# 複素球多様体へのコンパクトリー群による可視的作用について

東京大学 大学院数理科学研究科　田中　雄一郎
Yuichiro Tanaka
Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo

**概要**

局所コンパクト群のユニタリ表現は、その既約分解において既約表現の重複度がほとんど至る所 1 以下であるとき、無重複と呼ばれます。小林俊行氏は、リー群の無重複表現の統一的扱いを目的として、複素多様体に対する可視的な作用の理論を導入しました。この理論では、リー群に対しコンパクト性や簡約型などの制約が無く、また、表現に対しても有限次元性や離散分解可能などの条件を必要としませんが、ここでは特にコンパクトリー群の作用を考え、球多様体、余等方的作用、Gelfand 対と可視的作用との関係について述べます。また、可視的作用のスライスの構成の応用についても紹介します。

## 1　導入

本稿では群の無重複表現を考えます。

**定義 1.1**　局所コンパクト群のユニタリ表現は、その既約分解における既約表現の重複度がほとんど至る所 1 以下であるとき、無重複表現という。

リー群の様々な無重複表現を統一的に扱うことを目的として、小林俊行氏は複素多様体に対する可視的な作用の理論を導入しました。

**定義 1.2（小林氏 [Ko05]）**　リー群 $G$ の連結複素多様体 $X$ に対する正則な作用は、$X$ のある全実部分多様体 $S$ が存在して $G \cdot S = \bigcup_{s \in S} G \cdot s =: X'$ が $X$ の空でない開部分集合となるとき、準可視的という。

さらに、各 $s \in S$ に対し $J_s(T_s(S)) \subset T_s(G \cdot s)$ が成り立つとき、準可視的作用は可視的であるという。ただし、$J$ で $X$ の複素構造を表す。

適当な反正則微分同相写像の存在の下で、準可視的作用は可視的になります。

**定義 1.3（小林氏 [Ko05]）**　リー群 $G$ の連結複素多様体 $X$ に対する準可視的作用は、ある $X'$ の反正則微分同相写像 $\sigma$ であって、$S$ で恒等写像となり、$X'$ の各 $G$ 軌道を保つようなものが存在するとき、強可視的であるという。

強可視的作用は可視的であることが知られています [Ko05]。次の無重複性の伝播定理によって、リー群の強可視的作用から無重複表現を得ることができます。

定理 1.4（小林氏 [Ko13]）　$G$ をリー群、$\mathcal{W} \to X$ を連結複素多様体 $X$ 上の $G$ 同変正則エルミートベクトル束とする。以下の条件が満たされるとき、正則切断の空間 $\mathcal{O}(\mathcal{W}, X)$ 内に実現される $G$ の任意のユニタリ表現は無重複となる。

1. $X$ への $G$ 作用は強可視的である。そのデータを $(S, \sigma)$ とする。
2. 各 $s \in S$ で $\mathcal{W}$ のファイバー $\mathcal{W}_s$ は固定化部分群 $G_s$ の表現として無重複である。
3. ファイバーにユニタリに作用するような $\sigma$ の $\mathcal{W}$ への持ち上げ $\tilde{\sigma}$ と、$G$ の自己同型 $\hat{\sigma}$ が存在して、$L_{\hat{\sigma}(g)} = \tilde{\sigma} \circ L_g \circ \tilde{\sigma}^{-1}$ を満たす。さらに、$\tilde{\sigma}$ は $\mathcal{W}_s$（$s \in S$）の各既約成分を保つ。ここで、$L_g$ は $g \in G$ の $\mathcal{W}$ への作用を表す。

以下に、ごく一部ですが、この定理の適用例を紹介します。

例 1.5（小林氏 [Ko04, Ko05, Ko07b]）

1. （コンパクト対称対）
   $G$ を連結コンパクトリー群、$\tau$ をその対合、$G_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする。$G$ に対応するカルタン対合を $\theta$ と書く。
   このとき、カルタン分解 $G_{\mathbb{C}} = GAG_{\mathbb{C}}^{\tau}$ より、データ $(S, \sigma) = (AG_{\mathbb{C}}^{\tau}, \theta\tau)$ について $G$ の複素対称空間 $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{C}}^{\tau}$ への作用は強可視的である。
   よって、定理 1.4 から正則関数の空間 $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{C}}^{\tau})$ に実現される任意のユニタリ表現は $G$ の表現として無重複であり（自明束のファイバーは 1 次元であるので無重複である）、ゆえに $L^2(G/G^{\tau})$ は無重複である。
2. （最高ウェイト表現）
   $G$ を連結非コンパクト実エルミート単純群、$K$ を極大コンパクト部分群、$\tau$ を $G$ の対合、$\sigma$ を $\tau$ と可換で $K$ を保つような $G$ の Chevalley–Weyl 対合（ある極大トーラス上で逆元を与える写像になる対合）とする。
   このとき、カルタン分解 $G = HAK$ より、データ $(S, \sigma) = (AK, \sigma)$ について $H$ のエルミート対称空間 $G/K$ への作用は強可視的である。
   これを、$G$ のスカラー型ユニタリ最高ウェイト表現 $V$ が $G/K$ 上の同変正則線束 $\mathcal{L}$ の正則切断の空間 $\mathcal{O}(G/K, \mathcal{L})$ に実現できることと合わせると（線束のファイバーは 1 次元であるので無重複である）、定理 1.4 から $V$ の $H$ への制限は無重複である。
3. （有限次元テンソル積表現）
   $G$ を連結コンパクトリー群、$T$ をその極大トーラス、$\sigma$ を $T$ に関する Chevalley–Weyl 対合、$V$ をその既約表現、$W$ をそのウェイト無重複表現（$T$ の表現として無重複）と

する。

Borel–Weil の定理により、テンソル積 $V \otimes W$ は旗多様体 $(G \times G)/(T \times G)$ 上のベクトル束 $(G \times G) \times_{(T \times G)} (\mathbb{C}_\lambda \otimes W) \to (G \times G)/(T \times G)$ の正則切断の空間として実現することができる（$\mathbb{C}_\lambda$ は $V$ に対応する $T$ の 1 次元表現である）。

すると、データ $(S, \sigma) = (\{eT\} \times \{eG\}, \sigma \times \sigma)$ について $\mathrm{diag}(G)$ の $(G \times G)/(T \times G)$ への作用は強可視的であり（$e$ は $G$ の単位元）、また $\mathrm{diag}(T)$ のファイバー $\mathbb{C}_\lambda \otimes W$ への作用は無重複であることより、定理 1.4 から $G$ のテンソル積表現 $V \otimes W$ は無重複である。

ここに挙げたほかにもリー群の様々な表現に対し、その無重複性の可視的作用による解釈が得られており、また、新しい無重複定理も発見されています。詳しくは [Ko98, Ko04, Ko05, Ko07b, Ko08, KN03, KN18, Al, Sa15] を参照してください。

以下では、可視的作用の理論が無重複表現の統一的扱いを目的とするということを念頭に、無重複性に関わる代表的な概念「複素球多様体」、「余等方的作用」、「Gelfand 対」と可視的作用とを比較することを考えます。

**注意**：これ以降、強可視的作用の $\sigma$ として常に対合的なものを考えることとします。

## 2 複素球多様体

$G_\mathbb{C}$ を連結複素簡約代数群、$X$ を $G_\mathbb{C}$ の作用する既約正規準射影的代数多様体とします。$X$ 上の任意の同変線束 $\mathcal{L}$ の切断の空間 $\mathbb{C}[X, \mathcal{L}]$ が $G_\mathbb{C}$ の表現として無重複であるとき、$X$ は複素球多様体と呼ばれます。

複素球多様体には次のような幾何的な特徴づけがあります。

**定理 2.1（Vinberg 氏、Kimelfeld 氏 [VK]）** $X$ が複素球多様体であることは、$G_\mathbb{C}$ のボレル部分群が $X$ 上に開軌道を持つことと同値である。

典型例としては、複素旗多様体や複素対称空間などがあります。ここで、複素球多様体に可視的作用があるか、という問題を考えると、次が分かります。

**定理 2.2（小林氏による問題 [Ko04], T-[Ta19b]）** $X$ を $G_\mathbb{C}$-複素球多様体とする。このとき、$G_\mathbb{C}$ のコンパクト実形は $X$ に強可視的に作用する。

この結果について、$X$ を複素線型空間、複素対称空間、複素冪零軌道、あるいは複素旗多様体としたときなどの主要な場合には先行研究があります（小林氏 [Ko05, Ko07a, Ko07b]、笹木集夢氏 [Sa09, Sa11a, Sa16]）。実は、先行研究で用いられた手法は一般の場合にも適用可能です。以下でその概略を紹介します。

**証明の概略**　$G$ の次元に関する帰納法を用いる。$X$ を複素球多様体とする。$G_{\mathbb{C}}$ の開軌道を $G_{\mathbb{C}}/H$ とする。$H$ が簡約型でない場合は、$G_{\mathbb{C}}$ の真の放物型部分群 $P$ であって $H$ を含むものが取れる。すると、同型 $G_{\mathbb{C}}/H \simeq G_{\mathbb{C}} \times_P P/H \simeq G \times_L P/H$ によって、$L$ の $P/H$ への強可視的作用を $G$ に誘導することができる（これは、$X$ が複素冪零軌道の場合に用いられた手法です）。ただし、$L$ は $P$ のレビ部分群のコンパクト実形である。

$H$ が簡約型とする。このとき、半単純な complex spherical pair の分類（Krämer 氏 [Kr]、Brion 氏 [Br]、Mikityuk 氏 [Mi]）によって、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が $(\mathfrak{g}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$ または $(\mathfrak{so}(7, \mathbb{C}), \mathfrak{g}_2(\mathbb{C}))$ の場合を除き、ある対称部分群 $H'$ であって $H$ を含むものが取れることが分かる。そこで、同型 $G_{\mathbb{C}}/H \simeq G_{\mathbb{C}} \times_{H'} H'/H$ を用いると、$G$ の $G_{\mathbb{C}}/H$ への作用の強可視性は、$L$ の $H'/H$ への作用の強可視性に帰着される。ただし、$L$ は $G$ の $G_{\mathbb{C}}/H'$ への作用の generic な固定化部分群である（対称部分群を利用するという手法は、複素旗多様体の場合などで用いられました）。帰納法を働かせるため、上の例外的な 2 つの場合は直接計算により先に示しておく。 □

## 3　余等方的作用

$G$ をリー群、$(X, \omega)$ を連結なシンプレクティック $G$-多様体とします。$X$ の generic な点 $x \in X$ において $T_x(G \cdot x)^{\perp\omega} \subset T_x(G \cdot x)$ が成り立つとき、$G$ の作用は余等方的であるといいます。以下の定理が示すように、適当な設定の下で作用の余等方性は表現の無重複性と同値になります。

**定理 3.1（Guillmin 氏、Sternberg 氏 [GS]）**　$G$ を連結コンパクトリー群、$K$ をその閉部分群、$X$ を $G/K$ の余接束とする。$G$ の $X$ への作用が余等方的であることと、$L^2(G/K)$ が $G$ の表現として無重複であることとは同値である。

例えば、コンパクト対称空間 $G/K$ が上の定理の条件を満たす例となっています。また、余等方性と複素球多様体との関係については、次の定理があります。

**定理 3.2（Huchleberry 氏、Wurzbacher 氏 [HW]）**　$G$ を連結コンパクトリー群、$X$ を連結コンパクトケーラー $G$-多様体であって、$G$ の作用がハミルトニアンかつ正則等長であるものとする。$G$ の $X$ への作用が余等方的であることと、$X$ がある $G_{\mathbb{C}}$-複素球多様体の同変コンパクト化であることとは同値である。

例えば、$X$ をコンパクトエルミート対称空間 $G'/L'$、$G$ を $G'$ の対称部分群とした場合が上の定理の例になっています。余等方的作用と可視的作用の関係については次が分かります。

**定理 3.3**　$G$ を連結コンパクトリー群、$X$ を連結コンパクトケーラー $G$-多様体であって、$G$ の作用がハミルトニアンかつ正則等長であるものとする。$G$ の $X$ への作用に対し、余等方的であることと強可視的であることとは同値である。

同値の片方は次の結果から直ちに従います。

**定理 3.4**（小林氏 [Ko05]）　$G$ をリー群、$X$ を連結ケーラー $G$-多様体であって、$G$ の作用が正則等長であるものとする。$G$ の $X$ への作用に対し、もし強可視的ならば余等方的である。

**定理 3.3 の証明の概略**　まず、$G$ の作用が余等方的であるとする。定理 3.2 より、$X$ は $G_{\mathbb{C}}$-複素球多様体を開部分集合として含む。よって定理 2.2 から $G$ の作用の強可視性が従う。

逆に、$G$ の作用が強可視的であるとする。すると定理 3.4 より作用の余等方性が従う。　□

連結コンパクトリー群の複素線型空間への線型作用に対しては、笹木氏の結果 [Sa09, Sa11a] から強可視性と余等方性の同値が分かります。

# 4　Gelfand 対

$G$ を連結リー群、$K$ をそのコンパクト部分群とします。$L^2(G/K)$ が $G$ の表現として無重複であるとき、$(G,K)$ は Gelfand 対といいます。$(G,K)$ の典型例としてリーマン対称対がありますが、次の定理によって半単純リーマン対称対には可視的作用が伴います。

**定理 4.1**（小林氏 [Ko05]）　$G$ を連結線型半単純リー群、$K$ をその極大コンパクト部分群、$X$ を $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ のクラウン領域とする。$G$ の $X$ への作用は強可視的である。

ただし、クラウン領域 [AG] は、$G$-安定な $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ の開部分集合になっています。また、一般の Gelfand 対についても次が分かります。

**定理 4.2**　$G$ を連結リー群、$K$ をそのコンパクト部分群とする。$X$ を $G/K$ の余接束とする。$(G,K)$ が Gelfand 対であることと、$G$ の $X$ への作用が強可視的であることとは同値である。

**証明の概略**　$(G,K)$ が Gelfand 対であるとする。$K$ を連結とする。Vinberg 氏 [Vi] と Yakimova 氏 [Ya] による結果から、ほとんどの場合には次の性質を持つような $K$ を含む連結簡約部分群 $L$ と $G$ の自己同型 $\mu$ を取ることができる。

1. $\mu$ は $L$ 及び $K$ を保ち、制限によってそれぞれの Chevalley–Weyl 対合を与える。
2. $(\mathfrak{g}/\mathfrak{l})^*$ は $K$ の表現として $V+W$ という形に書け、$K_\xi V^{-\nu}=V$ かつ $K_{\xi,\eta}$ の $W$ への作用は余等方的となる。ただし、$K_\xi$ によって $\xi\in(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*$ における $K$-作用の固定化部分群を、$K_{\xi,\eta}$ によって $\eta\in V$ における $K_\xi$-作用の固定化部分群を表す。

すると、[Sa09, Sa11a] によって $K_{\xi,\eta}W^{-\mu}=W$ が分かる。これと $K(((\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*)^{-\mu}=(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*$ とを合わせて、$K((\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*)^{-\mu}=(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$ を得る。対合 $\nu: X\to X$, $(x,\xi)\mapsto(x,-\xi)$ と $\mu$ との合成 $\sigma=\mu\circ\nu$ を考えることで、$G$ の $X$ への作用が強可視的であると分かる。上記のような自己同型 $\mu$ が取れないような場合には、Gelfand 対の分類に従い直接計算によって示す。

逆に、$G$ の $X$ への作用が強可視的であるとすると、定理 3.4 から余等方的であることが分かる。よって、$X$ はポアソン可換となり（Vinberg 氏 [Vi]）、これより $G/K$ の不変微分作用素環の可換性が従う（Rybnikov 氏 [Ry]）。ゆえに $L^1(K\backslash G/K)$ は合成積について可換となり（Thomas 氏 [Th]）、$L^2(G/K)$ が無重複であることが分かる。 □

# 5 調和解析への応用

ここでは、複素球多様体への群作用の強可視性の証明の調和解析への応用について紹介します。$G$ を連結線型実簡約リー群、$K$ をコンパクト部分群とし、$(G,K)$ が Gelfand 対であるものとします。このとき、滑らかな $G/K$ 上の関数 $f$ が帯球関数であるとは、以下の 3 つの条件を満たすことを言います。

- $f$ は両側 $K$ 不変である。
- $f$ は $G/K$ 上の $G$-不変微分作用素のなす環 $D(G/K)$ に関する同時固有関数である（$(G,K)$ が Gelfand 対であることより、$D(G/K)$ は可換である）。
- $f(e)=1$ である。

$P_0$ を $G$ の極小放物型部分群とし、$P_0=N_0A_0M_0$ をラングランズ分解とします。このとき、作用の可視性の証明と同様にして、$G=N_0A_0M_0K$ と書けることが分かります。これによって $G$ の元 $g$ を $g=n(g)a(g)m(g)k(g)$ と表示します。ただし、この分解は一意的でないので、全ての成分が写像となるわけではありません。$\rho_0$ を、$\mathfrak{n}_0$ に対する $\mathfrak{a}_0$ の作用に関する固有値の和の半分とします。

命題 5.1（T-[Ta19c]） $(G,K)$ を簡約型の Gelfand 対とし、$\phi$ を $M_0/(M_0\cap K)$ 上の帯球関数、$\lambda\in\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ とする。

$$E(\phi,\lambda)(g)=\int_K a^{\rho_0+\lambda}(kg)\phi(m(kg))dk$$

は $G/K$ 上の帯球関数となる。また、$K$-spherical な既約ユニタリ表現に付随する帯球関数 $f$ はこの形を取る。

ここで、$M_0/(M_0\cap K)$ 上の帯球関数の $(M_0\cap K)$-不変性から右辺が定義できることに注意します。また、$G$ の既約ユニタリ表現 $(\pi,V)$ は、$K$-不変ベクトルのなす部分空間 $V^K$

が非自明なとき $K$-spherical といい、ノルムが 1 の $K$-不変ベクトル $v$ について、行列要素 $(v, \pi(g)v)$ を $K$-spherical な既約ユニタリ表現に付随する帯球関数といいます。

**証明の概略**　はじめに、$E(\phi,\lambda)$ が帯球関数であることを見る。$E(\phi,\lambda)$ の両側 $K$-不変性は、定義より従う。$E(\phi,\lambda)(e)=1$ であることは $\phi(e)=1$ から分かる。微分作用素に関する同時固有関数であることは、$\phi$ が $D(M_0/(M_0\cap K))$ に関する同時固有関数であること及び、普遍包絡環の分解 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})=\mathfrak{n}_0\mathcal{U}(\mathfrak{g})+\mathcal{U}(\mathfrak{a}_o)\mathcal{U}(\mathfrak{m}_0)+\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ から分かる（$K$-不変であれば $(M_0\cap K)$-不変であることに注意する）。

$f$ が $E(\phi,\lambda)$ という形をしていることを見る。これは、$G$ の既約ユニタリ表現に対し、その極大コンパクト部分群の作用に関する有限部分が $P_0=N_0A_0M_0$ からの誘導表現

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_{P_0}^{G}(\sigma\otimes\lambda\otimes 1)\\&=\{f: G\to W_\sigma | f(namg)=a^{\rho_0+\lambda}\sigma(m)f(g), n\in N_0, a\in a_0, m\in M_0, g\in G\}\end{aligned}$$

の中に実現できること及び（$(\sigma,W_\sigma)$ は $M_0$ の有限次元既約表現、$\lambda$ は $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ の元で、1 は $N_0$ の自明表現）、$K$ がコンパクトであることより積分によって $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G}(\sigma\otimes\lambda\otimes 1)$ から $C^\infty(K\backslash G)$ への $G$-絡作用素を構成できることから従う。 $\square$

他に、球関数の対称性や Helgason Fourier 変換（Helgason 氏 [He65, He70]）などへも応用があります。

上では簡約型のものしか扱いませんでしたが、非簡約型 Gelfand 対の場合には菊地克彦氏の論説 [Ki93, Ki95] などをご参照ください。

# 6　カルタン分解への応用

$G$ を実簡約リー群、$H$ を閉部分群とします。$G$ の極小放物型部分群が $G/H$ に開軌道を持つとき、$H$ を実球部分群といいます [Ko95]。

**定理 6.1（小林氏による予想 [Ko95]、T-[Ta19a]）**　$G$ を実簡約代数群、$H$ を簡約型実球部分群とする。$G$ のある極大コンパクト部分群 $K$ と可換部分空間 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{k}^\perp$ とが存在して、$G=K\exp(\mathfrak{a})H$ が成り立つ。

ただし、$(G,H)$ が対称対であるときは Flensted-Jensen 氏 [Fl]、Rossmann 氏 [Ro]、Lassalle 氏 [La] によって証明されています。また、エルミート対称空間上の $S^1$-束の場合は笹木氏 [Sa10a, Sa15] によって、triple spaces の場合には Danielsen, Krötz, Schlichtkrull 三氏 [DKS] によって証明されています。さらに、簡約型と限らない一般の実球部分群 $H$ に対し、ある有限集合 $F$, $F'$ が存在して $G=F'KAFH$ が成り立つことが Knop, Krötz, Sayag, Schlichtkrull 四氏によって証明されています [KKSS]。

**証明の概略**　$G$ の次元に関する帰納法を用いる。$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が $(\mathfrak{so}(7,\mathbb{C}),\mathfrak{g}_2(\mathbb{C}))$, $(\mathfrak{g}_2(\mathbb{C}),\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$, $(\mathfrak{so}(3,4),\mathfrak{g}_2(\mathbb{R}))$, $(\mathfrak{g}_2(\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}))$, $(\mathfrak{g}_2(\mathbb{R}),\mathfrak{su}(1,2))$ のいずれかである場合は、直接計算によって示す。そうでない場合は、対称対 $(\mathfrak{g},\tilde{\mathfrak{h}})$ であって $\mathfrak{h}$ を含むような $\tilde{\mathfrak{h}}$ を考え、$\mathfrak{k}^\perp\cap\tilde{\mathfrak{h}}^\perp$ の極大可換部分空間の中心化部分群 $L$ に対する分解へと帰着する。 $\square$

# 7　両側剰余類への応用

ここでは、実簡約リー群 $G$ の 2 つの部分群 $H, L$ に関する両側剰余類 $L\backslash G/H$ への応用を紹介します。ここで、$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ とあるボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ に対し $\mathfrak{g}_\mathbb{C}=\mathfrak{b}+\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ が成り立つとき、$H$ を absolutely spherical な部分群と言います。

**定理 7.1（T-[Ta19d]）**　$G$ を実簡約代数群、$H, L$ を absolutely spherical な簡約型部分群とする。$(G,H)$, $(G,L)$ は既約とする。ある有限個の半単純可換部分群 $A_i$ と $G$ の元 $x_i$ があって、$\bigcup_i LA_ix_iH$ は $G$ の稠密開部分集合を含む。

$A_i$ や $x_i$ は具体的に与えることができます。上の結果は、対称部分群に対する両側剰余類の結果が元になっています。

**定理 7.2（松木敏彦氏 [Ma95, Ma97]）**　$G$ を連結実半単純リー群、$\sigma,\tau$ をその対合とする。$\{C_i\}$ を standard Cartan subsets の代表系とするとき、$G_{ss}=\bigcup_i G^\sigma C_i G^\tau$ が成り立つ。

ここで、$G_{ss}=\{g\in G:\sigma\tau_g=\sigma\operatorname{Ad}(g)\tau\operatorname{Ad}(g)^{-1}\text{は半単純}\}$ です。また、$V^{-\nu}$ によって線型写像 $\nu$ に対する線型空間 $V$ の $(-1)$-固有値空間を表すことにします。$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}^{-\sigma}\cap\mathfrak{k}^{-\tau}$ の極大可換部分空間とし、$\mathfrak{t}+\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{-\tau}$ の極大可換部分空間とするとき、$\mathfrak{t}_i+\mathfrak{a}_i$ が $\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{-\tau_{t_i}}$ の極大可換部分空間となるような $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}$, $\mathfrak{t}_i\subset\mathfrak{t}$ に対して $\exp(\mathfrak{a}_i)\exp(\mathfrak{t}_i)t_i$（$t_i\in\exp(\mathfrak{t})$）という形で与えられるものを standard Cartan subset といいます。

**証明の概略**　$G$ の次元に関する帰納法を用いる。対称部分群が取れる場合には、定理 7.2 を用いてレビ部分群に関する両側剰余類の問題に帰着することができる。ところが、レビ部分群が $G$ 自身になってしまうことがあり、このときは帰納法が働かない。そのような場合は Onishchik 氏による半単純リー環の decomposition の分類 [On62, On69] を用いて起こり得る場合を列挙し、具体的計算によって適当な真に次元の小さい部分群（レビ部分群とは限らない）を見つけ、その両側剰余類の問題に帰着する。対称部分群が取れない場合には、半単純な complex spherical pair の分類 [Br, Kr, Mi] を用いて 1 つ 1 つ具体的に計算をする。帰納法が働くように、実際にはこの逆の順番に示す。 $\square$

半単純対称対に対する両側剰余類につきましては、上記の松木氏の論文の他、Hoogenboom 氏 [Ho]、Heintze 氏, Palais 氏, Terng 氏, Thorbergsson 氏 [HPTT] の論文などをご参照く

ださい。

## 参考文献

[AG] D. Akhiezer and S. Gindikin, On Stein extensions of real symmetric spaces, Math. Ann. **286** (1990), 1–12.

[Al] H. Alikawa, Multiplicity free branching laws for outer automorphisms of simple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), no. 1, 151–177.

[Br] M. Brion, Classification des espaces homogenes spheriques, Compositio Math. **63** (1987), no. 2, 189–208.

[DKS] T. Danielsen, B. Krötz and H. Schlichtkrull, Decomposition theorems for triple spaces, Geom. Dedicata **174** (2015), 145–154.

[Fl] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, J. Funct. Anal. **30** (1978), no.1, 106–146.

[GS] V. Guillemin and S. Sternberg, Multiplicity-free spaces. J. Differential Geom. **19** (1984), no. 1, 31–56.

[Ha] Harish-Chandra Spherical functions on a semisimple Lie group. I. Amer. J. Math. **80**, No. 2 (1958), 241–310.

[HPTT] E. Heintze, R. Palais, C. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces. Geometry, topology, & physics, 214–245, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[He65] S. Helgason, Radon-Fourier transforms on symmetric spaces and related group representations. Bull. Amer. Math. Soc. **71**, Number 5 (1965), 757–763.

[He70] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations. Advances in Math. **5**, Issue 1, August 1970, Pages 1–154.

[He84] S. Helgason, Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Corrected reprint of the 1984 original. Mathematical Surveys and Monographs, **83**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xxii+667 pp.

[He94] S. Helgason, Geometric analysis on symmetric spaces. Mathematical Surveys and Monographs, **39**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. xiv+611 pp.

[Ho] B. Hoogenboom, Intertwining functions on compact Lie groups, CWI Tract, **5**, Math. Centrum, Centrum Wisk. Inform., Amsterdam, 1984.

[HW] A. Huckleberry and T. Wurzbacher, Multiplicity-free complex manifolds. Math.

Ann. **286** (1990), no. 1-3, 261–280.

[Ki93] K. Kikuchi, Gel'fand pairs associated with nilpotent Lie groups. Problems on structure and representations of Lie groups (Research lnstitute for Mathematical Sciences Kyoto University, Kyoto, Japan, T. Matsuki ed.), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. **855** (1993), 31–47.

[Ki95] K. Kikuchi, Positive definiteness of K-spherical functions on solvable Lie groups. Noncommutative analysis on homogeneous spaces (Research lnstitute for Mathematical Sciences Kyoto University, Kyoto, Japan, H. Yamada ed.), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. **895** (1995), 81–97.

[KKSS] F. Knop, B. Krötz, E. Sayag and H. Schlichtkrull, Simple compactifications and polar decomposition of homogeneous real spherical spaces. Selecta Math. **21** (2015), no. 3, 1071–1097.

[Ko89] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.

[Ko95] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory Homogeneous Spaces and Automorphic Forms in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[Ko98] T. Kobayashi, Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules, Symposium on Representation Theory 1997 (K. Mimachi and S. Takenaka, ed.), 1998, 9–17.

[Ko04] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of GL($n$), visible actions on flag varieties, and triunity, Acta Appl. Math. **81** (2004), no. 1–3, 129–146.

[Ko05] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 3, 497–549.

[Ko06] T. Kobayashi, Introduction to visible actions on complex manifolds and multiplicity-free representations, Developments of Cartan Geometry and Related Mathematical Problems (Research lnstitute for Mathematical Sciences Kyoto University, Kyoto, Japan, T. Morimoto ed.), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. **1502** (2006), 82–95.

[Ko07a] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(\mathrm{U}(n_1) \times \mathrm{U}(n_2) \times \mathrm{U}(n_3)) \backslash \mathrm{U}(n) / (\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), no .3, 669–691.

[Ko07b] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, Transform. Groups **12** (2007), no. 4, 671–694.

[Ko08] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restriction of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, In: Representation theory and automorphic forms, Progr. Math., **255**, Birkhäuser, Boston, MA, 2008, pp. 45–109.

[Ko13] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, In: Lie groups: structure, actions, and representations, 113–140, Progr. Math., **306**, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[KN03] T. Kobayashi and S. Nasrin, Multiplicity one theorem in the orbit method. Lie groups and symmetric spaces, 161–169, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **210**, Adv. Math. Sci., 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[KN18] T. Kobayashi and S. Nasrin, Geometry of coadjoint orbits and multiplicity-one branching laws for symmetric pairs. Algebr. Represent. Theory **21** (2018), no. 5, 1023–1036.

[Kr] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, Compositio Math. **38** (1979), 129–153.

[La] M. Lassalle, Séries de Laurent des fonctions holomorphes dans la complexification d'un espace symétrique compact. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), no. 2, 167–210.

[Ma95] T. Matsuki, Double coset decompositions of algebraic groups arising from two involutions. I, J. Algebra **175** (1995), no. 3, 865–925.

[Ma97] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions, J. Algebra **197** (1997), no. 1, 49–91.

[Mi] I. Mikityuk, Integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **129**(**171**) (1986), no. 4, 514–534, 591; translation in Math. USSR-Sb. **57** (1987), no. 2, 527–546.

[MN] M. Miglioli and K. H. Neeb, Multiplicity freeness of unitary representations in sections of holomorphic Hilbert bundles. https://doi.org/10.1093/imrn/rny160, Published: 05 July 2018.

[On62] A. Onishchik, Inclusion relations among transitive compact transformation groups, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **11** (1962), 199–242; Amer. Math. Soc. Transl. (2) **50** (1966), 5–58.

[On69] A. Onishchik, Decompositions of reductive Lie groups, Mat. Sb. (N.S.) **80** (**122**) (1969), 553–599.

[Ro] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces. Canad. J. Math. **31** (1979), no. 1, 157–180.

[Ry] L. G. Rybnikov, On the commutativity of weakly commutative homogeneous Riemannian spaces. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 37 (2003), no. 2, 41–51, **95**; translation in Funct. Anal. Appl. **37** (2003), no. 2, 114–122.

[Sa09] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 18, 3445–3466.

[Sa10a] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, Geom. Dedicata **145** (2010), 151–158.

[Sa10b] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1)\backslash SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), no. 2, 201–215.

[Sa11a] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, Int. Math. Res. Not. IMRN (2011), no. 4, 885–929.

[Sa11b] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8,\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$, Adv. Pure Appl. Math. **2** (2011), no. 3-4, 437–450.

[Sa15] A. Sasaki, Admissible representations, multiplicity-free representations and visible actions on non-tube type Hermitian symmetric spaces. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **91** (2015), no. 5, 70–75.

[Sa16] A. Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits in complex simple Lie algebras. J. Lie Theory **26** (2016), no. 3, 597–649.

[Ta19a] Yuichiro Tanaka, A Cartan decomposition for a reductive real spherical homogeneous space, accepted for publication in Kyoto Journal of Mathematics.

[Ta19b] Yuichiro Tanaka, Visible actions of compact Lie groups on complex spherical varieties, accepted for publication in Journal of Differential Geometry.

[Ta19c] Yuichiro Tanaka, A Cartan decomposition for Gelfand pairs and induction of spherical functions, preprint.

[Ta19d] Yuichiro Tanaka, Double coset decomposition for reductive absolutely spherical pairs, preprint.

[Th] E. G. F. Thomas, An infinitesimal characterization of Gelfand pairs. Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982), 379–385, Contemp. Math., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[Vi] E. Vinberg, Commutative homogeneous spaces and coisotropic actions, UMN **56** (2001), no. 1, 3–62; English translation in Russian Math. Surveys **56**, no.1 (2001), 1–60.

[VK] E. Vinberg and B. Kimel'fel'd, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, Funct. Anal. Appl. **12** (1978), no. 3, 168–

174.

[Wa88] N. R. Wallach, Real reductive groups. I. Pure and Applied Mathematics, **132**. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. xx+412 pp.

[Wa92] N. R. Wallach, Real reductive groups. II. Pure and Applied Mathematics, **132**-II. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992. xiv+454 pp.

[Wo] J. Wolf, Harmonic Analysis on Commutative Spaces, Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., 2007.

[Ya] O. Yakimova, Gelfand pairs. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitat Bonn, Bonn, 2004. Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 374. Universitat Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 2005. front matter+ii+95 pp.