Loewy series of centers of modular group algebras

千葉大学大学院理学研究院　音喜多 純拓
Yoshihiro Otokita
Graduate School of Science,
Chiba University

概要

本稿は RIMS 共同研究（公開型）「有限群のコホモロジー論とその周辺」（2019 年 2 月 13 日〜2 月 15 日）における講演内容の要約と補足である．

以下では G を有限群，F を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする．モジュラー群環 FG の各ブロック B に対し，これに属する通常既約指標の集合を $\mathrm{Irr}(B)$ とする．Héthelyi-Külshammer は次の問題を提起した [2]：

B が非自明な不足群を持つならば $2\sqrt{p-1} \leq |\mathrm{Irr}(B)|$ ではないか？

不足群が特別な場合（例えば巡回群）にはこの不等式が確かめられているが，一般的な解答はまだ得られていない．これは指標の個数に関する問いだが，一方で $|\mathrm{Irr}(B)|$ の値はブロックの中心 ZB の F-次元と一致するので，上の式を B の環構造についての予想と解釈することができる．本研究ではこの視点に立ち，ZB の性質を明らかにしたい．本稿では特に ZB の Loewy 列の長さに関する結果を述べる．これまでの研究 [6, 7, 8, 10] では，この値の上限が与えられているが，今回は新たに下限を示す．

Masckhe の定理と不足群

ここでは G の部分群と FG，および B の関係性を述べ，ブロックの不足群を定義する．
以下，H を G の部分群，$\Lambda \in \{FG, B\}$ とする．
Λ は自然な作用で FH-加群となるので，全射な両側 Λ-準同型写像

$$\mu_H : \Lambda \otimes_{FH} \Lambda \to \Lambda, \quad \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha\beta$$

が定義できる．このとき次の 2 条件を満たす G の p-部分群 D_Λ が存在する．

- μ_{D_Λ} は分裂する，
- μ_H が分裂するならば $D_\Lambda \leq_G H$.

すなわち D_Λ は μ_H が分裂する中で共役の差を除いて最小の部分群である．この p-群について次の事実が知られている．

定理 1. 記号は前と同様とする．

(1) $\Lambda = FG$ のとき D_Λ は G の Sylow p-部分群である．

(2) Λ が半単純であることと D_Λ が自明な群であることは同値である．したがって FG が半単純であることは G の位数が p と素であることが必要十分である（Masckhe の定理）．

以下では Λ がブロック B の場合を考え，p-群 D_Λ を単に D と表す．これを B の不足群という．上の定理より B が半単純（したがって特に単純）であることの同値条件は D が自明であることである．有限群のモジュラー表現論においては不足群とブロックの関係性を明らかにすることが重要な問題として考えられている．例えば B が有限表現型となるのは D が巡回群の場合に限ることが知られている（[1] 参照）．

ブロックの Loewy 列

任意の F-多元環 Λ に対し，その Loewy 列の長さを $L(\Lambda)$ とする．すなわち

$$L(\Lambda) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid (\mathrm{rad}\ \Lambda)^l = \{0\}\}.$$

本稿の目的は $\Lambda = ZB$ についての結果を述べることだが，比較のために $\Lambda = B$ の場合の研究を紹介する．上と同様，D を B の不足群とする．

定理 2. D は非自明と仮定し，$p^d = |D|$ をその位数，$p^e = \exp(D)$ を指数，$r = \mathrm{rank}(D)$ をランクとする．

(1) (Külshammer [5]) $p^{e-1} + 1 \leq L(B)$,

(2) (Oppermann [9]) $r + 1 \leq L(B)$,

(3) (Koshitani-Külshammer-Sambale [4]) $L = L(B)$ とすると

$$d \leq \binom{L}{2}\{2\log_p(L-1)+1\},$$

(4) (Koshitani [3]) G が p-可解群のとき $d(p-1)+1 \leq L(B)$.

上の (3), (4) より $L(B)$ の下限を D の位数によって与えることができるが，これは中心 ZB との相違点の 1 つである．以降で示すように $L(ZB)$ ではこのような下限を構成することができない．

ブロックの中心

ここで本稿の主定理であるブロックの中心 ZB の Loewy 列の長さ $L(ZB)$ に関する結果を述べる．

定理 3. （主定理 [11]）ブロック B の不足群を D とする．その中心 $Z(D)$ の指数を p^ε とすると

$$p^{\varepsilon-1} < \frac{p^\varepsilon + p - 2}{p-1} \leq L(ZB).$$

主定理より次の２つが導かれる．

- $\varepsilon \neq 0, 1$ のときは $2\sqrt{p-1} < L(ZB) \leq |\mathrm{Irr}(B)|$，
- D が非自明な可換群ならば Külshammer の不等式（定理 2）は $p^{e-1} + 1 \leq L(ZB) \leq L(B)$ と精密化できる．

また次の２点を注意したい．

- ブロック B が不足群

  $$D = \langle x, y \mid x^{p^{d-1}} = y^p = 1,\ y^{-1}xy = x^{1+p^{d-2}} \rangle, \quad d \geq 4$$

  を持つとする．よく知られているように D の指数は p^{d-1}，$Z(D) = \langle x^p \rangle$ である．このとき Külshammer-Sambale [7] より $L(ZB) \leq p^{d-2}$ が成り立つ．したがって一般には主定理において「$Z(D)$ の指数」を「D の指数」に置き換えることはできない．

- 整数 $a \geq 1$ に対し

  $$G = \left\{ \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \ ;\ u \in \mathbb{F}_q^\times, \quad v \in \mathbb{F}_q \right\}$$

  （ただし $q = p^a$）とすると FG は直既約で，したがってそれ自身がブロックである．この不足群は Sylow p-部分群に一致し，位数 p^a の初等可換群（つまり $\varepsilon = 1$ の場合）である．このとき a の値に依らず常に $L(ZB) = 2$ が成り立つ．よって一般には D の位数を用いて $L(ZB)$ の下限を与えることはできない．

References

[1] J. E. Humphreys, Modular representations of finite groups of Lie type, London Math. Soc. Lecture Note Series **326** (Cambridge University Press, 2006).

[2] L. Héthelyi and B. Külshammer, *On the number of conjugacy classes of a finite solvable group*, Bull. London Math. Soc. **32** (2000), 668–672.

[3] S. Koshitani, *On lower bounds for the radical of a block ideal in a finite p-solvable group*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **27** (1984), 65–71.

[4] S. Koshitani, B. Külshammer and B. Sambale, *On Loewy lengths of blocks*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 555–570.

[5] B. Külshammer, *Bemerkungen über die Gruppenalgebra als symmetrische Algebra. II*, J. Algebra **75** (1982), 59–69.

[6] B. Külshammer, Y. Otokita and B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks II*, Nagoya Math. J. **234** (2019), 127–138.

[7] B. Külshammer and B. Sambale. *Loewy lengths of centers of blocks*, Q. J. Math. **69** (2018), 855–870.

[8] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408.

[9] S. Oppermann, *A lower bound for the representation dimension of* kC_p^n, Math. Z. **256** (2007), 481–490.

[10] Y. Otokita, *Characterizations of blocks by Loewy lengths of their centers*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 3323–3329.

[11] Y. Otokita, *Lower bounds on Loewy lengths of centers of blocks*, submitted.