線形空間と両立する位相全体と部分空間全体の対応について

大阪大学・理学研究科数学専攻 * 青山　昂頌 †
Takanobu Aoyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

本稿の目的はハウスドルフ位相体上の有限次元線形空間に対して定まる, 位相線形空間となる位相全体の成す束について得られた筆者の結果と関連する問題の紹介である. 本稿では体は可換体を指すこととする.

1　はじめに

位相の強弱はハウスドルフ性等の重要な位相的性質を反映する概念であり, 1936 年,G.Birkhoff は [2] において, 固定した集合上に定まる位相全体に包含関係を与えた半順序集合に関する研究をした. この半順序集合に関してより詳しくは, まず固定した集合 X に対して次のような集合 $\Sigma(X)$ を定める.

定義 1. 集合 X に対して, 集合 $\Sigma(X)$ を

$$\Sigma(X) := \{T \mid T \text{ は } X \text{ の部分集合族で, 開集合系の公理を満たす.}\},$$

で定め, その元を X の位相と呼ぶ.

このとき半順序集合 $(\Sigma(X), \subset)$ は次の意味で束を成すことが知られている.

定義 2. 半順序集合 $(P, \leq)$ が束であるとは P の勝手な 2 元部分集合に対して上限と下限を持つことである.
また, 束 $(P, \leq)$ が完備束であるとは P の任意個数の元からなる部分集合に対して上限と下限を持つことである.

具体的には X 上の二つの位相 T_1, T_2 に対して下限, 上限はそれぞれ

$$\begin{aligned}\inf\{T_1, T_2\} =& T_1 \cap T_2,\\ \sup\{T_1, T_2\} =& T_1 \cup T_2 \text{ を準開基とする } X \text{ 上の位相},\end{aligned}$$

で与えられ, 更に半順序集合 $(\Sigma(X), \subset)$ は完備束であることが知られている. また X が集合ではなく, 群や環などの代数構造を持ち, その代数演算を連続とする位相のみからなる $\Sigma(X)$ の部分集合も包含関係により完備束になることが知られている.
さて, 以下では集合 X は線形空間として, その線形構造と両立する位相のみを集めた $\Sigma(X)$ の部分集合を考える.

*〒 560-0044　大阪府豊中市待兼山町 1-1 Machikaneyama cho 1-1, Toyonaka, Osaka, Japan 560-0044
†E-mail:t-aoyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

定義 3. ハウスドルフ位相体 K および有限次元 K-線形空間 X に対して $\Sigma(X)$ の部分集合 $\tau_K(X)$ を

$$\tau_K(X) := \{T \in \Sigma(X) \mid + : X \times X \to X \text{ と} * : K \times X \to X \text{ は } T \text{ に関して連続である.}\},$$

で定める. ここで,$+$ と $*$ は各々, 線形空間 X の和とスカラー倍写像である. また, $\tau_K(X)$ の元を（線形空間 X と）両立する位相と呼び,X と $\tau_K(X)$ の元 T の組 (X,T) を位相線形空間という.

$\tau_K(X)$ は先程の群や環と同様に包含関係 $\subset$ に関して完備束となることが知られており, とくに最大, 最小元が存在する. 例えば実数体 $\mathbb{R}$ に通常の位相を与えたとき, $\mathbb{R}$-線形空間 $\mathbb{R}^n$ を位相線形空間とする位相として, $\mathbb{R}$ の直積位相や密着位相があり, それらが各々,$(\tau_K(X), \subset)$ の最大元と最小元である.
すると,「直積, 密着位相の間にはどのような $\mathbb{R}^n$ と両立する位相が, どのような強弱の関係で存在するか.」という問いが浮かび, それに対しては次の 2 つの事実が知られている.
1 つ目はハウスドルフではない両立する位相は, ハウスドルフな両立する位相と部分空間の情報から構成することが可能であることを主張する.

事実 1. ハウスドルフな両立する位相 T_H と線形部分空間 S に対して,

$$\pi_S{}^*(\pi_{S*}(T_H)),$$

で定められる位相は両立する位相であり, この対応はハウスドルフな両立する位相全体と X の線形部分空間全体 $\sigma(X)$ の直積集合から $\tau_K(X)$ への全射である. ここで,$\pi_S : X \to X/S$ は商写像であり,$\pi_{S*} : \tau_K(X) \to \tau_K(X/S)$ と $\pi_S{}^* : \tau_K(X/S) \to \tau_K(X)$ は各々,π_S に関する終位相, 始位相を対応させる写像である.
更にハウスドルフな両立する位相が唯一つのときには, この対応は束 $(\sigma(X), \supset)$ と束 $(\tau_K(X), \subset)$ の間の同型で, 逆写像は次で与えられる.

$$\tau_K(X) \ni T \mapsto \bigcap_{0 \in U \in T} U \in \sigma(X).$$

後半の主張は直感的には, ハウスドルフな両立する位相が唯一つの場合, 両立する位相に対して原点の“無限小の近傍”を対応づけできることを主張している.
２つ目の事実は付値体の枠組みで述べられるので, まずは付値体を定義する.

定義 4. 体 K 上の関数 $\nu : K \to \mathbb{R}$ が（乗法）付値であるとは, 以下の条件を満たすことである.

勝手な $\alpha, \beta \in K$ に対して,

$$\begin{aligned}
&0 \leq \nu(\alpha), \\
&\nu(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \\
&\nu(\alpha \cdot \beta) = \nu(\alpha)\nu(\beta), \\
&\nu(\alpha + \beta) \leq \nu(\alpha) + \nu(\beta).
\end{aligned}$$

このとき組 (K, ν) を付値体という. また付値体 (K, ν) が与えられたとき,K は $d(\alpha, \beta) := \nu(\alpha - \beta)$ により距離空間となる. この距離が定める K 上の位相が離散位相ではないとき,(K, ν) を非自明な付値体といい, 距離空間として完備であるときに完備付値体という.

事実 2. 非自明な完備付値体 K 上の有限次元線形空間と両立するハウスドルフ位相は唯一つである.

1 つ目は [1] または [4] を,2 つ目は [3] を参照されたい．上記 2 つの事実を合わせることで $\mathbb{R}^n$ 上に定まる位相線形空間となるような位相全体の成す束 $(\tau_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), \subset)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間全体 $\sigma(\mathbb{R}^n)$ に包含関係 $\supset$ を与えた束 $(\sigma(\mathbb{R}^n), \supset)$ として捉えることができる．

2　主結果について

では，K が有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合はどうか．この問いに答えるのが本稿の結果である．ここで例えば，$\mathbb{Q}^2$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\subset \mathbb{R})$ の線形空間としての同一視を $(p,q) \mapsto p + q\sqrt{2}$ で与えると，$\mathbb{R}$ からの相対位相は $\mathbb{Q}$ の直積位相とは異なる, 両立するハウスドルフな位相を $\mathbb{Q}^2$ に与え，他方で上記事実 1 の対応ではこの位相と直積位相がともに 0 次元 $\mathbb{Q}$-線形部分空間に対応してしまい, 単射とならない. そこで, 位相に対応する部分空間を係数体の完備化によって増やすことで, 位相全体との間の全単射対応を構成したのが本稿の主結果である. 主結果は付値体の枠組みで述べられる.

定理 1 ([1])**.** (K, ν) を非自明な（完備とは限らない）付値体で, 距離完備化による拡大体（このとき, 付値が拡張され, 再び付値体となる.）$(\hat{K}, \hat{\nu})$ は局所コンパクトであるとする．このとき, 有限次元 K-線形空間 X に対して,X と両立する位相全体の成す束 $(\tau_K(X), \subset)$ は X を係数拡大した $\hat{K}$-線形空間 $\hat{X} := \hat{K} \bigotimes_K X$ の $\hat{K}$-部分空間全体 $\sigma(\hat{X})$ に包含関係 $\supset$ を与えた束 $(\sigma(\hat{X}), \supset)$ と次の対応で同型となる.

$$\tau_K(X) \ni T \mapsto \bigcap_{0 \in U \in T} \overline{I(U)} \in \sigma(\hat{X}),$$

ここで,$I : X \to \hat{X}$ は自然な単射 $X \ni x \mapsto 1 \otimes x \in \hat{X}$ であり, 閉包は $\tau_{\hat{K}}(\hat{X})$ の最大元の位相においてとる.

この定理は上記事実 1 の後半部分の「ハウスドルフな両立する位相が唯一つ」の仮定を外した場合とみれる．また, この定理から線形空間と両立する位相全体の成す束 $(\tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n), \subset)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間全体の成す束 $(\sigma(\mathbb{R}^n), \supset)$ と同型, したがって $\mathbb{R}^n$ の場合と同じ束を成すことがわかる．更にハウスドルフ性を, 対応する部分空間の文脈で特徴づけることで, ハウスドルフとそうではない位相が $(\tau_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n), \subset)$ の中で混在している様子が捉えられた.

3　問題について

最後に課題点を 1 つと筆者が興味ある問題を 1 つ挙げる.
上記定理 1 に関して定理を適用できる付値体は限られてしまうことが知られている.
具体的には次の命題が成り立つ. 証明は [5] を参照されたい.

命題 1. 局所コンパクトな非自明な付値体は通常の実数体 $\mathbb{R}$ か p 進数体 $\mathbb{Q}_p$, または有限体上のべき級数体 $\mathbb{F}((t))$ いずれかの有限次拡大体である.

そこで, 課題点として定理 1 の技術的な仮定「完備化した付値体が局所コンパクトである」が本当に必要なのかを精査する必要がある.

次に筆者の疑問を述べる. 束を上限, 下限を 2 項演算とする代数系とみなすとき, 自然な疑問として「両立する位相全体の成す束 $(\tau_K(X), \subset)$ は位相全体の成す束 $(\Sigma(X), \subset)$ の部分束を成すか.」が考えられる. すなわち,「$\tau_K(X)$ の 2 元 T_1, T_2 に対して束 $(\tau_K(X), \subset)$ と $(\Sigma(X), \subset)$ における上限と下限が一致するか.」という問題である.　上限が一致することは簡単にわかり, 下限が一致することが問題となる. したがって, この問題を言い直すと「勝手な $T_1, T_2 \in \tau_K(X)$ に対して $T_1 \cap T_2 \in \tau_K(X)$ であるか.」となる. これに関しては係数体の位相体に依存して真偽が変わる.
以下の例は P. Samuel([6]) によって与えられた例で,$\tau_K(X)$ と $\Sigma(X)$ の下限が一致しない例である. [6] では X の代数構造として群を考えているが, 係数体 $\mathbb{R}$ として離散位相を与えたものを考えると, 線形空間と両立する位相の例となる.

例 1. $X = \mathbb{R}^2$ として,X 上に 2 つの位相 T_1, T_2 を次で定める.

$$T_1 := \{\{x\} \times (y_1, y_2) \subset \mathbb{R}^2 \mid x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\} \text{ を開基とする位相},$$
$$T_2 := \{(x_1, x_2) \times \{y\} \subset \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2, y \in \mathbb{R}\} \text{ を開基とする位相}.$$

このとき T_1, T_2 は離散位相を与えた位相体 $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $\mathbb{R}^2$ と両立する位相である. 他方で $T_1 \cap T_2$ は $\mathbb{R}^2$ と両立する位相ではないことを背理法で示す.$T_1 \cap T_2$ が両立する位相であると仮定する. 位相空間 $(\mathbb{R}^2, T_1 \cap T_2)$ の点 $(0,0)$ の開近傍 U として次で定められるものがとれる.

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \frac{1}{2}|x| \text{ または } 2|x| < |y|\} \cup \{(0,0)\}.$$

このとき, 背理法の仮定より和が連続なので,$T_1 \cap T_2$ における点 $(0,0)$ の開近傍 V がとれて,$V + V := \{v_1 + v_2 \mid v_1, v_2 \in V\} \subset U$ が成り立つ. さらに T_1, T_2 の定義から十分小さい $\epsilon > 0$ がとれ,$(-\epsilon, \epsilon) \times \{0\} \subset V$ かつ $\{0\} \times (-\epsilon, \epsilon) \subset V$ とできるので,$(-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \subset U$ となり, 矛盾する. よって $T_1 \cap T_2$ は線形空間 $\mathbb{R}^2$ と両立する位相ではない. 実は $\tau_K(X)$ における T_1, T_2 の下限は $T_1 \cap T_2$ より弱い通常の $\mathbb{R}^2$ のユークリッド位相である.

他方で,K が通常の位相を与えた実数体 $K := \mathbb{R}$ とし,X を有限次元 K-線形空間として $\Sigma(X)$ と $\tau_K(X)$ における下限が一致することが位相と線形部分空間との対応付けを用いることで示される. 筆者は有理数体の場合の真偽, より一般に, 下限が一致するときの位相体の特徴づけに興味がある.

参考文献

[1] T. Aoyama, *A Correspondence between Topologies Compatible with a Linear Space and Subspaces*, preprint, arXiv:1905.01880.

[2] G. Birkhoff, *On the combination of topologies*, Fund. Math. **26** (1936), 156-166.

[3] N.Bourbaki, *ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES Chapitre 3, 4 et 5* , HERMANN 1964 年 (日本語訳 :『ブルバキ　数学原論　位相線形空間　1』　小針あき宏　訳　東京書籍,1986 年)

[4] J.L.Kelly, I.Namioka and coauthors, *Linear Topological Spaces* , D. van Nostrand (1963) (日本語訳 :『線形位相空間論』　村上温夫　訳　共立出版,1972 年)

[5] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы (改訂第 3 版), Москва (1973) (日本語訳 :『連続群論　上』　柴岡泰光, 杉浦光夫, 宮崎功　共訳,1974 年)

[6] P. Samuel, *Ultrafilters and Compactification of Uniform Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 100-132.