実閉体上のデファイナブルC^rG多様体の相対性質について

川上智博
和歌山大学教育学部数学教室

1　序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ において、デファイナブル C^rG 多様体の相対性質について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{M} = (\mathbb{R},+,\cdot,<,\dots)$ に限っても、[7] により、非可算無限個存在することが知られている。

　デファイナブル集合・デファイナブル写像に関して、[1], [2] などに性質がまとめられている。また、[8] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、順序極小構造より一般化された形でまとめられている。

　ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ で考えるものとする。

2　準備

R を実閉体とする。

　構造$\mathcal{N} = (R,(f_i),(L_j),(c_k))$ とは、以下のデータで定義されるものである。

1. 集合 R を $\mathcal{N}$ の underlying set または universe という。
2. 関数の集合 $\{f_i | i \in I\}$、ただし $f_i : R^{n_i} \to R, n_i \geq 1$。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 03C64.
Key Words and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, デファイナブル C^rG 多様体, 相対性質.

3. 関係の集合 $\{L_j | j \in J\}$、ただし $L_j \subset R^{m_j}, m_j \geq 1$。

4. 特別な元の集合 $\{c_k | k \in K\} \subset R$。各 c_k を定数という。

添字集合 I, J, K は、空集合でもかまわない。

f (L) が m 変数関数 (m 変数関係) とは、$f : R^m \to R$ $(L \subset R^m)$ となることである。

項とは、以下の3つの規則にしたがって得られる有限列のことである。

1. 定数は項である。

2. 変数は項である。

3. f が m 変数関数かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$f(t_1, \ldots, t_m)$ は項である。

論理式とは、変数、関数、関係、論理記号、括弧、コンマ、$\exists, \forall$ からなる有限列で、以下の3つの規則にしたがって得られるものである。

1. 任意の二つの項 t_1, t_2 に対して、$t_1 = t_2$ と $t_1 < t_2$ は論理式である。

2. L が m 変数関係かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$L(t_1, \ldots, t_m)$ は論理式である。

3. ϕ と ψ が論理式ならば、$\neg\phi$, $\phi \vee \psi$ と $\phi \wedge \psi$ は論理式である。ϕ が論理式かつ v が変数ならば、$(\exists v)\phi$ と $(\forall v)\phi$ は論理式である。

R^n の部分集合 X が $\mathcal{N}$ においてデファイナブルとは、論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ と $b_1, \ldots, b_m \in R$ が存在して、$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^n | \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ が $\mathcal{N}$ で成り立つ $\}$ となることである。このとき、X をデファイナブル集合という。

$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \cdots)$ が順序極小構造 (o-minimal structure) とは、R の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、$(a, b)_R = \{x \in R | a < x < b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。順序が入れば、点と開区間の有限和はデファイナブルとなるので、他の関係・関数が入っても、R のデファイナブル集合が増えないことを意味する。

実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ は、順序極小構造であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

R の位相は、開区間を開基とする位相とする。R^n の位相は、積位相とする。このとき、R^n はハウスドルフ空間となる。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg} = \{x \in \mathbb{R} | x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. *(1)* 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. *(1)* $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル写像とは、f のグラフ $(\subset R^n \times R^m)$ がデファイナブル集合となることである。

(2) $f : X \to Y$ がデファイナブル同相写像とは、デファナブル写像 $f' : Y \to X$ が存在して、$f \circ f' = id_Y, f' \circ f = id_X$ となることである。

実閉体 R 上で、実数体 $\mathbb{R}$ のとき同様に、$1 \leqq r \leqq \infty$ に対して、C^r 級関数、C^r 級写像を定義することができる。ところが、一般の実閉体 R では、C^∞ 級関数に対してさえ、中間値の定理、最大値・最小値の定理、ロルの定理、平均値の定理が不成立となる。また、一変数 C^∞ 級関数 f に対して、$f' > 0$ ならば、f が増加しているという定理も不成立となる。以下がその例である。

例 2.3. $\mathcal{N} = (\mathbb{R}_{alg}, +, \cdot, <)$ とする。$a, b \in \mathbb{R}_{alg}$ に対して、$[a, b]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | a \leqq x \leqq b\}, (a, b)_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | a < x < b\}$ とする。関数 f を $f : [1, 10]_{\mathbb{R}_{alg}} \to \mathbb{R}_{alg}$ を $[1, \pi] \cap \mathbb{R}_{alg}$ 上で x, $[\pi, 2\pi] \cap \mathbb{R}_{alg}$ 上で $x - 5$, $[2\pi, 10] \cap \mathbb{R}_{alg}$ 上で $-x + 30$ と定義すると、C^∞ 級関数となる。この f に対して、中間値の定理、最大値・最小値の定理、ロルの定理、平均値の定理が不成立となる。$[1, 2\pi] \cap \mathbb{R}_{alg}$ において、$f' > 0$ であるが、f は増加関数でない。この f は $\mathcal{N}$ においてデファイナブルでない。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル写像 $f : (a, b)_R \to X$ に対して、極限点 $\lim_{x \to a+0} f(x), \lim_{x \to b-0} f(x)$ が X 内に存在することである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリー連結とは、X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y, Z で、$X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクト集合であるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクト集合とは限らない。連結デファイナブリー集合は、デファイナブリー連結集合であるが、デファイナブリー連結集合は、連結集合とは限らない。たとえば、$R = \mathbb{R}_{alg}$ なら

ば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | 0 \leq x \leq 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブリー連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.4 ([6]). R^n のデファイナブル集合 X に対して、X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.5. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合、$f : X \to Y$ をデファイナブル写像とする。X がデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* である。

デファイナブル関数に対して、例 2.3 のようなことはおこらない。

定理 2.6. *(1) (*中間値の定理*)* デファイナブル連結集合 X 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ に対して、$a, b \in X$ かつ $f(a) \neq f(b)$ ならば、$f(X)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。

*(2) (*最大値・最小値の定理*)* デファイナブリーコンパクト集合 X 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ は最大値・最小値をとる。

*(3) (*ロルの定理*)* $f : [a, b]_R \to R$ をデファイナブル関数とし、$(a, b)_R$ で微分可能で、$f(a) = f(b)$ とすると、$f'(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在する。

*(4) (*平均値の定理*)* $f : [a, b]_R \to R$ をデファイナブル関数とし、$(a, b)_R$ で微分可能とすると、$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる c が a と b の間に存在する。

(5) $f : (a, b)_R \to R$ を微分可能なデファイナブル関数とし、$(a, b)_R$ 上で $f' > 0$ ならば、f は増加している。

例 2.7. *(1)* $\mathcal{N} = (\mathbb{R}_{alg}, +, \cdot, <)$ とする。$f : \mathbb{R}_{alg} \to \mathbb{R}_{alg}, f(x) = 2^x$ は定義されない *([9])*。

(2) $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ とする。$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。また、正弦関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \sin x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。

3　デファイナブル $C^r G$ 多様体

$R = \mathbb{R}$ のとき、デファイナブル $C^r G$ 多様体が [4] で考察されている。

$X \subset R^n, Y \subset R^m$ をデファイナブル開集合とする。$1 \leqq r < \infty$ とする。

定義 3.1. *(1)* デファイナブル写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル C^r 写像とは、f が C^r 写像となることである。

(2) デファイナブル C^r 写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル C^r 級微分同相写像とは、デファイナブル C^r 写像 $f' : Y \to X$ が存在して、$f \circ f' = id_Y, f' \circ f = id_X$ となることである。

定義 3.2. ハウスドルフ空間 X が n 次元デファナブル C^r 多様体とは、X の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^k$, R^n の有限個の開集合 $\{V_i\}_{i=1}^k$ と有限個の同相写像 $\{\phi_i : U_i \to V_i\}_{i=1}^k$ が存在して、$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ならば、$\phi_i(U_i \cap U_j)$ がデファイナブル開集合で、$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ がデファイナブル C^r 微分同相写像となることである。このとき、組 $(\{U_i\}_{i=1}^k, \{\phi_i : U_i \to V_i\}_{i=1}^k)$ をデファイナブル C^r 級座標近傍系という。

デファイナブル C^r 多様体 G がデファイナブル C^r 群とは、以下の 2 条件を満たすことである。

(1) G が群である。

(2) 群演算 $G \times G \to G, G \to G$ がデファイナブル C^r 級写像である。

定義 3.3. G をデファイナブル C^r 群とする。デファイナブル C^rG 級多様体とは、デファイナブル C^r 級多様体 X と G 作用 $\phi : G \times X \to X$ からなる組 (X, ϕ) であって、ϕ がデファイナブル C^r 級写像となるものである。ここでは、(X, ϕ) と書く代わりに X と書く。

定義 3.4. X をデファイナブル C^r 級多様体、$X_1, \dots, X_n$ を X のデファイナブル C^r 級部分多様体とする。$X_1, \dots, X_n$ が一般に位置にあるとは、任意の $i \in \{1, \dots, n\}, J \subset \{1, \dots, n\} - \{i\}$ に対して、X_i が $\cap_{j \in J} X_j$ と横断的に交わることである。

$Def^r(R^n)$ を R^n 上のデファイナブル C^r 級関数全体の集合とする。$f \in Def^r(R^n)$, $\epsilon : \mathbb{R}^n \to R$ を正値デファイナブル関数とする。f の ϵ 近傍を $\{h \in Def^r(R^n) | |\partial^\alpha(h - f)| < \epsilon, \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqq r$ と定義する。ただし、$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \partial^\alpha F = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ とする。これらの ϵ 近傍から定義される位相をデファイナブル C^r 位相という。相対位相を考えることにより、R^n のデファイナブル C^r 級部分多様体にもデファイナブル C^r 位相を考えることができる。

定理 3.5 ([3])**.** G を有限群、$1 \leqq s < r < \infty$ とする。アフィンデファイナブル C^rG 多様体間のデファイナブル C^s 写像は、デファイナブル C^s 位相でデファナブル C^rG 写像で近似できる。

ここでは、上記の相対版として、次の結果を得た。

定理 3.6 ([5]). G を有限群、X, Y をアフィンデファイナブル C^rG 多様体とする。$X_1, \dots, X_n$ $(Y_1, \dots, Y_n)$ を X (Y) のデファイナブル C^rG 部分多様体とし、一般の位置にあるとする。$f : (X; X_1, \dots, X_n) \to (Y; Y_1, \dots, Y_n)$ をデファイナブル C^1G 写像とする。このとき、f はデファイナブル C^1 位相で、デファイナブル C^rG 写像 $h : (X; X_1, \dots, X_n) \to (Y; Y_1, \dots, Y_n)$ で近似できる。さらに、$1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq n$, $f|X_{i_1}, \dots, f|X_{i_k}$ がデファイナブル C^rG 写像ならば、h を $h| \cup_{j=1^k} X_{i_j} = f| \cup_{j=1^k} X_{i_j}$ にとれる。

References

[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[3] T. Kawakami, *Equivariant definable C^r approximation theorem, definable C^rG triviality of G invariant definable C^r functions and compactifications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55** (2005), 23–36.

[4] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.

[5] T. Kawakami, *Relative theorems of definable C^rG manifolds in real closed fields*, preprint.

[6] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.

[7] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.

[8] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.

[9] R. Wencel, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 109–116.