Well-posedness and ill-posedness of the stationary Navier-Stokes equations in scaling invariant Besov spaces

早稲田大学・基幹理工学研究科　鶴見　裕之
Faculty of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

1　序

以下の非圧縮流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式の定常問題を全空間 $\mathbb{R}^n$（$n \geq 3$）において考える.

$$\begin{cases} -\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla \pi = f \quad \text{in } x \in \mathbb{R}^n, \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{SNS}$$

ここで, $u = u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ および $\pi = \pi(x)$ はそれぞれ各点 $x \in \mathbb{R}^n$ における未知の流速場および未知の圧力を表し, $f = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ は与えられた外力を表す. なお, $u \cdot \nabla u \equiv \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$ である. この定常問題 (SNS) については, その解の存在性, 一意性, および正則性に関して様々な結果が得られている. 古くには Leray[7] や Ladyzhenskaya[6] による (SNS) の解の存在性に関する研究がなされ, そののち Heywood[4] は (SNS) の定常解が, 非定常方程式の解の極限として得られることを証明した. また, Secchi[8] による (SNS) の $L^n \cap L^p$, $p > n$ における解の存在性および正則性についての結果も有名である.

本研究では, (SNS) の適切性, および非適切性に焦点を当てる. まず初めに, その適切性について明確な定義を与える:

定義 1.1. $(D, \|\cdot\|_D)$, $(S, \|\cdot\|_S)$ を 2 つの Banach 空間とする（ここで D は与えられた外力（data）の属する空間, および S は解（solution）の属する空間を表す）. 方程式 (SNS) が外力空間 D と解空間 S に関して**適切（well-posed）であるとは**, ある定数 $\varepsilon > 0$ および ε にのみ依存する定数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して次の (i), (ii) がみたされることをいう:

(i) D の開球 $B_D(\varepsilon)$ に属する任意の外力 f に対して, S の開球 $B_S(\delta)$ に属する (SNS) の解 u が存在する. この u は $B_S(\delta)$ に属する解としては一意である. （解の一意存在性）

(ii) (i) により定義できる解写像 $f \in (B_D(\varepsilon), \|\cdot\|_D) \mapsto u \in (B_S(\delta), \|\cdot\|_S)$ は連続である. （外力に対する解の連続依存性）

ここで $B_D(\varepsilon) \equiv \{f \in D;\ \|f\|_D < \varepsilon\}$, $B_S(\eta) \equiv \{u \in S;\ \|u\|_S < \delta\}$ である．すなわち適切であるとは, 外力の空間および解の空間において開球を十分小さくとれば, その開球間で解の一意存在性および外力に対する連続依存性が成り立つことをいう．方程式 (SNS) が適切性を保つような, より一般的な空間 D および S を求めることは, 物理学的にも極めて自然かつ重要な問題であるといえる．

近年 Cunanan-Okabe-Tsutsui[3] および Kaneko-Kozono-Shimizu[5] は, (SNS) が外力空間 $D = \dot{B}_{p,q}^{-3+\frac{n}{p}}$ と解空間 $S = P\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{n}{p}}$ に関して, $1 \le p < n$ かつ $1 \le q \le \infty$ ならば適切となることを示した（P は Helmholtz の射影）．各々の空間は次章で定義される斉次 Besov 空間であり, Sobolev 空間の枠組みでは取り扱えない超関数（Dirac のデルタ関数など）を外力とするような場合の取り扱いも可能にした．さらに $p = n$ の場合には, 彼らの結果の手法を用いることにより, (SNS) は $1 \le q \le 2$ のとき $D = \dot{B}_{n,q}^{-2}$ と $S = PL^n$ に関しても適切であることが容易に得られる．これらの D と S は各々(SNS) における外力 f と速度場 u に対してスケール不変である．実際, 対応するスケール変換は $\{u, \pi, f\} \mapsto \{u_\lambda, \pi_\lambda, f_\lambda\}$, $u_\lambda(x) = \lambda u(\lambda x)$, $\pi_\lambda(x) = \lambda^2 \pi(\lambda x)$, $f_\lambda(x) = \lambda^3 f(\lambda x)$ であり,

$$\|f_\lambda\|_D = \|f\|_D, \quad \|u_\lambda\|_S = \|u\|_S, \quad \forall \lambda > 0.$$

が従う．しかるに他の p, q の場合, すなわち

(I) $p = n$ かつ $2 < q \le \infty$,

(II) $n < p \le \infty$ かつ $1 \le q \le \infty$

の場合において, (SNS) が $D = \dot{B}_{p,q}^{-3+\frac{n}{p}}$ と $S = P\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{n}{p}}$ に関して適切であるか否かは未解決であった．

本研究では, 上記の (I), (II) のいずれの場合においても, (SNS) は $D = \dot{B}_{p,q}^{-3+\frac{n}{p}}$ と $S = P\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{n}{p}}$ に関して**適切でない（ill-posed）**ことを示した．より詳しくは, (I), (II) の場合, 解写像 $f \in D \mapsto u \in S$ が（存在し得るが）不連続となる場合があることを証明した．すなわち, ある外力の列 $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ であって, D において f_N は 0 に収束するが, 各 f_N に対して存在する解 $u_N \in PL^n$ の列が S の位相で（さらにはより弱い $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ の位相であっても）0 に収束し得ないようなものが存在する．本結果は, スケール不変な斉次 Besov 空間における (SNS) の適切性と非適切性の線引きが, それぞれ $(p, q) \in [1, n) \times [1, \infty]$ の場合と (I), (II) との場合の間でなされることを明確に示すものである．

主定理の証明のために, 上記の非連続依存性を引き起こす外力の列を, 非定常問題の場合の初期値に対する解の非連続依存性を研究した Bourgain-Pavlović[2] や Yoneda[10] による周期関数を用いた初期値の列に習って構成する．さらに Schrödinger 方程式の非適切性を示した Bejenaru-Tao[1] らの理論に基づいて, $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ の位相でも 0 に収束しない解 $\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset PL^n$ の列の一意存在性を示す．

2　準備（関数空間, 方程式の変形, および既存の研究結果）

$\mathcal{S}$ を急減少関数の空間, および $\mathcal{S}'$ を緩増加超関数（すなわち $\mathcal{S}$ の双対）の空間とし, $\mathcal{S}$ の部分空間 $\mathcal{S}_0$ を, 次をみたす $\varphi \in \mathcal{S}$ の属する空間として定める：任意の多重指数 α に対し,

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x) dx = 0.$$

また $\mathcal{S}_0'$ を $\mathcal{S}_0$ の双対空間とする. このとき次の同型が成り立つことが知られている.

$$\mathcal{S}_0' \cong \mathcal{S}'/\mathcal{P},$$

ここで $\mathcal{P}$ は多項式全体の空間である.

次に関数の Littlewood-Paley 分解について定義する. $\phi \in \mathcal{S}$ を

$$0 \le \phi \le 1, \quad \mathrm{supp}(\phi) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n;\ \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2 \right\}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(2^{-j}\xi) = 1 \ (\xi \ne 0). \tag{1}$$

なる関数とし, 関数族 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}$ を次で定める.

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = \phi(2^{-j}\xi), \quad j \in \mathbb{Z},$$

ここで $\hat{f} = \mathcal{F}f$ は f の Fourier 変換を表す. ここで次が成り立つことに注意しておく.

$$\mathrm{supp}(\hat{\varphi}_j) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; 2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1} \right\}.$$

この関数族 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, および $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$ に対し, 斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ を次のように定義する.

$$\dot{B}^s_{p,q} \equiv \left\{ f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P};\ \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty \right\}$$

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \equiv \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{js}\|\varphi_j * f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & q < \infty, \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} (2^{js}\|\varphi_j * f\|_p), & q = \infty. \end{cases}$$

斉次 Besov 空間は $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ の部分空間として Banach 空間となることが知られており, この定義は (1) をみたす ϕ の選択には依存しない. 端的に言えば, s は微分階数, p は L^p 可積分性, および q は補間指数を表す. さらに次の包含関係が成立する.

$$\dot{B}^s_{p,q_1} \hookrightarrow \dot{B}^s_{p,q_2}, \quad s \in \mathbb{R},\ 1 \le p \le \infty,\ 1 \le q_1 \le q_2 \le \infty,$$

$$\dot{B}^{s_1}_{p_1,q} \hookrightarrow \dot{B}^{s_2}_{p_2,q}, \quad 1 \le q \le \infty,\ -\infty < s_2 \le s_1 < \infty,\ 1 \le p_1 \le p_2 \le \infty, \quad \text{with } s_1 - n/p_1 = s_2 - n/p_2. \tag{2}$$

加えて, Riesz ポテンシャル $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \equiv \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\alpha \hat{f}(\xi))$（$\alpha \in \mathbb{R}$）は, 任意の $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$ に対して, $\dot{B}^{s+\alpha}_{p,q}$ から $\dot{B}^s_{p,q}$ への位相同型を与える. すなわち,

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \cong \|f\|_{\dot{B}^{s+\alpha}_{p,q}}.$$

つぎに, 解析を容易に行うために, (SNS) を抽象的な積分方程式に書き換える. $P : L^p \to L^p_\sigma \equiv \overline{\{f \in C_0^\infty;\ \nabla \cdot f = 0\}}^{\|\cdot\|_{L^p}}$ ($P = (P_{jk})_{1\le j,k\le n},\ P_{jk} \equiv \delta_{jk} + R_j R_k$) を Helmholtz の射影とする. ここで各 $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}},\ j = 1, 2, \ldots, n,$ は Riesz 変換である. $P(\nabla \pi) = 0,$ および任意の $\nabla \cdot u = 0$ なる u に対して $Pu = u$ であるから, 射影 P を (SNS) に作用させることによって次を得る.

$$-\Delta u + P(u \cdot \nabla u) = Pf,$$

よって (SNS) の解 u は抽象的に次のように表される.

$$u = Lf + B(u, u). \tag{rSNS}$$

ここで, $Lf \equiv (-\Delta)^{-1} Pf,\ B(u, v) \equiv -(-\Delta)^{-1} P(u \cdot \nabla v)$ である. 以下では専らこの積分方程式 (rSNS) について考察する.

はじめに, Cunanan-Okabe-Tsutsui, および Kaneko-Kozono-Shimizu による既存の (rSNS) ((SNS)) の適切性に関する研究結果を述べる.

命題 2.1. **(Cunanan-Okabe-Tsutsui[3], Kaneko-Kozono-Shimizu[5])**
$n \ge 3,\ 1 \le p < n,\ 1 \le q \le \infty$ とする. このとき方程式 (rSNS) は外力空間 $\dot{B}^{-3+\frac{n}{p}}_{p,q}$ と解空間 $P\dot{B}^{-1+\frac{n}{p}}_{p,q}$ に関し適切である.

ここで, (SNS) において空間 $\dot{B}^{-3+\frac{n}{p}}_{p,q}$ $(1 \le p, q \le \infty)$ は外力 f に対して, また空間 $\dot{B}^{-1+\frac{n}{p}}_{p,q}$ は解 u に対してそれぞれスケール不変であり, 埋め込みの性質 (2) により, $p_1 \le p_2$ ならば $\dot{B}^{-3+\frac{n}{p_1}}_{p_1,q} \hookrightarrow \dot{B}^{-3+\frac{n}{p_2}}_{p_2,q}$, および $\dot{B}^{-1+\frac{n}{p_1}}_{p_1,q} \hookrightarrow \dot{B}^{-1+\frac{n}{p_2}}_{p_2,q}$ となることに注意しておく.

$p = n$ かつ $1 \le q \le 2$ の場合, (rSNS) が外力空間 $\dot{B}^{-2}_{n,q}$ と解空間 $P\dot{B}^{0}_{n,q}$ に関し適切であるか否かはいまだ未解決である. しかし解の空間を PL^n にまで拡げれば, 次の適切性の結果を同様に得られることが知られている:

命題 2.2. $n \ge 3,\ 1 \le q \le 2$ とする. このとき (rSNS) は外力空間 $\dot{B}^{-2}_{n,q}$ と解空間 PL^n に関して適切である.

上記の適切性は, 以下で定める積分方程式の量的適切性（定義 1.1 における適切性の十分条件）を示すことにより得られる.

定義 2.3. $(D, \|\cdot\|_D),\ (S, \|\cdot\|_S)$ を 2 つの Banach 空間とする. 方程式 (rSNS) が外力空間 D と解空間 S に関して**量的に適切（quantitatively well-posed）**であるとは, ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して次の (i), (ii) の評価が成り立つことをいう:

(i) $\|Lf\|_S \le C_1 \|f\|_D, \quad \forall f \in D,$

(ii) $\|B(u, v)\|_S \le C_2 \|u\|_S \|v\|_S, \quad \forall u, v \in S.$

3　主結果

定理 3.1.（主定理, [9]）　$n \geq 3$ とする. Banach 空間 D および $\tilde{D}$ を $D \hookrightarrow \tilde{D}$ かつ次の (I) または (II) をみたすものとする.

(I) $D = \dot{B}^{-2}_{n,2}$, $\tilde{D} = \dot{B}^{-2}_{n,q}$, $\quad 2 < q \leq \infty$.

(II) $D = \dot{B}^{-2}_{n,1}$, $\tilde{D} = \dot{B}^{-3+\frac{n}{p}}_{p,q}$, $n < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

（このとき命題 2.2 により方程式 (rSNS) は外力空間 D と解空間 PL^n に関して適切となる.）いま, $\varepsilon, \delta > 0$ を定義 1.1 に現れる, (rSNS) の D と PL^n に関する適切性を保証する 2 定数とし, さらに $0 < \eta < \varepsilon$ を任意にとる. このとき解写像

$$f \in (B_D(\eta), \|\cdot\|_{\tilde{D}}) \mapsto u \in (B_{PL^n}(\delta), \|\cdot\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}})$$

は不連続となる. ここで, $(B_D(\eta), \|\cdot\|_{\tilde{D}})$ と $(B_{PL^n}(\delta), \|\cdot\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}})$ はそれぞれ $\tilde{D}$ の位相を伴う開球 $B_D(\eta)$ と, $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ の位相を伴う開球 $B_{PL^n}(\delta)$ を表す. すなわち, (rSNS) は外力空間 $\tilde{D}$ と解空間 $P\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ に関し非適切である.

注意 3.2.　D と $\tilde{D}$ を上記の仮定の通りとする. さらに, $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|g_N\|_D < \varepsilon$ なる外力の列 $\{g_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を任意にとる. このとき命題 2.2 により, 各 g_N に対し (rSNS) の一意解 $v_N \in PL^n$ が存在する. さらに, $\underline{D\text{ の位相で}}$ 列 g_N が 0 に収束するならば, 適切性（定義 1.1 の (ii)）により解の列 v_N も PL^n の位相で必ず 0 に収束する. ところが定理 3.1 は, $\underline{\tilde{D}\text{ の位相で}}$ 外力の列 g_N が 0 に収束したとしても, 解の列 v_N は $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ の位相でさえ, 必ずしも 0 に収束するとは限らないことを意味する.

注意 3.3.　$n = 2$ の場合, どの p, q の場合においても, (rSNS)（(SNS)）が適切となるか非適切となるかについては未解決のままである. 実際適切性に関しては, 2 次元の場合に量的適切性の条件 (ii) を示すことが未だ困難である. 一方で, 非適切性を引き起こす外力の例については, 現時点で少なくとも第 3 成分まで必要である.

4　証明の方針

解写像の連続性に関して, Bejenaru-Tao[1] は以下の命題を提示している.

命題 4.1. (Bejenaru-Tao[1])　方程式 (rSNS) は外力空間 D と解空間 S に関し量的に適切であるとする. いま, 各非線形写像 $A_n : D \to S$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ を次のように定める.

$$\begin{cases} A_1 f \equiv Lf, \\ A_n f \equiv \sum_{k,l\geq 1, k+l=n} B(A_k f, A_l f), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

このとき次の (1), (2) が成り立つ.

(1) 各 $A_n f$ は S に属し, かつある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|A_n f\|_S \leq C^n \|f\|_D^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

をみたす. さらにいまひとつの定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $f \in B_D(\varepsilon)$ ならば (rSNS) の一意解 $u \in S$ が存在し, その解は $u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f$ で表現される.

(2) 空間 D, S に対し, それぞれ弱ノルム $\|\cdot\|_{\tilde{D}}$, $\|\cdot\|_{\tilde{S}}$ を与える. すなわち,

$$\|f\|_{\tilde{D}} \leq C\|f\|_D, \quad \|u\|_{\tilde{S}} \leq C\|u\|_S.$$

このとき, (rSNS) の解写像 $f \mapsto u$ がさらに $(B_D(\varepsilon), \|\cdot\|_{\tilde{D}})$ から $(B_S(\delta), \|\cdot\|_{\tilde{S}})$ に対して連続であるならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 写像 $A_n : D \to S$ も $(B_D(\varepsilon), \|\cdot\|_{\tilde{D}})$ から $(B_S(\delta), \|\cdot\|_{\tilde{S}})$ に対して連続である.

命題 4.1 は, その対偶により, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の中で一つでも弱位相で不連続となるならば, 元の解写像もその弱位相で不連続となることを意味する. したがって, 定理 3.1 を示すには, 次の補題を示せば十分であることが分かる.

補題 4.2. $n \geq 3$ とする. また, D と $\tilde{D}$ を定理 3.1 の仮定 (I) または (II) の通りとし, $\eta > 0$ を定理 3.1 に現れる任意定数とする. このとき外力の列 $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ および定数 $C = C(\eta) > 0$ で, 次の (i), (ii), (iii) をみたすものが存在する.

(i) $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|f_N\|_D < \eta$,

(ii) $\|f_N\|_{\tilde{D}} \to 0$ as $N \to \infty$,

(iii) $\inf_{N\in\mathbb{N}} \|A_2(f_N)\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}} = \inf_{N\in\mathbb{N}} \|B(Lf_N, Lf_N)\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}} > C$.

注意 4.3 命題 4.1 の仮定にもみられるように, この方法による方程式の非適切性の証明には, その方程式が量的に適切となるような（すなわち解の存在性と強い位相での外力に対する連続依存性を保証してくれるような）関数空間 D, S が必要である. 仮にそのような空間が不明な場合, 補題 4.2 の (i), (ii), (iii) に加えてさらに解の存在性や

$$\lim_{N\to\infty} \|A_n f\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$$

などを示さなければならないが, これを示すのは一般には容易ではない.

注意 4.4 量的適切性の概念, および命題 4.1 の主張は, 一般の積分方程式（すなわち, $L : D \to S$, $B : S \times S \to S$ をそれぞれ稠密に定義された線形作用素, 双線形作用素としたとき

$$u = Lf + B(u, u)$$

で表される方程式）にも適用できる（例 : 非定常 Navier-Stokes 方程式の Cauchy 問題 $\Longrightarrow$ f: 初期値, L: Stokes 半群, B: Duhamel 項）.

5　補題 4.2 をみたす外力の構成

$\psi \in \mathcal{S}$ で

$$\mathrm{supp}(\hat{\psi}) = \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \le 1\}, \quad \hat{\psi}(\xi) > 0 \text{ in } \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| < 1\},$$

なるものをとり, 三角関数を用いた次の関数を用意する.

$$\Psi_m^{(j)} \equiv (-\Delta)\left\{\psi_{x_j}\cos(mx_1)\right\}, \quad j = 2, 3,\ m \in \mathbb{N},$$

ここで $\psi_{x_j} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$. これらを用いて, 補題 4.2 をみたす外力の列 $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を構成する. まず仮定 (I), 仮定 (II) の場合に分けて, 次のようなパラメーター付きの外力を定める.

$$g_{\lambda,M} \equiv \begin{cases} \frac{\lambda}{\sqrt{\Gamma(M)}} \sum_{k=10}^{M} k^{-\frac{1}{2}} \{e_2 \Psi_{2^{k^2}}^{(3)} - e_3 \Psi_{2^{k^2}}^{(2)}\}, & \text{(I)} \\ \lambda\{e_2 \Psi_M^{(3)} - e_3 \Psi_M^{(2)}\}. & \text{(II)} \end{cases}$$

ここで $\lambda > 0,\ M \ge 100$ はパラメーター, $e_2 \equiv (0, 1, 0, \dots 0)$, $e_3 \equiv (0, 0, 1, \dots, 0)$ はそれぞれ x_2 軸, x_3 軸方向の単位ベクトルであり, $\Gamma(r) \equiv \sum_{l=1}^{r} l^{-1}$ とする. これらの外力は Bourgain-Pavlović[2], および Yoneda[10] により提示された初期値列を参考にしたものである. 明らかに $\nabla \cdot g_{\lambda,M} = 0$ であるので, $Pg_{\lambda,M} = g_{\lambda,M}$ をみたす. したがって,

$$Lg_{\lambda,M} = (-\Delta)^{-1} g_{\lambda,M} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\sqrt{\Gamma(M)}} \sum_{k=10}^{M} k^{-\frac{1}{2}} \cos(2^{k^2} x_1) \{e_2 \psi_{x_3}(x) - e_3 \psi_{x_2}(x)\}, & \text{(I)} \\ \lambda \cos(M x_1) \{e_2 \psi_{x_3}(x) - e_3 \psi_{x_2}(x)\}. & \text{(II)} \end{cases}$$

ここに現れる関数の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[\psi_{x_j}\cos(ax_1)](\xi) = -\frac{1}{2} i\xi_j \{\hat{\psi}(\xi - ae_1) + \hat{\psi}(\xi + ae_1)\}, \quad j = 2, 3,\ a > 0,$$

また十分大なる $a > 0$ に対して

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\} \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n; a - 1 \le |\xi| \le a + 1\} \ne \emptyset$$

となる $j \in \mathbb{Z}$ は高々3つしか存在し得ないこと, さらに (II) の場合に関しては任意の $k_1, k_2 \ge 10,\ k_1 \ne k_2$ に対して

$$\{j \in \mathbb{Z}; \varphi_j * (\psi_{x_l}\cos(2^{k_1^2} x_1)) \not\equiv 0\} \cap \{j \in \mathbb{Z}; \varphi_j * (\psi_{x_l}\cos(2^{k_2^2} x_1)) \not\equiv 0\} = \emptyset$$

が成り立つことを考慮すれば, 次の評価を得ることができる.

$$\|g_{\lambda,M}\|_D \le C\lambda, \tag{3}$$

$$\|g_{\lambda,M}\|_{\tilde{D}} \le \begin{cases} \frac{C\lambda}{\sqrt{\Gamma(M)}}, & \text{(I)} \\ C\lambda M^{-1+\frac{n}{p}}. & \text{(II)} \end{cases} \tag{4}$$

一方で, (I) の場合,

$$
\begin{aligned}
&(Lg_{\lambda,M})\cdot\nabla(Lg_{\lambda,M})\\
&=\frac{\lambda^2}{2}(e_2\Phi_1+e_3\Phi_2)+\frac{\lambda^2}{2\Gamma(M)}(e_2\Phi_1+e_3\Phi_2)\sum_{k=10}^{M}k^{-1}\cos(2^{k^2+1}x_1)\\
&\qquad+\frac{\lambda^2}{2\Gamma(M)}(e_2\Phi_1+e_3\Phi_2)\left\{\sum_{\substack{10\le k,l\le M\\ k\ne l}}k^{-\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}\cos((2^{k^2}+2^{l^2})x_1)+\cos((2^{k^2}-2^{l^2})x_1)\right\}\\
&\equiv I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

(II) の場合,

$$
\begin{aligned}
(Lg_{\lambda,M})\cdot\nabla(Lg_{\lambda,M}) &= \frac{1}{2}\lambda^2(e_2\Phi_1+e_3\Phi_2)+\frac{1}{2}\lambda^2(e_2\Phi_1\cos(2Mx_1)+e_3\Phi_2\cos(2Mx_1))\\
&\equiv I_1+I_4.
\end{aligned}
$$

を得る. ここで

$$
\Phi_1\equiv\psi_{x_3}\psi_{x_2x_3}-\psi_{x_2}\psi_{x_3^2},\quad \Phi_2\equiv-\psi_{x_3}\psi_{x_2^2}+\psi_{x_2}\psi_{x_2x_3}
$$

である（$\psi_{x_2^\alpha x_3^\beta}\equiv\frac{\partial^{(\alpha+\beta)}}{\partial x_2^\alpha x_3^\beta}\psi$）. I_2, I_3, および I_4 はパラメーター M に依存する一方, I_1 は M に依存しない. よって前頁と同様の注意に従って計算すると, I_1 以外の残りの項が減衰するため, $M\geq 100$ に対して

$$
\|B(Lh_{\lambda,M},Lh_{\lambda,M})\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}\geq\|(-\Delta)^{-1}PI_1\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}\geq C\lambda^2>0. \tag{5}
$$

を得る.

(3), (4), および (5) から, 与えられた $\eta>0$ に対して $\lambda=\lambda_0>0$ を十分小さく固定することにより,

$$
f_N\equiv g_{\lambda_0,N+100},\quad N=1,2,3,\dots
$$

により定められる外力の列 $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は補題 4.2 の (i), (ii), および (iii) をみたすことがわかる.

6 謝辞

この度 RIMS 共同研究（公開型）『関数空間の一般化とその周辺』において貴重な研究発表の機会を頂いたことに関しまして, 研究代表者の松岡勝男先生のご厚情に深く御礼申し上げます.

References

[1] I. Bejenaru, T. Tao: Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation. J. Funct. Anal. **233**, pp.228-259 (2006)

[2] J. Bourgain, N. Pavlović: Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D. J. Funct. Anal. **255**, pp.2233-2247 (2008)

[3] J. Cunanan, T. Okabe, Y. Tsutsui: Asymptotic stability of the stationary Navier-Stokes flows in Besov spaces. arXiv:1707.02016

[4] J. G. Heywood: On stationary solutions of the Navier-Stokes equations as limits of non-stationary solutions. Arch. Rational. Mech. Anal. **37**, pp.48-60 (1970)

[5] K. Kaneko, H. Kozono, S. Shimizu: Stationary solution to the Navier-Stokes equations in the scaling invariant Besov space and its regularity. to appear in Indiana Univ. Math. Journal.

[6] O. A. Ladyzhenskaya: Investigation of the Navier-Stokes equation for stationary motion of an incompressible fluid. Uspehi Mat. Nauk **14**, pp.57-97 (1959)

[7] J. Leray: Etude de diverses équations integrales non linéaries et de quelques proléms que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl. **12**, pp.1-82 (1933)

[8] P. Secchi: On the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. Ann. Mat. Pure. Appl. **153**, pp.293-305 (1988)

[9] H. Tsurumi: Well-poseness and ill-posedness problems of the stationary Navier-Stokes equations in scaling invariant Besov spaces. submitted.

[10] T. Yoneda: Ill-posedness of the 3D-Navier-Stokes equations in a generalized Besov space near BMO^{-1}. J. Funct. Anal. **258**, pp.3376-3387 (2010)

〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1
E-mail: bf-hanpan@fuji.waseda.jp