旗多様体のトーラス軌道の閉包とワイル群上の距離

枡田 幹也（大阪市立大学）

序

n 次置換群 $\mathfrak{S}_n$ には，

$$d(u,v) := \ell(u^{-1}v) \qquad u,v \in \mathfrak{S}_n$$

により，距離 d が定まる．ここで $\ell(w)$ $(w \in \mathfrak{S}_n)$ は，w を順列として表したときの転位数（または転倒数）で，w の長さと呼ばれている．このとき，$\mathfrak{S}_n$ の部分集合 A で

各 $u \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$d(u,a) = d(u,A)$ を満たす A の元 a が唯一つある

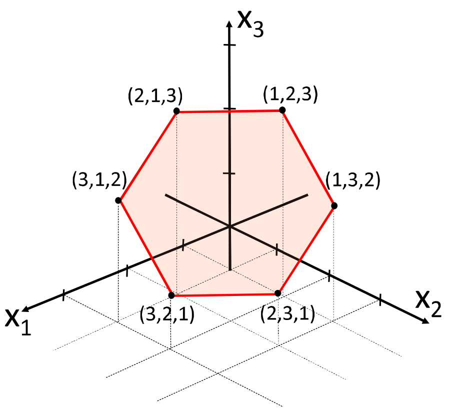
という性質を満たすものが，旗多様体の $\mathbb{C}^*$ トーラス軌道の閉包の不動点集合として得られる．また，u に対して上記の性質を満たす a を代数的に求めるアルゴリズムがある．本稿は，Eunjeong Lee (CGP-IBS), Seonjeong Park (KAIST) 両氏との共同研究 [2] の解説である．

1. 置換多面体と置換群上の距離

$\mathfrak{S}_n$ 上の距離 d は幾何学的な意味をもつ．それを説明するために，まず，置換多面体を復習する．

$$\mathrm{Perm}_{n-1} := \{(w(1),\dots,w(n)) \in \mathbb{R}^n \mid w \in \mathfrak{S}_n\} \text{ の凸包}$$

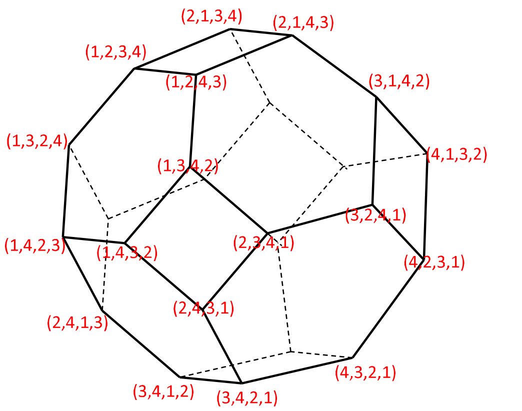
を置換多面体という．すべての $w \in \mathfrak{S}_n$ に対して $w(1)+\cdots+w(n) = n(n+1)/2$ より，Perm_{n-1} は $n-1$ 次元であることが分かる．頂点は，$\mathfrak{S}_n$ から定まる $n!$ 個の点である．



Perm_2

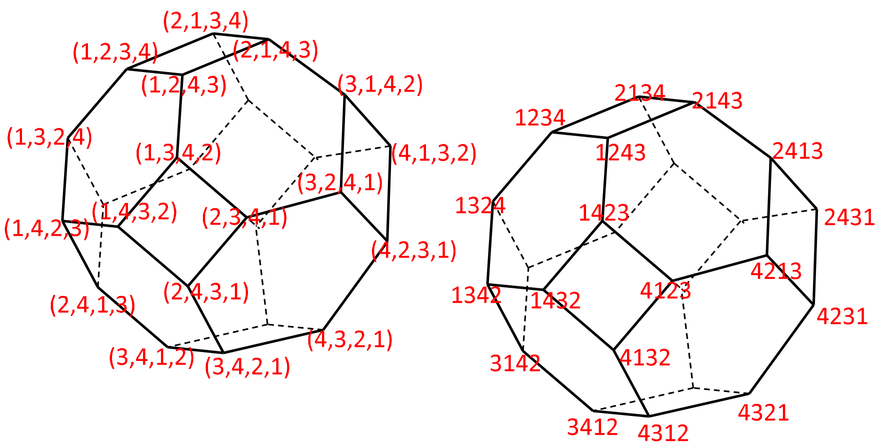
本研究は科研費 (課題番号:19K03472) の助成を受けたものである。.

Perm_3 は次のようになる．



注意. 2 頂点が 1 辺の端点 $\Longleftrightarrow$ <u>連続する</u> 2 整数が 1 組だけ入れ替わる

実は，後で述べる旗多様体のモーメント写像の関係から，$w \in \mathfrak{S}_n$ には，置換多面体 Perm_{n-1} の頂点 $(w^{-1}, \ldots, w^{-1}(n))$ を対応させると都合がよい．



例えば，$w = 4312$ のとき，$(w^{-1}(1), w^{-1}(2), w^{-1}(3), w^{-1}(4)) = (3, 4, 2, 1)$ だから，左図の頂点 $(3, 4, 2, 1)$ に 4312 というラベルを付ける（右図）．

注意. *2* 頂点が辺の端点 $\Longleftrightarrow$ <u>連続する</u> 2 整数が 1 組だけ入れ替わる（左図）
$\Longleftrightarrow$ <u>隣同士の</u> 2 整数が 1 組だけ入れ替わる（右図）

このように，$w \in \mathfrak{S}_n$ に置換多面体 Perm_{n-1} の頂点 $(w^{-1}(1), \ldots, w^{-1}(n))$ を対応させると，d は Perm_{n-1} の 1 辺の長さを 1 と思ったグラフ距離と解釈できる．

例. $u = 2413$*,* $v = 4312$ とすると，$u^{-1}v = 2431$ なので，$d(u, v) = 4$．一方

$$u = 24\underline{13} \to \underline{24}31 \to 4\underline{23}1 \to 43\underline{21} \to 4312 = v$$

（上記の注意より，上の各操作は辺に対応している．上記の右図で確認して頂きたい）．

2. 旗多様体における複素トーラス軌道の閉包と $\mathfrak{S}_n$ 上の幾何的レトラクション

旗多様体

$$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の複素 } i \text{ 次元部分空間}\}$$

に関連する基本的な事実を思い出す．まず $T = (\mathbb{C}^*)^n$ の各成分を $\mathbb{C}^n$ の各成分に掛ける作用は $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ 上の T 作用を導く．この作用の不動点集合は置換群 $\mathfrak{S}_n$ と同一視できる．実際，$w \in \mathfrak{S}_n$ に対して，旗

$$\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset \cdots \subset \langle e_{w(1)}, \ldots, e_{w(n)} \rangle$$

を対応させせる対応が同一視を与える．ここで，$e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底で，$\langle\ \rangle$ は中にある元で生成される部分ベクトル空間を表す．

$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ には，Plücker 座標を用いてモーメント写像

$$\mu\colon\ \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}^n$$

が定義でき，像 $\mu(\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n))$ は $(n-1)$ 次元置換多面体 Perm_{n-1} と一致する．これに関して次のことが知られている．

補題 2.1. *$\mu(w) = (w^{-1}(1), \ldots, w^{-1}(n))$．さらに，2 頂点 $\mu(u)$ と $\mu(v)$ が Perm_n の辺で結ばれるための必要十分条件は，$v = us_i$ となる互換 $s_i = (i, i+1)$ が存在すること，言い換えれば，u, v を one-line notation で書いたとき，隣同士の数を 1 度だけ入れ替えて u と v が移りあうことである．*

上の補題と前節の考察より，$d(u, v)$ は，u と v を Perm_{n-1} の頂点 $\mu(u)$ と $\mu(v)$ と思うと，それらのグラフ距離である．

さて，$u \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$C(u) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T) \mid x_{u(1)} < x_{u(2)} < \cdots < x_{u(n)}\}$$

を考える（本質的に Weyl chamber）．$C(u)$ の元 λ は T の 1 パラメータ部分群を定め，

$$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^{\lambda(\mathbb{C}^*)} = \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$$

である．$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ から任意に 1 点 y を取り，その T 軌道の閉包 Y を考える．まず，

$$Y^T \subset \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$$

に注意する．Atiyah-Gullemin-Sternberg の定理より，$\mu(Y)$ は $\mu(Y^T)$ を頂点とする凸多面体である．$u \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\lambda \in C(u)$ を任意にとり，

$$\bar{u} := \lim_{t \to 0} \lambda(t) y \in Y^T \subset \mathfrak{S}_n$$

を見る．$\bar{u}$ は λ の取り方には依らず u のみによるので，$\mathrm{Ret^g}_Y(u) := \bar{u}$ と定めて写像

$$\mathrm{Ret^g}_Y\colon \mathfrak{S}_n \to Y^T \subset \mathfrak{S}_n$$

を得る．$\mathrm{Ret^g}_Y$ は Y^T 上恒等写像であることが簡単に分かり，これを**幾何的レトラクション**と呼ぶ．幾何的レトラクションは次の意味をもつ．

定理 2.2 ([2])**.** *各 $u \in \mathfrak{S}_n$ に対して $d(u, v) = d(u, Y^T)$ となる $v \in Y^T$ は唯一つだけあり，それは $\mathrm{Ret^g}_Y(u)$ で与えられる．*

上記の定理は，$\mathfrak{S}_n$ の任意の部分集合に対して成り立つわけではなく，Y^T は $\mathfrak{S}_n$ のコクセターマトロイドと呼ばれているものになっている ([1])．

3. $\mathfrak{S}_n$ 上の代数的レトラクション

トーラス軌道 Y の不動点集合 Y^T が具体的に分かるとき，$\mathrm{Ret^g}_Y$ を具体的に求める方法がある．この節では，例でこれを説明する．詳細は [2] を参照されたい．

$$Y^T = \{2134,\ 2143,\ 4123,\ 4132\} \qquad \text{（下図参照）}$$

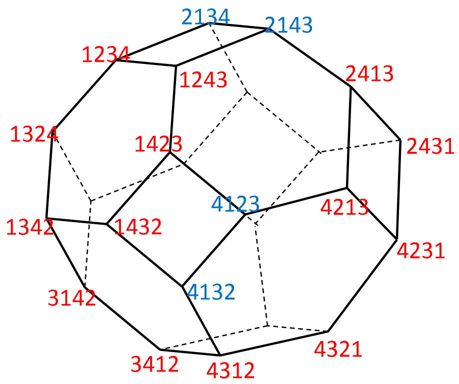
とする．このとき，$k = 1, 2, 3$ に対して，それぞれの置換において左から k 個の数を選んだ集合 J_k を考える．

$$J_1 = \{2, 4\}, \quad J_2 = \{21,\ 41\}, \quad J_3 = \{213,\ 214,\ 412,\ 413\}.$$

ここで，例えば $u = 1342$ が与えられたとすると，u の数を左から順に $1, 3, 4, 2$ と見て行って，最初に J_1 に入っているものを探す．今の場合，4 である．次に，J_2 に入っている 4? なる数？を $u = 1342$ において左か順に見て行って探すと，最初に出てくる？は 1 なので 41 を得る．次に，J_3 に入っている 41? なる数？を $u = 1342$ を左から順に見て行って探すと，最初に出てくる？は 3 なので 413 を得る．残るは 2 しかないので，最終的に 4132 を得る．つまり

$$J_1 \rightsquigarrow 4, \qquad J_2 \rightsquigarrow 41, \qquad J_3 \rightsquigarrow 413$$

このようにして，上記の Y^T と $u = 1342$ に対して 4132 を得るが，この得られた 4132 を $\mathrm{Ret^a}_{Y^T}(u)$ と記す．



一般に，$\mathfrak{S}_n$ の任意の部分集合 A に対して，上記の方法で写像

$$\mathrm{Ret^a}_A \colon \mathfrak{S}_n \to A \subset \mathfrak{S}_n$$

を得る．$\mathrm{Ret^a}_A$ は A 上恒等写像なのでレトラクションである．写像 $\mathrm{Ret^a}_A$ を**代数的レトラクション**と呼ぶ．一般の部分集合 A に対しては，$u \in \mathfrak{S}_n$ に最も近い A の点は唯一つとは限らず，例え唯一つでも，$\mathrm{Ret^a}_A(u)$ が u に最も近い A の点を与えているとは限らない．しかし，次が成立する．

定理 3.1 ([2]). トーラス軌道の閉包 Y の不動点集合 Y^T に対しては，代数的レトラクション $\mathrm{Ret^a}_{Y^T}$ は幾何学的レトラクション $\mathrm{Ret^g}_Y$ に一致する．

上記の定理により，Y^T が分かれば，各 $u \in \mathfrak{S}_n$ に対して，u に最も近い Y^T の元を代数的レトラクションの定義に従って求めることができる．

4. 結び

最後に幾つかコメントを記す.

(1) 以上はA型の話であるが，定理 2.2 は一般のリー型に，定理 3.1 は古典型の場合に拡張できるが，例外型のワイル群の部分集合に対する代数的レトラクションは見つかっていない.

(2) アフィンワイル群，または，任意の（無限）コクセター群に対して同様のことが成立するかを問うのは，面白い問題と思う.

(3) 凸多面体の頂点と辺からなるグラフ，または，一般の単純グラフに対して，同様の問題が考えられる．つまり，G を単純グラフとし，G の頂点集合 $V(G)$ にグラフ距離 d を考えたとき，$V(G)$ の部分集合 A で,

任意の $u \in V(G)$ に対して，$d(u,a) = d(u,A)$ となる $a \in A$ が唯一つ

という性質を持つものを探し，各 u に対して上記の最短点 a を見つける方法を求めよ，という問題である．筆者が知る限り，この問題は考えられていない.

References

[1] A. V. Borovik, I. M. Gelfand, and N. White, *Coxeter matroids*, Progress in Math. **216**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[2] E. Lee, M. Masuda and S. Park, *Torus orbit closures in flag varieties and retractions on Weyl groups*, arXiv:1908.08310.

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科
E-mail address: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp