Ky Fan の定理の位相幾何的な一般化について

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University

1　序

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の基本ベクトルとし, Γ^n を $n+1$ 個の 0-sphere$\{\pm\boldsymbol{e}_i\}(i=1,2,\ldots,n+1)$ の join

$$\Gamma^n = \{\pm\boldsymbol{e}_1\} * \{\pm\boldsymbol{e}_2\} * \cdots * \{\pm\boldsymbol{e}_{n+1}\}$$

により定義する. Γ^n には, $\pm\boldsymbol{e}_1, \pm\boldsymbol{e}_2, \ldots, \pm\boldsymbol{e}_{n+1}$ を頂点 (0-単体) とする自然な単体複体の構造が考えられるが, これを Γ^n の標準的な複体の構造と呼ぶことにする.

ユークリッド空間の中の単体複体 K が **antipodally symmetric** であるとは, $\sigma \in K$ に対して, $-\sigma \in K$ となっていることをいう. また, antipodally symmetric な複体 K に対して,

$$\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\} \quad (V(K) \text{ は } K \text{ の 0-単体の集合})$$

が $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ をみたすとき, λ を **antipodally symmetric な K の labeling** という. 特に, antipodally symmetric な K の labeling $\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ が, K の任意の 1-単体 $\{v_0, v_1\}$ に対して. $\lambda(v_0) \neq -\lambda(v_1)$ をみたすとき, **complementary edge のない** antipodally symmetric な K の labeling と呼ぶ.

$\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ に対して, d-単体 $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ が

$$\{\lambda(v_0), \lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_d)\} = \{+j_0, -j_1, +j_2, \ldots, (-1)^d j_d\} \quad (1 \leqq j_0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_d)$$

を満たすとき, σ を λ に関して $+$-alternating といい,

$$\{\lambda(v_0), \lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_d)\} = \{-j_0, +j_1, -j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_d\} \quad (1 \leqq j_0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_d)$$

を満たすとき, σ を λ に関して $-$-alternating という. 本稿のタイトルにある Ky Fan の定理は次のものである (cf.[3]).

Ky Fan の定理. Γ^n に標準的な複体の構造を考え, K をその antipodally symmetric な細分とする. $\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とするとき, K には λ に関して $+$-alternating な n-単体が奇数個存在する.

以下では, 有限集合 X の元の個数を $\sharp X$ で表すことにする. 上の Ky Fan の定理の中にある単体複体 K は $\boldsymbol{Z}_2$ が作用し, 幾何的実現 $|K|$ が球面と同相なものと考えられる。球面の対心作用 (自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用) による軌道空間は実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ で $p\colon S^n \to \boldsymbol{R}P^n$ の第 1 Stiefel-Whitney class $w(S^n)$ は $w(S^n)^n \neq 0$ を満たしている。この観点から Ky Fan の定理は次のように拡張できる。

定理 1. m, n を $m \geqq n+1$ を満たす自然数とし, K を $\boldsymbol{Z}_2$ 有限単体複体で, $|K|$ は 連結な n 次元 $\boldsymbol{Z}_2$ 多様体の構造を持つものとする. また, $w(K) \in H^1(K; \boldsymbol{Z}_2)$ を $p\colon |K| \to |K|/\boldsymbol{Z}_2$ の第 1 Stiefel-Whitney 類とする. このとき, $\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とすると, 次が成り立つ.

$$\sharp\{\sigma \in K \mid \sigma \text{ is a } +\text{-alternating } n\text{-simplex}\} \equiv \begin{cases} 1 \pmod 2 & (w^n(K) \neq 0) \\ 0 \pmod 2 & (w^n(K) = 0) \end{cases}$$

定理の中の complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling というのは球面のときと同様で, antipodally symmetric は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元を T とするとき, $\lambda(Tv) = -\lambda(v)$ を満たすことであり, complementary edge は 1-単体 $\{u, v\}$ で $\lambda(u) = -\lambda(v)$ となるもののことである.

本稿は [1] で与えた Ky Fan の定理の視点から Ky Fan の定理の一般化を与えたものであり、定理 1 の証明のアイデアは、交叉理論など [1] と同様の考察に基づくものである。

2 同変写像の交点数

以下では, 多様体は境界がないものとし, 球面上には対心作用により $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考えるものとする. 定理 1 の証明の証明に必要な交点数に関する定理は次のものであり, これを証明することを本節の目標とする.

定理 2.1. m, n を $m \geqq n \geqq 0$ を満たす整数とし, X を S^m の $\boldsymbol{Z}_2$ 部分多様体で, X は S^{m-n} と同相であるものとする. N を $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する n 次元連結閉多様体とし, $w(N)$ を $p\colon N \to N/\boldsymbol{Z}_2$ の第 1 Stiefel-Whitney 類とする. $f\colon N \to S^n$ を X と transversal な $\boldsymbol{Z}_2$ 写像とするとき, $f^{-1}(X)$ の元の個数 $\sharp f^{-1}(X)$ について次が成り立つ.

$$\sharp f^{-1}(X) \equiv \begin{cases} 2 \pmod 4 & (w^n(N) \neq 0) \\ 0 \pmod 4 & (w^n(N) = 0) \end{cases}.$$

この定理を証明する前に、交叉理論について復習しておこう.

M を m 次元 (位相) 多様体とし, N_1 をその $m-n$ 次元部分多様体, N_2 を n 次元部分多様体とするとき $(0 \leqq n \leqq m)$, 任意の $p \in N_1 \cap N_2$ において, p の近傍 U で $(U, U \cap N_1, U \cap N_2)$ が $(\boldsymbol{R}^{m+n}, \boldsymbol{R}^m \times \{\boldsymbol{0}\}, \{\boldsymbol{0}\} \times \boldsymbol{R}^n)$ と同相になるようなものが存在するとき, N_1 と N_2 は **trensverse に交わる**という.

M を m 次元 (位相) 多様体, N を n 次元多様体とし $(0 \leqq n \leqq m)$, L を M の $(n-m)$ 次元部分多様体とする, 連続写像 $f\colon N \to M$ が L と **transversal な写像**とは, $N \times M$ の部分多様体 $\{(x, f(x)) \mid x \in N\}$ と $N \times L$ が transverse に交わるときをいう. N がコンパクトであれば, $f\colon N \to M$ が L と transversal な写像であるとき, f^{-1} は有限集合であることに注意しておく.

以下, 多様体は向きづけ不可能なものも扱うのでホモロジー, コホモロジーの係数は $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$(以下では $\boldsymbol{Z}_2$ と書く) とし, 閉多様体 M に対し, その基本ホモロジー類を $[M]$ で表すことにする. N を閉多様体とし, $f\colon N \to N$ を連続写像とする. このとき, $(\mathrm{id}, f)\colon N \to N \times M$ を考えると, [5] の定理 15.3 と同様の証明で次が成り立つことがわかる.

命題 2.2. $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}$ をそれぞれ $H^*(M)$, $H^*(N)$ の同次基とし, $f^*(\alpha_i) = \sum_j a_{ij}\beta_j (a_{ij} \in \boldsymbol{Z}_2)$ とおくとき,

$$\theta^{-1}(\mathrm{id}, f)_*[N] = \sum_{i,j} a_{ij}\beta_j \times \alpha_i^{\sharp}.$$

ここで, $\theta\colon H^*(N\times M)\to H_{m+n-*}(N\times M)$ は Poincaré 双対同型写像であり, $\alpha_i^\sharp$ はすべての j に対して $\langle\alpha_j\cup\alpha_i^\sharp\rangle=\delta_{ij}$ を満たすものである.

定理 2.1 は次の命題より証明される.

命題 2.3. m,n を $0\leqq n\leqq m$ をみたす整数とする. N を n 次元閉多様体とし, L を $\boldsymbol{R}P^m$ の $(m-n)$ 次元閉部分多様体で, 包含写像から誘導される $(m-n)$ 次ホモロジー群の準同型 $i_*\colon H_{m-n}(L)\to H_{m-n}(\boldsymbol{R}P^m)$ が同型であるものとする. このとき, $f\colon N\to\boldsymbol{R}P^n$ が L と transversal regular な写像であれば,

$$\sharp f^{-1}(L)\equiv\langle f^*w^n,[N]\rangle\pmod 2$$

である. ここで, $w\in H^1(\boldsymbol{R}P^m;\boldsymbol{Z}_2)$ は 2 重被覆 $S^m\to\boldsymbol{R}P^m$ の第 1 Stiefel-Whitney 類 ($H^1(\boldsymbol{R}P^m)\cong\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) である.

証明. $N\times\boldsymbol{R}P^m$ の部分多様体 $\{(x,f(x))|x\in N\}$ を X と書くことにすると, 部分多様体の交点数について,

$$\sharp f^{-1}(L)=\sharp(X\cap(N\times L))\equiv\langle\theta^{-1}[X]\cup\theta^{-1}[N\times L],[N\times\boldsymbol{R}P^m]\rangle\pmod 2$$

が成り立つ.

$[X]=(\mathrm{id},f)_*[N]$, $\theta^{-1}[N\times L]\cap[N\times\boldsymbol{R}P^m]=[N\times L]$ であり, $\{\beta_j\}$ を $H^*(N)$ の同次基ととする. $w\in H^1(\boldsymbol{R}P^m;\boldsymbol{Z}_2)$ を $S^m\to\boldsymbol{R}P^m$ の第 1 Stiefel-Whitney 類とし, $f^*(w^i)=\sum_j a_{ij}\beta_j(a_{ij}\in\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})$ とおくとき,

$$\begin{aligned}\langle\theta^{-1}[X]\cup\theta^{-1}[N\times L],[N\times\boldsymbol{R}P^m]\rangle&=\langle\theta^{-1}(\mathrm{id},f)_*[N],[N\times L])\rangle\\&=\langle\sum_{i,j}a_{ij}\beta_j\times w^{m-i},[N]\times[L])\rangle\\&=\sum_{i,j}a_{ij}\langle\beta_j,[N]\rangle\langle w^{m-i},[L])\rangle\\&=\sum_j a_{nj}\langle\beta_j,[N]\rangle=\langle f^*w^n,[N]\rangle\,.\end{aligned}$$

ここで, 3 行目から 4 行目の変形のところで $i_*\colon H_{m-n}(L)\to H_{m-n}(\boldsymbol{R}P^m)$ が同型であることを用いている. 以上で命題 2.3 が成り立つことが証明された.∎

定理 2.1 の証明. 定理 2.1 の X, N, $f\colon N\to S^m$ に対して, f が X と transverse な $\boldsymbol{Z}_2$ 写像であることから, f より定まる写像 $\overline{f}\colon N/\boldsymbol{Z}_2\to\boldsymbol{R}P^m$ は $X/\boldsymbol{Z}_2$ と transverse な写像であり, X が S^{m-n} と同相であることから $i_*\colon H_{m-n}(X/\boldsymbol{Z}_2)\to H_{m-n}(\boldsymbol{R}P^m)$ は同型なので, $\sharp\overline{f}^{-1}(X/\boldsymbol{Z}_2)\equiv\langle f^*w^n,[N]\rangle=\langle w(N)^n,[N/\boldsymbol{Z}_2]\rangle \pmod 2$ が成り立つ. N と S^m 上の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用が自由で, f が X と transverse な $\boldsymbol{Z}_2$ 写像なので, $\sharp f^{-1}(X)=2\sharp\overline{f}^{-1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ である. したがって, 上の結果と合わせて定理 2.1 が成り立つことがわかる.∎

3 定理 1 の証明

以下では, $\Gamma^{m-1}=\{\pm\boldsymbol{e}_1\}*\{\pm\boldsymbol{e}_2\}*\cdots*\{\pm\boldsymbol{e}_m\}$ に自然な単体複体の構造を考えたときの頂点の集合を簡単のため $\{\pm1,\pm2,\ldots,\pm m\}$ と書くことにする. このとき, Γ_m の単体複体の構造は

$$Q_m = \{S \subset \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\} \mid S \cap -S = \emptyset\}$$

に集合の包含関係により辺単体を考えて得られる Q_m の単体複体の構造と一致している. 以下では, Γ^{m-1} の標準的な複体の構造を Q_m と同じものと見る (したがって, Q_m の元を $\boldsymbol{R}^m$ における単体と見ることもある).

$S \in Q_m$ に対して, S の部分集合 $\{x_1, \dots, x_k\}(|x_1| < |x_2| < \cdots < |x_k|)$ が alternating subsequence であるとは, $x_i x_{i+1} < 0 (i = 1, 2, \dots, k-1)$ をみたすときにいう. つまり, 絶対値の小さい方からならべたとき, 正負が交互になるようなものである。

$$\mathrm{alt}(S) = \max\{k \in \boldsymbol{N} \mid \{x_1, \dots, x_k\} \subset S \text{ が alternating subsequence}\}$$

により $\mathrm{alt}(S)$ を定義する. Q_m の部分集合 $R_m^k (k \leqq m)$ を

$$R_m^k = \{S \in Q_m \mid \mathrm{alt}(S) \geqq m - k\}$$

により定める. R_m^k は単体複体にならないが,

$$\Delta R_m^k = \{(S_1, S_2, \dots, S_l) \mid S_i \in R_m^k, S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \cdots \subsetneq S_l\}$$

は Q_m の重心細分 $\mathrm{sd}(Q_m)$ の部分複体になっている. この単体複体 ΔR_m^k の多面体 $|\Delta R_m^k|$ の位相について次のことがわかっている.

定理 3.1([6, 7]). $m \geqq 1$, $0 \leqq k \leqq m$ とするとき, $|\Delta R_m^k|$ は S^k と同相である.

次に, ΔR_m^k と transverse に交わる単体について考察する.

Q_m の重心細分 $\mathrm{sd}(Q_m)$ を考え, $\mathrm{sd}(Q_m)$ の頂点 $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}(|x_1| < |x_2| < \cdots < |x_k|)$ をとる. $\mathrm{sd}(Q_m)$ の部分複体 $K_1(v), K_2(v)$ を

$$K_1(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m,\ v_1 \subsetneq v_2 \subsetneq \cdots \subsetneq v_l \subset v\}$$
$$K_2(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m,\ v \subset v_1 \subset v_2 \subset \cdots \subset v_l\}$$

により定義する. このとき, [1] にあるように $|K_1(v)| \approx D^{k-1}$, $|K_2(v)| \approx D^{m-k}$($\approx$ は同相であることを表している) で, $|K_1(v)|$ と $|K_2(v)|$ は v において transverse に交わる.

$v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ を $\mathrm{alt}(v) = k$ となるものとするとき, $K_1(v)$ の v 以外の頂点 u を取ると $u \subsetneq v$ を満たすことより, $\mathrm{alt}(u) < k$ となる. したがって, $K_1(v)$ と ΔR_m^{m-k} は v 以外に共有点を持たない. また, $K_2(v)$ は ΔR_m^{m-k} の部分複体で, $|K_2(v)|$ は $|\Delta R_m^{m-k}|$ における v の近傍となっている. したがって, 次のことがわかる.

補題 3.2. $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ を $\mathrm{alt}(v) = k$ となるものとするとき, $|K_1(v)|$ は $|\Delta R_m^{m-k}|$ と transverse に交わる.

以上で準備ができたので, 定理 1 を証明しよう.

(定理 1 の証明) m, n を $m \geqq n+1$ を満たす自然数とし, K を $\boldsymbol{Z}_2$ 有限単体複体で, $|K|$ は連結な n 次元 $\boldsymbol{Z}_2$ 多様体の構造を持つものとする. $\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とすると, λ により, 単体複体 K から Q_m への単体写像 $\lambda(\{v_1, \dots, v_k\}) = \{\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_k)\}$ が定まり, それより K と Q_m の重心細分の間の単体写像 $\mathrm{sd}(\lambda)\colon \mathrm{sd}(K) \to \mathrm{sd}(Q_m)$ を得る. また, $\mathrm{sd}(\lambda)$ から定まる連続写像

$|\mathrm{sd}(\lambda)|\colon |\mathrm{sd}(K)| \to |\mathrm{sd}(Q_m)|$ は λ が antipodally symmetric であることから $|\mathrm{sd}(\lambda)|(Tx) = -|\mathrm{sd}(\lambda)|(x)$($T$ は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) をみたす連続写像であることに注意しておこう．

$\sigma \in V(\mathrm{sd}(K))(= K)$ に対して, $v = \mathrm{sd}(\lambda)(\sigma)(\in V(\mathrm{sd}(Q_m)))$ とおくと, K の次元が n であることより, $\mathrm{alt}(v) \leqq n+1$ となっている．したがって, $\Delta R_m^{m-(n+1)}$ と $\mathrm{sd}(\lambda)(\mathrm{sd}(K))$ の共通部分は $\mathrm{alt}(v) = n+1$ となるような 0-単体のみである．$\sigma \in V(\mathrm{sd}(K))$ を $\mathrm{sd}(\lambda)(\sigma) \in V(\Delta R_m^{m-(n+1)})$ をみたすものとし, $v = \mathrm{sd}(\lambda)(\sigma)$ とおく ($v \in \Delta R_m^{m-(n+1)} \cap \mathrm{sd}(\lambda)(\mathrm{sd}(K))$ である)．$\mathrm{sd}(\lambda)$ の定義に注意すると, $\sigma \in V(\mathrm{sd}(K))$ を K の単体と見たとき, $\dim K = n$ かつ $\mathrm{alt}(\lambda(\sigma)) = n+1$ なので, σ は K の n-単体であり, $+$ または $-$-alternating ということである．このことより, σ の $\mathrm{sd}(K)$ における星状複体 $S_{\mathrm{sd}K}(\sigma)$ の $\mathrm{sd}(\lambda)$ による像は $K_1(v)$ となっていて, $S_{\mathrm{sd}K}(\sigma)$ と $K_1(v)$ が $\mathrm{sd}(\lambda)$ により 1 対 1 に対応していることがわかる．補題 2.2 より $|K_1(v)|$ と $|\Delta R_m^{m-(n+1)}|$ は transverse に交わり, このことが $\mathrm{sd}(\lambda)(\sigma) \in R_m^{m-(n+1)}$ をみたすすべての $\sigma \in \mathrm{sd}(K)$ について成り立つので, $|\mathrm{sd}(\lambda)|\colon |\mathrm{sd}(K)| \to |\mathrm{sd}(Q_m)|$ は $|\Delta R_m^{m-(n+1)}|$ と transversal な写像である．

したがって, 定理 2.1 より,

$$\sharp|\mathrm{sd}(\lambda)|^{-1}(|\Delta R_m^{m-(n+1)}|) \equiv \begin{cases} 2 \pmod 4 & (w^n(K) \neq 0) \\ 0 \pmod 4 & (w^n(K) = 0) \end{cases}$$

これは, $\mathrm{alt}(\mathrm{sd}(\lambda)(\sigma)) = n+1$ となる σ の個数であり, K の n 単体で λ に関して $+$-alternating な n-単体の個数と $-$-alternating な n-単体の個数の和が上で与えられることになる．λ が antipodally symmetric であることから, $+$-alternating な n-単体の個数と $-$-alternating な n-単体の個数は一致するので,

$$\sharp\{\sigma \in K \mid \sigma \text{ is a } +\text{-alternating } n\text{-simplex}\} \equiv \begin{cases} 1 \pmod 2 & (w^n(K) \neq 0) \\ 0 \pmod 2 & (w^n(K) = 0) \end{cases}$$

が成り立つ.∎

References

[1] 原靖浩, Borsuk-Ulam の定理の一般化とその組合せ論への応用, 京大数理解析研究所講究録 2098 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論 (2018), 83–88.

[2] 服部晶夫, 位相幾何学, 岩波基礎数学選書 (1991).

[3] M. de Longueville, A course in topological combinatorics, Universitext, Springer(2013).

[4] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer, Berlin(2003).

[5] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店 (1977).

[6] 小路史朗, 位相幾何的な手法による general Kneser hypergraph の彩色数の研究, 大阪大学理学研究科数学専攻修士論文 (2018).

[7] G. M. Ziegler, Generalized Kneser coloring theorems with combinatorial proofs, Invent. math. 147(2002), 671–691