mathrm{id}_M : \bar{S}(Q) \otimes M \to \Omega\bar{S}(Q) \otimes M$ は M から ΩM への写像と 0-map の和である．このことから，$\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は，「$0 \to \Omega^2 M \to X \to M \to 0$ の形をした短完全列」とある分裂列の直和である．一方で，$\mathscr{A}(\bar{S}(Q))\downarrow_Q$ は $\mathscr{A}(k_Q)$ と分裂列の直和である．そのため定理 1.1 から，$\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は，M の Q-source の次元が p で割り切れると分裂し，M の Q-source の次元が p で割り切れなければ分裂しない．従って，次が成り立つ（Q が G の正規部分群でないときは命題 1.4 を使えば良い）．

補題 2.4　直既約 kG-加群 M のヴァーテックスは Q であり，M の Q-source の次元は p で割り切れないとする．このとき，$\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は，「$0 \to \Omega^2 M \to X \to M \to 0$ の形をした分裂しない短完全列」とある分裂列の直和である．

上の補題から，Benson-Carlson によって示された次の事実の別証明を得る．

命題 2.5[BC, Proposition 2.4]　直既約 kG-加群 M のヴァーテックスは Q であり，M の Q-source の次元は p で割り切れないとする．このとき，$\bar{S}(Q)$ が $M \otimes M^*$ の直既約因子として現れる．

証明　Green 環における内積を利用して，$([\mathscr{A}(\bar{S}(Q))],\ M \otimes M^*) \neq 0$ を示せば良い．$([\mathscr{A}(\bar{S}(Q))],\ M \otimes M^*) = ([\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M],\ M)$ であるが，補題 2.4 から $\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は「$0 \to \Omega^2 M \to X \to M \to 0$ の形をした分裂しない短完全列」である．よって，補題 1.5 から $([\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M],\ M) \neq 0$ が従う． □

Green 環の内積を考える（補題 1.5）と，$M \otimes M^*$ の直既約因子として $\bar{S}(Q)$ が重複度が 1 で現れるときに限り, $\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は $\mathscr{A}(M)$ と分裂列の直和となることが分かる．例えば，M（もしくは M の Green 対応子 fM）が単純加群のとき，$M \otimes M^*$ に $\bar{S}(Q)$ が重複度が 1 で現れるので，このようなときには，$\mathscr{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は $\mathscr{A}(M)$ と分裂列の直和となる．

参考文献

[ASS]　Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[A] Auslander, M.: *Functors and morphisms determined by objects*, in "Proceedings of conference on Repreentation Theory, Phiradelphia 1976," pp. 1–244, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 37, Marcel Dekker, New York, 1978.

[AC] Auslander, M. and Carlson, J.F.: *Almost-split sequences and group rings*, J. Algebra **103**(1986), 122-140.

[AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras III: Almost split sequences*, Comm. Algebra **3**(1975), 239–284.

[ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[B] Benson, D. J.: Representations and Cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[BC] Benson, D. J.and Carlson, J.F.: *Nilpotent elements in the Green ring*, J. Algebra **104**(1986), 329-350.

[BP] Benson, D. J.and Parker, R.A.: *The Green ring of a finite group*, J. Algebra **87**(1984), 290-331.

[CJ] Carlson, J. F. and Jones, A.: *An exponential property of lattices over group rings*, J. London Math. Soc. **39**(1989), 467–479.

[E] Erdmann, K.: *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver of p-groups*, Math. Z. **203**(1990), 321–334.

[IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.

[Ka1] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components for certain group modules*, Osaka J. Math. **30**(1993), 137–157.

[Ka2] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings*, J. Algebra **322**(2009), 1395–1405.

[Kn] Knörr, R.: *Virtually irreducible lattices*, Proc. London Math. Soc. **59**(1989), 99–132.

[NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[RS] Roggenkamp, K. W.and Schmidt, J.: *Almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **4**(1976), 893–917.

[T] Thévenaz, J.: G-Algebras and Modular Representation Theory, Clarendon Press, Oxford, 1995.