自由群の自己同型群とその部分群の Andreadakis 予想と Johnson 準同型について

東京理科大学理学部第二部数学科　佐藤 隆夫 (Satoh, Takao)
Department of Mathematics, Faculty of Science Division II,
Tokyo University of Science

概 要

本稿では，自由群の自己同型群とそのいくつかの部分群について，Andreadakis 予想や Johnson 準同型に関するこれまでの結果と未解決問題を簡単に解説する．

1 はじめに

位相幾何学では，曲面上の自己同相写像という動的な対象を，厳密な数式を用いて静的に表現するために代数を用いる．すなわち，基本群やホモロジー群などへの作用を利用して自己同相写像の本質を明らかにし，より深い性質を研究するというものである．このような考え方は，既に前世紀初頭に Dehn や Nielsen らによって精力的に押し進められた．自由群は曲面の基本群として現れ，その自己同型群は古典的にも重要な研究対象であった．1980 年代頃に Dennis Johnson によって端を発した，曲面の写像類群の Johnson 準同型の研究は，森田茂之や Hain らをはじめとした多くの研究者によって受け継がれ，四半世紀を経て急速な進展を遂げている．近年の Johnson 準同型の研究は，組み合わせ群論や位相幾何学のみならず，群のコホモロジー論や群の表現論などとも結び付き，その複雑さを増す一方で，その構造が持つ本来の豊かさが，徐々にかつ着実に明らかになってきている．

抑々，Johnson 準同型とは，Johnson フィルトレイションとよばれる，写像類群の正規部分群による降下列を研究するための道具である．しかしながら，純粋な群論的な意味合いでこのような概念を最初に導入したのは Andreadakis であり，1960 年代に自由群の自己同型群に対して行った研究が嚆矢とされている．Johnson による写像類群の研究で再度注目されて以降盛んに研究が進展し，位相幾何学の境界を越えて組み合わせ群論や表現論などの抽象代数学の分野を大きく跨り，数多の結果に彩られてきた．Andreadakis 予想や自由群の自己同型群のホモロジーの研究などとも密接に関連し，現在でも多くの若手研究者の関心を惹き，まさに日進月歩の様相で研究成果が蓄積され続けている．本稿では，特に，Andreadakis 予想や Johnson 準同型に関して，自由群の自己同型群やその部分群（特に，曲面の写像類群，組紐群，閉道組紐群など）に焦点を当ててこれまでに得られてる結果や未解決問題などを簡単に解説する．

目 次

2 記号の準備

- 群 G に対して, G の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,G$ の G への自然な作用は右作用とする．特に，任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}\,G$ と $x \in G$ に対して，σ の x への作用を x^σ と表す.

- 群 G の元 x, y に対して，その交換子 $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ と表す．また，元 $g_1, \ldots, g_k \in G$ に対して, 単純 k 重交換子を

$$[g_1, g_2, \cdots, g_k] := [[\cdots[[g_1, g_2], g_3], \cdots], g_k]$$

と表す.

- 群 G の部分群 H, K に対して, H と K の交換子群を $[H, K]$ と表す．すなわち，$[H, K]$ は任意の $h \in H$ と $k \in K$ に対して，$[h, k]$ たちで生成される G の部分群のことである.

- $\mathbb{Z}$ 加群 A に対して，係数環を有理数体 $\mathbb{Q}$ に拡大した $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $A_{\mathbb{Q}}$, $A^{\mathbb{Q}}$ などと添え字をつけて表し，$\mathbb{Z}$ 加群の間の線形写像 $f : A \to B$ を $\mathbb{Q}$ 上で考えたもの $f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ を $f_{\mathbb{Q}}$, $f^{\mathbb{Q}}$ などと表す.

3 自由群の自己同型群といくつかの部分群

自由群の自己同型群は，曲面の写像類群や組紐群を部分群として含むことが古くから知られており，位相幾何学的な観点からも精力的に研究されてきた．ここでは，これらの群の生成系や関係式など，組み合わせ群論的な事実を簡単に復習する．以下，F_n を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が生成する階数 n の自由群とする.

3.1 自由群の自己同型群

自由群の自己同型群を群論的な立場から最初に体系的に考察したのは，Nielsen である．曲面群の自己同型群の群構造を調べるという観点から，双曲幾何学を用いて $\mathrm{Aut}\, F_n$ の有限表示を与えた．特に，[45] において，以下で定義される 4 種類の自己同型 P, Q, S, U を導入し，それらの間の関係式を求めた．

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
P	x_2	x_1	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
Q	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n	x_1
S	x_1^{-1}	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
U	x_1x_2	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n

これらの自己同型は Nielsen 自己同型と呼ばれ，一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ における基本行列の "非可換版" に相当するものである．$\mathrm{Aut}\, F_n$ の有限表示についてはその後も McCool [34] による Whitehead 自己同型を用いたものや，Gersten [18] による Steinberg 群類似の有限表示も得られている．

次に，自由群の自己同型群の重要な正規部分群を考える．$H := H_1(F_n,\mathbb{Z})$ を F_n のアーベル化とする．F_n の基底 $x_1,\ldots,x_n$ から，H の自由アーベル群としての基底 $e_1 := [x_1],\ldots,e_n := [x_n]$ が誘導される．これを固定することで $\mathrm{Aut}(H)$ と $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ と同一視する．自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, F_n$ は H に自然に作用し，従って，準同型写像 $\rho : \mathrm{Aut}\, F_n \to \mathrm{Aut}(H) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ を誘導する．Nielsen 自己同型たちの ρ による像は基本行列を生成することが分かり，したがって，ρ は全射である．ρ の核を IA_n と書いて自由群の **IA 自己同型群**という [1]．IA 自己同型群は，後述する Torelli 群の自由群類似である．

$\mathrm{Inn}\, F_n$ を F_n の内部自己同型群とすると，$\mathrm{Inn}\, F_n \subset \mathrm{IA}_n$ である．Nielsen [44] により IA_2 は $\mathrm{Inn}\, F_2$ に一致することが知られているが，一般に IA_n は $\mathrm{Inn}\, F_n$ よりはるかに大きい．実際，互いに相異なる $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して，

$$K_{ij} : \begin{cases} x_i & \mapsto x_j^{-1}x_ix_j, \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}, \quad K_{ijk} : \begin{cases} x_i & \mapsto x_i[x_jx_k], \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}$$

なる自己同型が定まるが，Magnus [32] により，IA_n はこれらすべての自己同型たちで生成されることが知られている．しかしながら，$n=3$ の場合は Krstić-McCool [30] によって，IA_3 が有限表示不可能であることが知られており，$n \geq 4$ の場合は有限表示可能かどうかさえも解っておらず，IA_n は組み合わせ群論的にも非常に複雑な群である．一方，Cohen-Pakianathan [8, 9], Farb [17]，及び河澄 [29] の独立した仕事により，IA_n のアーベル化の構造も完全に決定されており，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 加群として $H_1(\mathrm{IA}_n,\mathbb{Z}) \cong H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H$ となることが知られている．ここで，$H^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,\mathbb{Z})$ である．

3.2 曲面の写像類群

今日，低次元位相幾何学において最も主流な研究対象の一つでもある曲面の写像類群の研究の歴史は，前世紀初頭における Dehn, Nielsen らによる先駆的な業績に遡る．曲面の自己同相

[1] I は Identity，A は Automorphism の頭文字を表している．

写像のアイソトピー類を代数的に記述する最も基本的かつ簡明な方法は，曲面のホモロジー群への作用を考察することである．しかしながら，ホモロジー群はアーベル群であり，それでは同相写像類の多くの情報が失われてしまう．そこで，非可換性による組合せ論的複雑さを厭わず，ホモロジー群ではなく基本群への作用を詳しく考察することで，Dehn, Nielsen らは写像類群に関する重要な結果をいくつも得た．(例えば，[14], [47] 及び [48] を参照せよ．)

$\Sigma_{g,1}$ を向き付けられた，境界成分を 1 つもつ種数 g のコンパクトな曲面とし，基本群の基点を境界上にとる．すると，$\Sigma_{g,1}$ の基本群は階数が $2g$ の自由群である．ここで，

$$\mathcal{M}_{g,1} := \mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,1}, \partial)/\mathrm{isotopy}$$

を $\Sigma_{g,1}$ の**写像類群**という．すなわち，$\mathcal{M}_{g,1}$ は向きを保ち，境界成分を各点ごとに固定する $\Sigma_{g,1}$ 上の C^∞ 級自己微分同相写像のアイソトピー類 [2] たちのなす群である．Dehn, Nielsen らは，$g \geq 1$ に対して，$\mathcal{M}_{g,1}$ の $\pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ への作用が誘導する準同型写像 $\mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}\,\pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ が単射であることを示した [**?**]．特に Nielsen は，$g \geq 2$ のとき，その像が

$$\{\sigma \in \mathrm{Aut}\,F_{2g} \,|\, \zeta^\sigma = \zeta\}, \quad \zeta = [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2g-1}, x_{2g}] \in F_{2g}$$

となることを示した．ここで，ζ は曲面の境界に平行な単純閉曲線のホモトピー類を表す語である．従って，この写像を通して曲面の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ は自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,F_{2g}$ の部分群とみなせるのである．微分同相写像類が基本群への作用で完全に決まってしまうという，100 年近くも前に得られた Dehn-Nielsen の結果は，今日では誰もが当たり前のように知っている周知の事実であるが，それでも驚くべき結果である．

曲面の写像類群は，表示についても長い歴史があるが，特に Lickorish [31] が 任意の $g \geq 1$ に対して $\mathcal{M}_{g,1}$ が $3g-1$ 個の Dehn twist で生成されることを示し，Humphries [23] は，$2g+1$ 個の Dehn twist を生成系に持つ有限表示が与えた．今日，Harer [22], Wajnryb [59] 及び Gervais [19] らの結果を含む，多くの写像類群の有限表示が知られている．

$\mathcal{M}_{g,1}$ を自由群の自己同型群の部分群とみなすとき，$\mathcal{M}_{g,1}$ と IA 自己同型群の共通部分

$$\mathcal{I}_{g,1} := \mathcal{M}_{g,1} \cap \mathrm{IA}_{2g}$$

を $\Sigma_{g,1}$ の **Torelli 群**という．すなわち，Torelli 群は曲面 $\Sigma_{g,1}$ の整係数 1 次元ホモロジー群 $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbb{Z})$ に自明に作用するような写像類たちのなす $\mathcal{M}_{g,1}$ の正規部分群である．Torelli 群の生成系に関しては，まず，Powell [51] が無限生成系を与え，次いで，Johnson [24] が $g \geq 3$ のとき，BP 写像 [3] からなる有限生成系を与えた．ここで，BP 写像とは，$\Sigma_{g,1}$ 上の交わりのない 2 つの単純閉曲線で同じ 1 次元ホモロジー類を定めるものに対して，それらの閉曲線上で反対向きの Dehn twist を行うような同相写像類のことである．$g=2$ のときは，Mess [36] によって，$\mathcal{I}_{2,1}$ は無限生成 [4] の自由群になることが知られている．一般に，IA 自己同型群と同様に，$g \geq 3$ のとき，Torelli 群が有限表示可能かどうかについてはまだ知られていない．

[2]単に同相写像のアイソトピー類たちのなす群を考えても，群構造は同じになることが知られてる．
[3]Bounding Pair の略である．
[4]有限生成ではないという意味．

3.3 組紐群

曲面の写像類群と並んで，自由群の自己同型群の部分群とみなせる，位相幾何学における重要な群がある．それが組紐群である．D を平面上の単位閉円板とし，D の内部に相異なる $n \geq 1$ 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathrm{Int}\, D$ をとる．すると，$D^2 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ の基点を境界上にとれば，その基本群は階数 n の自由群である．ここで，

$$B_n := \mathrm{Homeo}^+(D^2 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, \partial)/\mathrm{isotopy}$$

を $D^2 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ の写像類群とし，n 次の**組紐群**（ブレイド群, braid group）という．すなわち，B_n は向きを保ち，境界成分を各点ごとに固定する $D^2 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ の同相写像のアイソトピー類たちのなす群である．この B_n は，いわゆる，n 本の組紐のホモトピー類たちのなす群に同型であることが知られている．Artin による古典的な結果により，$n \geq 2$ に対して，B_n の $\pi_1(D^2 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$ への作用が誘導する準同型写像 $B_n \to \mathrm{Aut}\, \pi_1(D^2 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$ は単射であることが知られている．特に Artin はその像が

$$\{\sigma \in \mathrm{Aut}\, F_n \,|\, x_i^\sigma = c_i x_{\mu(i)} c_i^{-1} \ (c_i \in F_n,\ \ \mu \in \mathfrak{S}_n),\ (x_1 x_2 \cdots x_n)^\sigma = x_1 x_2 \cdots x_n\}$$

と表せることも示した．従ってこれより，組紐群 B_n は自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, F_n$ の部分群とみなせる.（組紐群に関する一連の古典的な結果についての詳細は，例えば [7] などを参照せよ.）

B_n を自由群の自己同型群の部分群とみなすとき，B_n と IA 自己同型群の共通部分

$$P_n := B_n \cap \mathrm{IA}_n$$

を**純組紐群**（ピュアブレイド群, pure braid group）という．純組紐群 P_n は，自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, F_n$ の部分群として，

$$\{\sigma \in \mathrm{Aut}\, F_n \,|\, x_i^\sigma = c_i x_i c_i^{-1} \ (c_i \in F_n),\ (x_1 x_2 \cdots x_n)^\sigma = x_1 x_2 \cdots x_n\}$$

と表せる．P_n の有限表示は Artin [6] によって得られている．

3.4 閉道組紐群

Artin の結果により，組紐群を自由群の自己同型群の部分群とみなせば，基底たちを置換して共役を取るような自己同型で，D^2 の境界に相当する語を固定するような自己同型たちのなす群であった．では，後者の条件を取り除いた部分群には，位相幾何学的にどのような解釈が与えられるだろうか．その答えが閉道組紐群である．今，B^3 を $\mathbb{R}^3$ 内の単位球体とし，$C := C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_n$ を，B^3 内の xy 平面内に埋め込まれた，非交和かつ unknotted な n 個の向き付けられた円とする．このとき，

$$\mathrm{LB}_n := \mathrm{Homeo}^+(B^3, C, \partial)/\mathrm{isotopy}$$

とおく．すなわち，LB_n は，向きを保ち境界上の各点を固定し，C を集合として保つような B^3 上の同相写像のアイソトピー類たちのなす群であり，**閉道組紐群** (ループブレイド群，loop braid group) と呼ばれている [5]．Goldsmith [20] の結果により，LB_n は $\mathrm{Aut}\,F_n$ に埋め込めることが知られている [6]．特にその像は

$$\{\sigma \in \mathrm{Aut}\,F_n \,|\, x_i^\sigma = c_i x_{\mu(i)} c_i^{-1}\ (c_i \in F_n,\ \ \mu \in \mathfrak{S}_n)\}$$

で与えられる.（閉道組紐群に関しては，Damiani [11] において歴史的背景を含めて詳細な解説がなされており，興味ある方は是非参照されたい.）

LB_n を自由群の自己同型群の部分群とみなすとき，LB_n と IA 自己同型群の共通部分を

$$\mathrm{P\Sigma}_n := \mathrm{LB}_n \cap \mathrm{IA}_n$$

と書き [7]，**自由群の基底-共役自己同型群** (basis-conjugating automorphism group) もしくは，**McCool 群**という．$\mathrm{P\Sigma}_n$ は，自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,F_n$ の部分群として，

$$\{\sigma \in \mathrm{Aut}\,F_n \,|\, x_i^\sigma = c_i x_i c_i^{-1}\ (c_i \in F_n)\}$$

と表せる．McCool [35] によって，$\mathrm{P\Sigma}_n$ は K_{ij} $(1 \leq i \neq j \leq n)$ たちを生成元とし，以下のような有限個の関係式からなる有限表示を持つことが知られている．

- $[K_{ij}, K_{kj}] = 1, \quad i < k,$
- $[K_{ij}, K_{kl}] = 1, \quad i < k,$
- $[K_{ik}, K_{ij}K_{kj}] = 1$

これまでに上述した群たちの関係は，4 つの群の拡大を含む以下の可換図式で表される．

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{P\Sigma}_n & \longrightarrow & \mathrm{LB}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{IA}_n & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\,F_n & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle (n=2g)} & & \uparrow{\scriptstyle (n=2g)} & & \uparrow{\scriptstyle (n=2g)} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{g,1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{g,1} & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり，自由群 F_n の基底の置換を表す群である．また，

$$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) := \{X \in \mathrm{GL}(2g,\mathbb{Z}) \mid {}^t XJX = J\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix}$$

は $2g$ 次のシンプレクティック群である．ρ の写像類群への制限が $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ に一致することは，各写像類たちが $\Sigma_{g,1}$ 上の交叉形式を保つことと，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の生成元に写るような写像類を具体的に構成できることから従う．

[5] 他にも，自由群の置換-共役自己同型群 (permutation conjugacy automorphism group)，接合組紐群 (welded braid group) などと呼ばれることもある．Damiani [11] の序文に詳しい説明がある．

[6] 正確には，Goldsmith は拡張された閉道組紐群と呼ばれる，もう少し大きな群の，自由群の自己同型群への埋め込みを考察している．

[7] $\mathrm{P\Sigma}$ は pure symmetric の意味である．

4 Andreadakis 予想

本節では，自由群の自己同型群（及び，それらの部分群）に定義される二つの降下フィルトレイションと，それらがどの程度ずれるのかという問題を考察する．

4.1 Andreadakis-Johnson フィルトレイション

各 $k \geq 1$ に対して F_n の降中心列 $\Gamma_n(k)$ を

$$\Gamma_n(1) := F_n, \quad \Gamma_n(k) := [\Gamma_n(k-1), F_n], \quad (k \geq 2)$$

により帰納的に定義する．各 $k \geq 0$ に対して $\mathrm{Aut}\, F_n$ の，F_n の冪零商 $F_n/\Gamma_n(k+1)$ への自然な作用は準同型写像

$$\mathrm{Aut}\, F_n \to \mathrm{Aut}(F_n/\Gamma_n(k+1))$$

を誘導する．この準同型写像の核を $\mathcal{A}_n(k)$ とおく．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n(k) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\, F_n \mid &\text{任意の } x \in F_n \text{ に対して，} \\ &\text{ある } c_x \in \Gamma_n(k+1) \text{ が存在して } x^\sigma = xc_x\}\end{aligned}$$

である．これらは $\mathrm{Aut}\, F_n$ に正規部分群の降下列

$$\mathrm{Aut}\, F_n = \mathcal{A}_n(0) \supset \mathcal{A}_n(1) \supset \mathcal{A}_n(2) \supset \cdots$$

を定める．特に $\mathcal{A}_n(1) = \mathrm{IA}_n$ である．この降下列を $\mathrm{Aut}\, F_n$ の **Andreadakis-Johnson フィルトレイション**と呼ぶ．歴史的には，Andreadakis [1] が一般の群の自己同型群に対してこのような降下列を考察し [8]，以下の結果を得ている．

定理 4.1 (Andreadakis [1])**.** (1) 各 $k, l \geq 1$，及び，$\sigma \in \mathcal{A}_n(k)$, $x \in \Gamma_n(l)$ に対して，$x^{-1}x^\sigma \in \Gamma_n(k+l)$.

(2) 各 $k, l \geq 1$ に対して，$[\mathcal{A}_n(k), \mathcal{A}_n(l)] \subset \mathcal{A}_n(k+l)$.

(3) $\displaystyle\bigcap_{k \geq 1} \mathcal{A}_n(k) = \{1\}$.

特に，上の (2) の結果より，各 $k \geq 1$ に対して，次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) := \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ はアーベル群になることが分かるが，Andreadakis は，これが有限生成自由アーベル群となることも示している．

各 $\mathcal{A}_n(k)$ は $\mathrm{Aut}\, F_n$ の正規部分群であるから, $\mathrm{Aut}\, F_n$ は共役により，$\mathcal{A}_n(k)$ に（右から）作用する．従って，$\mathrm{Aut}\, F_n$ は Andreadakis-Johnson フィルトレイションの各次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ にも作用する．このとき，$\mathrm{Aut}\, F_n$ の $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ への作用の，IA_n への制限は自明である．ゆえに，剰余群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\, F_n/\mathrm{IA}_n$ の $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ への作用が定義される．

IA 自己同型群 $\mathrm{IA}_n = \mathcal{A}_n(1)$ が有限生成であることは，上述した Magnus の結果によって知られているが，各 $\mathcal{A}_n(k)$ が有限生成かどうかを調べることは格段に難しい問題である．Papadima-Suciu [49] により，$\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(\mathcal{A}_n(2), \mathbb{Q}))$ が有限であることが，Alexander 不変量に関連する研究

[8] Johnson は，後述するように，1980 年代に同様の降下フィルトレイションを写像類群に対して考察した．

から導かれ，$\mathcal{A}_n(2)$ は有限生成であるか，もしくは torsion たちで無限生成されるかのどちらかであることが示された．さらに，Church-Ershov-Putman [10] らによる最近の結果により，任意の $k \geq 2$ と $n \geq 2k+3$ に対して，$\mathcal{A}_n(k)$ は有限生成であるという驚くべき結果が示された．すなわち，安定域（次数 k に対して，自由群の階数が十分大きいとき）では，Andreadakis-Johnson フィルトレイションのすべての部分群は有限生成である．しかしながら，証明は理論的なものであり，具体的に扱いやすい生成系が明示的に与えられているものではなく，このような生成系を構成することは依然として未解決問題である．

4.2　IA_n の降中心列

Andreadakis-Johnson フィルトレイションは IA 自己同型群の中心的降下列であったので，IA 自己同型群の降中心列を含むことが定義により直ちに従う．すなわち，

$$\mathrm{IA}_n = \mathcal{A}'_n(1) \supset \mathcal{A}'_n(2) \supset \cdots$$

を IA 自己同型群の降中心列とすると，各 $k \geq 1$ に対して

$$\mathcal{A}'_n(k) \subset \mathcal{A}_n(k)$$

である．Andredakis [1] によって，$n = 2$ の場合にすべての $k \geq 1$ で，及び $n = 3$ の場合に $1 \leq k \leq 3$ で両者が一致することが示されている．これらが全ての $n \geq 2,\ k \geq 2$ で一致するのではないかというのが **Andreadakis 予想**である．

予想 4.2 (Andreadakis 予想)**.** 任意の $n \geq 2,\ k \geq 2$ に対して，$\mathcal{A}'_n(k) = \mathcal{A}_n(k)$ が成り立つ．

これまでに，Bachmuth [3] によって $\mathcal{A}'_n(2) = \mathcal{A}_n(2)$ であることが知られている．この結果は，Cohen-Pakianathan [8, 9], Farb [17] 及び，河澄 [29] らによって独立に決定された，IA 自己同型群のアーベル化の結果からも導かれる．また，Pettet [50] による IA_n の有理 1 次元コホモロジー群のカップ積に関する表現論的研究によって，$\mathcal{A}'_n(3)$ は $\mathcal{A}_n(3)$ において高々有限指数であることが知られていたが，最近，後述する Johnson 準同型に関する結果を用いて，これをより精密にする以下の結果が得られた．

定理 4.3 (S. [58])**.** 任意の $n \geq 3$ に対して，$\mathcal{A}'_n(3) = \mathcal{A}_n(3)$.

しかしながら，Andreadakis 予想は一般には成立しないことが，Bartholdi [4, 5] の計算機を用いた一連の研究によって以下のように分かっている．

定理 4.4 (Bartholdi [4, 5])**.**　(1) $\mathcal{A}_3(4)/\mathcal{A}'_3(4) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 14} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 3}$,

(2) $\mathcal{A}_3(5)/\mathcal{A}'_3(5) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 3} \oplus (torsions)$.

すなわち，非安定域では Andreadakis 予想は否定的に解決されており，両者のずれも一般には有限ではないことも示されている．

IA 自己同型群の降中心列の各次数商を $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) := \mathcal{A}'_n(k)/\mathcal{A}'_n(k+1)$ とおく．このとき，自然な包含写像 $\mathcal{A}'_n(k) \to \mathcal{A}_n(k)$ は準同型写像

$$\iota_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) \to \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$$

を誘導する．この ι_k を用いると，Andreadakis 予想は以下のように言い換えることもできる．

予想 4.5 (Andreadakis 予想)**.** 任意の $n \geq 2,\ k \geq 2$ に対して，$\iota_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) \to \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ は同型写像である．

この観点から，最近，Darné [12] によって大きな進展があった．

定理 4.6 (Darné [12])**.** 任意の $k \geq 2,\ n \geq k+2$ に対して，$\iota_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) \to \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ は全射である．

したがって，このような状況を鑑みると，Andreadakis 予想は安定域では肯定的に解決される可能性が依然として残されていることが分かる．

4.3 写像類群の場合

この小節では Andreadakis-Johnson フィルトレイションを写像類群に制限したものを考える．各 $k \geq 1$ に対して，

$$\mathcal{M}_{g,1}(k) := \mathcal{A}_n(k) \cap \mathcal{M}_{g,1}$$

とおくと，これらは $\mathcal{M}_{g,1}$ の中心的降下フィルトレイションを定める．これは，写像類群の **Johnson フィルトレイション**とも呼ばれる．$\mathcal{M}_{g,1}(1)$ は Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1}$ に他ならない．自由群の自己同型群の場合と同様に，Church-Ershov-Putman [10] らによって，各 $k \geq 1$ に対して安定的に $\mathcal{M}_{g,1}(k)$ が有限生成になることが知られている．

さて，Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1}$ の降中心列

$$\mathcal{I}_{g,1} = \mathcal{M}'_{g,1}(1) \supset \mathcal{M}'_{g,1}(2) \supset \cdots$$

を考えると，Johnson フィルトレイションは中心的降下列であるから，各 $k \geq 1$ に対して $\mathcal{M}'_{g,1}(k) \subset \mathcal{M}_{g,1}(k)$ である．しかしながら，一般にこれらは一致しない．実際，Johnson [28] による $\mathcal{I}_{g,1}$ のアーベル化を決定した仕事からも分かるように，$g \geq 3$ に対して，

$$\mathcal{M}'_{g,1}(2) \neq \mathcal{M}_{g,1}(2)$$

である．特に，Johnson が Birmann-Craggs 準同型を用いて記述したように，$\mathcal{M}_{g,1}(2)$ における $\mathcal{M}'_{g,1}(2)$ の指数は 2 の冪（有限）である．しかしながら，森田 [41] による Casson 不変量を用いた研究により，$g \geq 3$ のとき，$\mathcal{M}_{g,1}(3)$ における $\mathcal{M}'_{g,1}(3)$ の指数は有限ではないことが知られている．このように，自由群の自己同型群の Andreadakis 予想を写像類群に制限したものは，上記の事実により直ちに否定的に解決されることが分かる．

さて，各 $k \geq 1$ に対して，Johnson フィルトレイションと，$\mathcal{I}_{g,1}$ の降中心列の次数商をそれぞれ，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{M}_{g,1}) := \mathcal{M}_{g,1}(k)/\mathcal{M}_{g,1}(k+1)$，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{M}'_{g,1}) := \mathcal{M}'_{g,1}(k)/\mathcal{M}'_{g,1}(k+1)$ とおく．自然な包含写像 $\mathcal{M}'_{g,1}(k) \hookrightarrow \mathcal{M}_{g,1}(k)$ は準同型写像

$$\eta_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{M}'_{g,1}) \to \mathrm{gr}^k(\mathcal{M}_{g,1})$$

を誘導するが，これは同型写像からどれだけ離れているだろうか．これに関してはまず，Hain [21] により，$g \geq 3$ のとき，各 $k \geq 1$ に対して，$\eta_{k,\mathbb{Q}} : \mathrm{gr}^k_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}'_{g,1}) \to \mathrm{gr}^k_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$ は全射である [9]

[9] 上述の Darné の結果は，この Hain の結果の自由群の自己同型群版に相当するもので，整係数上での結果という点で精度が高いものであると言える．

ことが知られている．厳密にいえば，Hain が示したことは，写像類群の Johnson フィルトレイションの有理次数和

$$\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1}) := \bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{gr}^k_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$$

がリー代数として，次数 1 部分 $\mathrm{gr}^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$ で生成されることであり，これと $\mathrm{gr}^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}'_{g,1}) \cong \mathrm{gr}^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{g,1})$ なる事実を組み合わせると上記の結果が導かれる．

一方，Hain [21] により，$\mathrm{Ker}(\eta_{2,\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q}$ であることが示され，森田 [39] により $\eta_{3,\mathbb{Q}}$ が，森田-逆井-鈴木 [42] により，$\eta_{k,\mathbb{Q}}$ $(4 \leq k \leq 6)$ が単射となることが分かっているが，一般に $\eta_{k,\mathbb{Q}}$ $(k \geq 3)$ が同型写像となるかは未解決である．

4.4 組紐群，閉道組紐群の場合

Andreadakis-Johnson フィルトレイションを組紐群，及び閉道組紐群に制限することを考える．各 $k \geq 1$ に対して，

$$P_n(k) := \mathcal{A}_n(k) \cap B_n, \quad \mathrm{P}\Sigma_n(k) := \mathcal{A}_n(k) \cap \mathrm{LB}_n$$

とおくと，これらはそれぞれ，P_n と $\mathrm{P}\Sigma_n$ の中心的降下フィルトレイションを定める．自由群の自己同型群や写像類群の場合と異なり，各 $n \geq 3$，$k \geq 2$ に対して，$P_n(k)$，$\mathrm{P}\Sigma_n(k)$ は有限生成ではないことが Papadima-Suciu [49] らによる Alexander 不変量の研究によって知られている．後者はほぼ同時期に，我々の先行研究 [55] において，自由群の自己同型群の Brau 表現を利用した手法によっても示された．

さて，P_n と $\mathrm{P}\Sigma_n$ の降中心列をそれぞれ，

$$P_n = P'_n(1) \supset P'_n(2) \supset \cdots, \quad \mathrm{P}\Sigma_n = \mathrm{P}\Sigma'_n(1) \supset \mathrm{P}\Sigma'_n(2) \supset \cdots$$

とする．すると，各 $k \geq 1$ に対して，$P'_n(k) \subset P_n(k)$，$\mathrm{P}\Sigma'_n(k) \subset \mathrm{P}\Sigma_n(k)$ である．最近，Darné [13] によって，組紐群に対する Andreadakis 予想が肯定的に解決された．

定理 4.7 (Darné [13])**.** 任意の $n \geq 3$, $k \geq 1$ に対して，$P'_n(k) = P_n(k)$.

閉道組紐群に関する Andreadakis 予想は現在も未解決である．

5 Johnson 準同型写像

本節では，Andreadakis 予想の研究とも密接に関連する，Johnson 準同型についてこれまでに知られている結果を簡単に解説する．

5.1 H が生成する自由リー代数

F_n の降中心列 $F_n = \Gamma_n(1) \supset \Gamma_n(2) \supset \cdots$ を思い出す．これらの各次数商を $\mathcal{L}_n(k) := \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ とおき，その次数和を $\mathcal{L}_n := \bigoplus_{k\geq 1}\mathcal{L}_n(k)$ とおく．$\mathcal{L}_n$ には F_n の交換子積から次数つきリー代数としての構造が自然に誘導され，特に，$\mathcal{L}_n$ は H が生成する自由リー代

数と同型であることが知られている．元来，$\mathcal{L}_n$ の構造については，1930 年代頃から Magnus, Witt, 及び Hall らによって先駆的に研究されはじめ，各斉次成分 $\mathcal{L}_n(k)$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変な自由アーベル群であり，その階数や基底も具体的に明示されている.（例えば [33], [52] などを参照されたい.）

各 $k \geq 1$ に対して，$\Gamma_n(k)$ は F_n の特性部分群であるから，$\mathrm{Aut}\,F_n$ は自然に $\Gamma_n(k)$ に（右から）作用する．従って，$\mathrm{Aut}\,F_n$ は各次数商 $\mathcal{L}_n(k) = \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ にも作用する．このとき，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の $\mathcal{L}_n(k)$ へ作用の，IA_n への制限は自明である．ゆえに，剰余群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\,F_n/\mathrm{IA}_n$ の $\mathcal{L}_n(k)$ への作用が定義される．

5.2 Johnson 準同型写像とその余核

各 $k \geq 1$ に対して準同型写像 $\mathcal{A}_n(k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$ を

$$\sigma \;\mapsto\; ([x] \mapsto [x^{-1}x^{\sigma}]), \quad x \in F_n$$

で定義する. ここで, [ ] は剰余類を表す記号である．すると, 定義より直ちに，この写像の核が $\mathcal{A}_n(k+1)$ であることが分かり，従って，単射準同型写像

$$\tau_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) \hookrightarrow H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

が得られる．この τ_k を $\mathrm{Aut}\,F_n$ の**第 k-Johnson 準同型写像**という. 特に, τ_k は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変である. よって，次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-加群としての構造を研究する際に，$\tau_k$ の像 $\mathrm{Im}(\tau_k)$，もしくは余核 $\mathrm{Coker}(\tau_k)$ の構造を決定することは基本的かつ重要な問題である．

第 1-Johnson 準同型に関しては，Andreadakis [1] が $\mathrm{gr}^1(\mathcal{A}_n)$ の生成元の像を調べることで τ_1 が全射となることを（本質的に）示している．一方，森田 [38] による Trace 写像を用いた研究により，各 $k \geq 2$ に対して，$\tau_{k,\mathbb{Q}}$ の余核には k 次の対称テンソル $S^k H_{\mathbb{Q}}$ が現れることが示された．さらに，Pettet [50] により，$k=2$ の場合は，有理 Johnson 余核は $S^2 H_{\mathbb{Q}}$ のみであることも示された．我々の先行研究では，[53], [56] において，IA 自己同型群の降中心列に付随する Johnson 準同型の，安定域における余核が

$$\mathcal{C}_n(k) := H^{\otimes k} / \langle a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k - a_2 \otimes a_3 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes a_1 \,|\, a_i \in H \rangle$$

で与えられることを，森田 Trace 写像を一般化することで示した．この結果と，上述した Darné [12] の最新の結果を合わせると，以下のように，安定域における自由群の自己同型群の Johnson 余核は完全に決定された．

定理 5.1 (Darné [12] + S. [56])**.** *$k \geq 2$, $n \geq k+2$ とするとき，$\mathrm{Coker}(\tau_k) = \mathcal{C}_n(k)$.*

一方，榎本直也氏と共同研究により，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解における各既約成分の重複度に関して，組み合わせ論的な記述を与えることができ，以下の定理を得た．

定理 5.2 (榎本-S. [15])**.** *$n \geq k+2$ のとき，$[\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k) : L^{\lambda}] = [\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}^k}_{\mathrm{Cyc}_k} : \mathbf{triv}_k]$. ここで，$\lambda$ は k に分割，L^{λ} は最高ウェイトが λ である GL-既約表現，S^{λ} は λ に付随する $\mathfrak{S}_k$ 既約表現であり，Cyc_k は k 巡回群，$\mathbf{triv}_k$ は自明表現を表す.*

さらに，[15] において我々は，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ に現れる $H_{\mathbb{Q}}$ の対称テンソル，及び交代テンソルの重複度に関して以下の明示的な結果も得た．

定理 5.3 (榎本-S. [15])**.** $k \geq 2$ 及び，$n \geq k+2$ に対して，

(1) $[\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}}) : S^k H_{\mathbb{Q}}] = 1$.

(2) k が奇数であれば，$[\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}}) : \Lambda^k H_{\mathbb{Q}}] = 1$.

しかしながら，一般の既約表現の重複度を求めることは甚だ困難である．

5.3 写像類群への制限

自由群の自己同型群の Johnson 準同型の写像類群への制限を考えることにより，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-同変な単射準同型写像

$$\tau_k^{\mathcal{M}} : \mathrm{gr}^k(\mathcal{M}_{g,1}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_{2g}(k+1)) = H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1)$$

が得られる．これを写像類群の**第 k-Johnson 準同型写像**という．一般に，曲面の Poincaré 双対性を考えることにより，$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-加群としての自然な同型 $H^* \cong H$ があり，写像類群の Johnson 準同型の値域 $H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1)$ を自然に，$H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1)$ と同一視して考える．今，自然な括弧積写像 $H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{2g}(k+1) \to \mathcal{L}_{2g}(k+2)$, $X \otimes Y \mapsto [X,Y]$ の核を $\mathfrak{h}_{g,1}(k)$ とおく．森田 [38] により，写像類群の Johnson 準同型 $\tau_k^{\mathcal{M}}$ の像は $\mathfrak{h}_{g,1}(k)$ に含まれることが示されている．従って，写像類群の Johnson 準同型の像が $\mathfrak{h}_{g,1}(k)$ からどれだけずれているのかを決定するのが基本的かつ重要な問題になる．この問題に関しては，森田 [38]，Hain [21]，朝田-中村 [2]，中村-角皆 [43] による独立した先駆的な研究をはじめとして，我々の先行研究 [16] も含め多くの研究者が現在も精力的に研究を続けているものの，完全には決定されていない未解決問題である．森田-逆井-鈴木 [42] の最新の結果により，次数が 6 までは有理 Johnson 余核の構造は完全に決定されている．

5.4 組紐群，閉道組紐群への制限

写像類群の場合と同様に，自由群の自己同型群の Johnson 準同型の，組紐群，閉道組紐群への制限を考えるができる．各 $k \geq 1$ に対して，$\mathrm{gr}^k(P_n) := P_n(k)/P_n(k+1)$, $\mathrm{gr}^k(\mathrm{P}\Sigma_n) := \mathrm{P}\Sigma_n(k)/\mathrm{P}\Sigma_n(k+1)$ とおくと，**第 k-Johnson 準同型写像**

$$\tau_k^{P} : \mathrm{gr}^k(P_n) \to H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1), \quad \tau_k^{\mathrm{P}\Sigma} : \mathrm{gr}^k(\mathrm{P}\Sigma_n) \to H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

がそれぞれ定義される．簡単な考察から，$H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$ において，$e_i^* \otimes [e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k}, e_i]$ $(1 \leq j_l, i \leq n)$ なる形の元たちで生成される部分加群を $\mathfrak{p}_n(k)$ とおくと，$\mathrm{Im}(\tau_k^P), \mathrm{Im}(\tau_k^{\mathrm{P}\Sigma}) \subset \mathfrak{p}_n(k)$ である．（詳しくは [57] を参照せよ．）しかしながら，このずれがどの程度なのかは現在も未解決問題である．

謝辞

このたび，RIMS 研究集会「変換群論とその応用」にお招きいただき講演の機会を与えて下さった，世話人の大阪大学の原靖浩先生に心より感謝お礼を申し上げます．

参考文献

[1] S. Andreadakis; On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 239-268.

[2] M. Asada and H. Nakamura; On graded quotient modules of mapping class groups of surfaces, Israel J. Math. 90 (1995), 93-113.

[3] S. Bachmuth; Induced automorphisms of free groups and free metabelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 1-17.

[4] S. Bachmuth; Automorphisms of free metabelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 118 (1965), 93–104.

[5] S. Bachmuth; Induced automorphisms of free groups and free metabelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 122 (1966), 1–17.

[6] E. Artin; Theory of braids, Ann. of Math. 48 (1947), 101-126.

[7] J. S. Birman; Braids, Links, and Mapping Class Groups, Annals of Math. Studies 82 (1974).

[8] F. Cohen and J. Pakianathan; On Automorphism Groups of Free Groups, and Their Nilpotent Quotients, preprint.

[9] F. Cohen and J. Pakianathan; On subgroups of the automorphism group of a free group and associated graded Lie algebras, preprint.

[10] T. Church, M. Ershov and A. Putman; On finite generation of the Johnson filtrations, preprint `arXiv:1711.04779`.

[11] C. Damiani; A journey through loop braid groups, preprint, `arXiv:1605.02323v3`.

[12] J. Darné; On the stable Andreadakis Problem, preprint, `arXiv:1711.05991`.

[13] J. Darné; Milnor invariants of braids and welded braids up to homotopy, preprint, `arXiv:1904.10677`.

[14] M. Dehn; Papers on group theory and topology. Translated from the German and with introductions and an appendix by John Stillwell. With an appendix by Otto Schreier. Springer-Verlag, New York, 1987.

[15] N. Enomoto and T. Satoh; On the derivation algebra of the free Lie algebra and trace maps, preprint.

[16] Naoya Enomoto and Takao Satoh; New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, preprint.

[17] B. Farb; Automorphisms of F_n which act trivially on homology, in preparation.

[18] S. Gersten; A finete presentation for the special automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, 33 (1984), 269-279.

[19] S. Gervais; A finite presentation of themapping class group of a punctured surface, Topology, 40 (2001), no. 4, 703-725.

[20] D. L. Goldsmith; The theory of motion groups, The Michigan Mathematical Journal, 28 (1) 3-17 (1981).

[21] R. Hain; Infinitesimal presentations of the Torelli group, Journal of the American Mathematical Society 10 (1997), 597-651.

[22] J. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, Inventiones Mathematicae, 72 (1983), 221-239.

[23] S. Humphries; Generators for the mapping class group, Lecture Notes in Mathematics 722, Springer (1979), 44-47.

[24] D. Johnson; Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology, Proceedings of the American Mathematical Society, 75 (1) (1979), 119-125.

[25] D. Johnson; An abelian quotient of the mapping class group, Math. Ann. 249 (1980), 225-242.

[26] D. Johnson; The structure of the Torelli group I: A Finite Set of Generators for $\mathcal{I}$, Ann. of Math., 2nd Ser. 118, No. 3 (1983), 423-442.

[27] D. Johnson; The structure of the Torelli group II: A characterization of the group generated by twists on bounding curves, Topology, 24, No. 2 (1985), 113-126.

[28] D. Johnson; The structure of the Torelli group III: The abelianization of $\mathcal{I}$, Topology 24 (1985), 127-144.

[29] N. Kawazumi; Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, `arXiv:math.GT/0505497`.

[30] S. Krstić, J. McCool; The non-finite presentability in $IA(F_3)$ and $GL_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, Invent. Math. 129 (1997), 595-606.

[31] W. B. R. Lickorish; A finite set of generators for the homeotopy group of 2-manifold, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 60 (1964), 769-784.

[32] W. Magnus; Über n-dimensinale Gittertransformationen, Acta Math. 64 (1935), 353-367.

[33] W. Magnus, A. Karras, D. Solitar; Combinatorial group theory, Interscience Publ., New York (1966).

[34] J. McCool; A presentation for the automorphism group of a free group of finite rank, J. London Math. Soc., (2), 8 (1974), 259-266.

[35] J. McCool; On basis-conjugating automorphisms of free groups, Canad. J. Math., 38 (6) (1986), 1525-1529.

[36] G. Mess; The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces, Topology 31 (1992), no. 4, 775-790.

[37] S. Morita; Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I, Topology, 28 (1989), 305-323.

[38] S. Morita; Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Mathematical Journal 70 (1993), 699-726.

[39] S. Morita; Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect, Geometry and Topology Monographs Vol. 2 (1999), 349-406.

[40] S. Morita; Cohomological structure of the mapping classs group and beyond, preprint.

[41] S. Morita; Casson's invariant for Homology 3-spheres and characteristic classes of suface bundle I, Topology 28 (1989), 305-323.

[42] S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki; Torelli group, Johnson kernel and invariants of homology spheres, preprint, `arXiv:1711.07855`.

[43] H. Nakamura and H. Tsunogai; Atlas of pro-l mapping class groups and related topics, in preparation.

[44] J. Nielsen; Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann. 78 (1918), 385-397.

[45] J. Nielsen; Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. 91 (1924), 169-209.

[46] J. Nielsen; Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen Zweiseitigen Fläschen, Acta Math. 50 (1927), 189-358.

[47] J. Nielsen; Jakob Nielsen: collected mathematical papers. Vol. 1. Edited and with a preface by Vagn Lundsgaard Hansen. Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1986.

[48] J. Nielsen; Jakob Nielsen: collected mathematical papers. Vol. 2. Edited and with a preface by Vagn Lundsgaard Hansen. Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1986.

[49] S. Papadima, A. I. Suciu; Homological finiteness in the Johnson filtration of the automorphism group of a free group, J. Topol. 5 (2012), no. 4, 909-944.

[50] A. Pettet; The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n, Algebraic and Geometric Topology 5 (2005) 725-740.

[51] J. Powell; Two theorems on the mapping class group of a surface. Proceedings of the American Mathematical Society, 68 (3) (1978), 347-350.

[52] C. Reutenauer; Free Lie Algebras, London Mathematical Societymonographs, new series, no. 7, Oxford University Press (1993).

[53] T. Satoh; New obstructions for the surjectivity of the Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group, Journal of the London Mathematical Society, (2) 74 (2006), 341-360.

[54] T. Satoh; On the fourth Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group, Journal of Algebra, 323 (2010), 3182-3201.

[55] T. Satoh; On the Johnson filtration of the basis-conjugating automorphism group of a free group, Michigan Mathematical Journal, 61 (2012), 87-105.

[56] T. Satoh; On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, 216 (2012), 709-717.

[57] T. Satoh; On the basis-conjugating automorphism groups of free groups and free metabelian groups, Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society 158 (2015), 83-109.

[58] T. Satoh; The third subgroup of the Andreadakis-Johnson filtration of the automorphism group of a free group. J. Group Theory 22 (2019), no. 1, 41-61.

[59] B. Wajnryb; A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface, Israel Journal of Mathematics 45 (1983), no. 2-3, 157-174.