完備測地距離空間上の凸最適化問題

東邦大学・理学部 木村泰紀
Yasunori Kimura
Department of Information Science
Faculty of Science
Toho University

1　序論

凸最適化問題は, 凸構造をもつ空間 X 上で定義された凸関数 f の最小化問題, すなわち,

$$f(x_0) = \inf_{y \in X} f(y)$$

をみたす点 x_0 を求める問題として定式化され, さまざまな非線形問題を抽象化した問題と見なすことができる. この問題に対するさまざまなアプローチの中で, とくに不動点理論との関連が深いものとして近接点法がある. Rockafellar [8] によって解への弱収束が証明されたこの手法は, 関数が定義される空間の一般化を含む多くの拡張定理が研究されている. 近接点法ではリゾルベントと呼ばれる非線形作用素が用いられるが, この作用素が非拡大性をもつことや, リゾルベントの不動点集合と最小化問題の解集合が一致すること等から, 非拡大作用素の不動点理論と結び付くことによって多くの知見が得られている.

非拡大作用素の不動点理論については, Kirk [6] による不動点定理を端緒として完備 CAT(0) 空間上での研究が進められてきた. この空間上で定義された凸関数のリゾルベントについては, Jost [1] の研究をもとに Mayer [7] が一価写像として定義できることの証明に成功し, CAT(0) 空間上の凸最適化問題において重要な役割を果たしている.

CAT(0) 空間は, モデル空間を用いて定義された各点における曲率の上限が 0 以下になるような測地距離空間として定義されているが, 曲率上限が正, とくに 1 以下となる空間である CAT(1) 空間の研究も近年急速な発展を遂げている. 2016 年, Kimura and Kohsaka [4] は完備 CAT(1) 空間上で定義された凸関数のリゾルベントに関する次の定理を証明した.

定理 1 (Kimura and Kohsaka [4])**.** X を認容的な完備 CAT(1) 空間, $f : X \to]-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とし, $u \in X$ とする. このとき $g : X \to]-\infty, \infty]$ を, $x \in X$ に対して

$$g(x) = f(x) + \tan d(x, u) \sin d(x, u)$$

で定義すると, g は X 上で唯一の最小点をもつ.

この定理によって凸関数のリゾルベントは一価写像として確立し, リゾルベントを用いて, 近接点法の収束定理 [5] や他の近似列生成法の収束定理も得られている.

本稿では, 上記の CAT(1) 空間上で定義されたリゾルベントをもとに, CAT(-1) 空間上での新たなリゾルベントを提案・研究した [2] の結果をもとに, Takahashi, Takeuchi, and Kubota [9] によって提案された収縮射影法と呼ばれる点列生成法を用いての近似列の解への収束性を証明した.

2 準備

(X, d) を距離空間とする. $x, y \in X$ と $l > 0$ に対し $c : [0, l] \to X$ が x, y を結ぶ測地線であるとは, $c(0) = x$, $c(l) = y$ および任意の $s, t \in [0, l]$ に対して $d(c(s), c(t)) = |s - t|$ をみたすことをいう. $r \in]0, \infty]$ に対して X が r 測地的であるとは, $d(x, y) < r$ をみたす任意の $x, y \in X$ に対して x, y を結ぶ測地線が存在することをいい, このとき X を r 測地距離空間ともいう. $r = \infty$ のとき, つまり 任意の $x, y \in X$ に対して測地線が存在するときは X を単に測地距離空間という. 測地距離空間 X の部分集合 C は, 任意の $x, y \in C$ に対して x, y を結ぶ測地線 c の像がつねに C に含まれるとき, C は凸であるという. 測地距離空間 X 自身はその定義から明らかに凸である.

一般に, 与えられた $x, y \in X$ を結ぶ測地線は一つとは限らないが, 以降では, 任意の 2 点を結ぶ測地線が存在するとき, それは一意であることを仮定する. この仮定のもとで, 測地線の像 $c([0, l])$ を $[x, y]$ とあらわす. $[x, y]$ 上の点 $p = c(s)$ は $[x, y]$ を $s : (l - s)$ に内分する点である. ただし, 測地線の定義より $l = d(c(0), c(l)) = d(x, y)$ である. この点 p を $t = s/l$ を用いて $p = (1 - t)x \oplus ty$ とあらわす.

次に, CAT(κ) 空間を定義するために必要な 2 次元モデル空間 M_κ^2 を定義しよう. $\kappa \in \mathbb{R}$ に対し,

$$M_\kappa^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}} \mathbb{S}^2 & (\kappa > 0), \\ \mathbb{R}^2 & (\kappa = 0), \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}} \mathbb{H}^2 & (\kappa < 0) \end{cases}$$

とする．ここで, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}^2$ はそれぞれ 2 次元の単位球面, ユークリッド空間, および双曲空間をあらわしている．M_κ^2 は測地距離空間であり, 距離 d_κ は, $\kappa > 0$ のときは球面上の大円距離, $\kappa = 0$ のときはユークリッド距離, $\kappa < 0$ のときは双曲距離となる．この距離を用いると, モデル空間 M_κ^2 の直径 D_κ は $\kappa \leq 0$ のときは $D_\kappa = \infty$ となり, $\kappa > 0$ のときは $D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ となることがわかる．

$\kappa \in \mathbb{R}$ とし, (X, d) を測地距離空間とする．3 点 $x, y, z \in X$ が $d(y,z) + d(z,x) + d(x,y) < 2D_\kappa$ をみたすとき,

$$d(y,z) = d_\kappa(\overline{y}, \overline{z}),\ d(z,x) = d_\kappa(\overline{z}, \overline{x}),\ d(x,y) = d_\kappa(\overline{x}, \overline{y})$$

をみたす $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in M_\kappa^2$ が存在する．3 点の組 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ は合同変換を除いて一意に定まることに注意しよう．またこのとき, 測地線分上の点 $p \in [x, y] \subset X$ は $t \in [0, 1]$ を用いて $p = tx \oplus (1-t)y$ とあらわされる．この p の比較点 $\overline{p} \in M_\kappa^2$ を $\overline{p} = t\overline{x} \oplus (1-t)\overline{y} \in [\overline{x}, \overline{y}]$ で定義する． p が $[y, z]$ や $[z, x]$ 上の点の場合も同様である． 任意の $x, y, z \in X$ と $p, q \in [y,z] \cup [z,x] \cup [x,y]$ に対して p および q の比較点 $\overline{p}, \overline{q} \in [\overline{y}, \overline{z}] \cup [\overline{z}, \overline{x}] \cup [\overline{x}, \overline{y}]$ が

$$d(p,q) \leq d_\kappa(\overline{p}, \overline{q})$$

をみたすとき, X は $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間であるという．

$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間 X が, 任意の $u, v \in X$ に対して $d(u,v) < D_\kappa/2$ をみたすとき, X は認容的であるという．$\kappa \leq 0$ のときはすべての $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間 X は認容的である．これは $D_\kappa = \infty$ から明らかである．一方, $\kappa > 0$ のときは D_κ が有限の値となるので, 認容的であることは意味をもつ．

X を認容的な完備 $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間とし, C を X の空でない閉凸集合とする．このとき, 任意の $x \in X$ に対して $g_x(y) = d(x,y)$ を C 上で最小にする点 $y_x \in C$ が一意に存在する．この点を用いて, $P_C x = y_x$ として定義した写像 $P_C : X \to C$ を X から C への距離射影という．定義より明らかに

$$d(x, P_C x) = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x,y)$$

が成り立つ．

3　$\mathrm{CAT}(-1)$ 空間における凸関数のリゾルベント

この節では完備 $\mathrm{CAT}(-1)$ 空間上で定義された下半連続凸関数のリゾルベントの定義とその基本的な性質について述べる．一般に, $\kappa < 0$ に対して距離空間 (X, d) が $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空

間ならば, X 上の新しい距離 d' を $x,y\in X$ に対して

$$d'(x,y)=\sqrt{-\kappa}\,d(x,y)$$

と定義すれば, (X,d') は CAT(-1) 空間となる．この事実を用いれば, $\kappa<0$ に対する CAT(κ) 空間の理論は適当な変換をすることによって CAT(-1) 空間の理論となり, したがって CAT(-1) 空間に対する考察が $\kappa<0$ の場合に本質的であることがわかる．本節は [2] で論じられている内容の抜粋である.

まず, CAT(-1) 空間の幾何学的性質を示す次の基本的な結果から見ていく．次の不等式は双曲空間における中線定理と CAT(-1) 空間の定義から容易に導かれる.

定理 2. CAT(-1) 空間 X 上の点 $x,y,z\in X$ と $t\in[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}&\cosh d(tx\oplus(1-t)y,z)\sinh d(x,y)\\&\qquad\leq\cosh d(x,z)\sinh td(x,y)+\cosh d(y,z)\sinh(1-t)d(x,y)\end{aligned}$$

が成り立つ.

X を CAT(-1) 空間とし, $f:X\to\,]-\infty,\infty]$ とする．f が真であるとは $f(x)<\infty$ をみたす $x\in X$ が存在することをいう．また, f が下半連続であるとは点列 $\{x_n\}\subset X$ が $x_n\to x_0\in X$ であるとき

$$f(x_0)\leq\liminf_{n\to\infty}f(x_n)$$

をみたすことをいう．さらに, f が凸であるとは $x,y\in X$ と $t\in\,]0,1[$ に対して

$$f(tx\oplus(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

がつねに成り立つことをいう.

$f:X\to\,]-\infty,\infty]$ を完備 CAT(-1) 空間 X 上の下半連続な真凸関数としよう．この仮定の下で, f の最小点集合

$$\operatorname*{argmin}_{y\in X}f(y)=\left\{z\in X\;\middle|\;f(z)=\inf_{y\in X}f(y)\right\}$$

が, 空集合であるかどうか, あるいはもし空でないならば一点集合となるかどうかについては, 一般的にはわからない．しかし, 関数 f に適切な摂動関数を加えたものを考えると, 最小点が一意に定まることがわかる.

定理 3 (Kajimura and Kimura [2])**.** X を完備 CAT(-1) 空間, $f:X\to\,]-\infty,\infty]$ を下半連続な真凸関数とし, $u\in X$ とする．このとき $g:X\to\,]-\infty,\infty]$ を, $x\in X$ に対して

$$g(x)=f(x)+\tanh d(x,u)\sinh d(x,u)$$

で定義すると, g は X 上で唯一の最小点をもつ.

この定理において, 一意の最小点をもつ関数 g は $u \in X$ によって定まるものである. この事実を用いて, $u \in X$ に対して u から定められる g の唯一の最小点 $z \in X$ を対応させる写像 $J_f : X \to X$ を考える. すなわち J_f は, 任意の $u \in X$ に対して

$$J_f u = \operatorname*{argmin}_{y \in X} (f(y) + \tanh d(y, u) \sinh d(y, u))$$

をみたす一価写像である. この J_f を関数 f のリゾルベントという.

リゾルベントのもつ性質として, 次のものが示されている. 任意の $x, y \in X$ に対して, 不等式

$$\begin{aligned}(C_x^2(1 + C_y^2)C_y + C_y^2(1 + C_x^2)C_x) \cosh d(J_f x, J_f y)& \\ \leq C_x^2(1 + C_y^2) \cosh d(J_f x, y) &+ C_y^2(1 + C_x^2) \cosh d(x, J_f y)\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $x \in X$ に対して $C_x = \cosh d(J_f x, x)$ とする.

この不等式において,

$$1 + C_y^2 \geq 2C_y,\ 1 + C_x^2 \geq 2C_x$$

がそれぞれ成り立つことを用いると,

$$C_x^2(1 + C_y^2)C_y + C_y^2(1 + C_x^2)C_x \geq 4C_x^2 C_y^2$$

となり, $C_x \geq 1$, $C_y \geq 1$ であることから

$$\begin{aligned}4C_x^2 C_y^2 \cosh d(J_f x, J_f y) &\leq C_x^2(1 + C_y^2) \cosh d(J_f x, y) + C_y^2(1 + C_x^2) \cosh d(x, J_f y) \\ &\leq 2C_x^2 C_y^2 \cosh d(J_f x, y) + 2C_y^2 C_x^2 \cosh d(x, J_f y)\end{aligned}$$

となる. したがって

$$2 \cosh d(J_f x, J_f y) \leq \cosh d(J_f x, y) + \cosh d(x, J_f y)$$

が得られる. この不等式は, リゾルベント J_f が双曲的非伸長写像であることを示している. さらに, もし J_f の不動点集合 $\operatorname{Fix} J_f = \{z \in X \mid J_f z = z\}$ が空でないならば, J_f は擬非拡大写像でもある. 実際, $x \in X$ と $z \in \operatorname{Fix} J_f$ に対して

$$\begin{aligned}2 \cosh d(J_f x, z) &= 2 \cosh d(J_f x, J_f z) \\ &\leq \cosh d(J_f x, z) + \cosh d(x, J_f z) \\ &= \cosh d(J_f x, z) + \cosh d(x, z)\end{aligned}$$

より $\cosh d(J_f x, z) \leq \cosh d(x, z)$ となり, $d(J_f x, z) \leq d(x, z)$ が得られる.

さらに $\operatorname{Fix} J_f = \operatorname{argmin}_{y \in X} f(y)$ であることも容易に示せる.

4　最小点近似

収縮射影法は, ヒルベルト空間上で定義された非拡大写像族の共通不動点近似法として Takahashi, Takeuchi, and Kubota [9] によって提案され, リゾルベント作用素を用いることで凸関数の最小点近似に応用された点列の生成法である. 本稿では完備 CAT(-1) 空間における凸関数の最小化問題に対し, 前節で導入したリゾルベント作用素を収縮射影法で利用することによって解の近似点列が生成されることを示す.

主定理の証明において次の定理が利用される.

定理 4 (Kimura [3])**.** X を完備 CAT(0) 空間とする. $\{C_n\}$ を X の空でない閉凸集合列で, 包含関係に関して単調減少, すなわち, $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$ をみたすとする. $u \in X$ とし, 点列 $\{x_n\} \subset X$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = P_{C_n} u$ で定義する. ただし $P_{C_n} : X \to C_n$ は C_n への距離射影である. このとき, $C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ ならば $\{x_n\}$ は $P_{C_0} u \in X$ に収束する.

一般に, $\kappa_1 < \kappa_2$ のとき, CAT(κ_1) 空間は CAT(κ_2) 空間でもある. したがって, 上の定理は X が CAT(-1) 空間のときも成り立つ.

定理 5. (X, d) を完備 CAT(-1) 空間とし, 任意の $u, v \in X$ に対して $\{w \in X \mid d(u, w) \leq d(v, w)\}$ は凸集合であると仮定する. $f : X \to]-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とし, $S = \operatorname{argmin}_{x \in X} f(x) \neq \emptyset$ であるとする. 正の実数列 $\{\lambda_n\}$ が $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$ をみたすとし, X の点列 $\{x_n\}$ を次のように生成する. 任意に固定した $u \in X$ に対して, $C_1 = X$, $x_1 = u$ とし, さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n \cap \{z \in X : d(J_{\lambda_n f} x_n, z) \leq d(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} u \end{aligned}$$

とする. ただし, $J_{\lambda_n f} : X \to X$ は $\lambda_n f$ のリゾルベント作用素である. このとき $\{x_n\}$ は S 上への距離射影 P_S による u の像 $P_S u \in X$ に収束する.

証明. まず始めに $\{x_n\}$ および $\{C_n\}$ の定義が妥当であることを示す. 仮定より $C_1 = X$ であり, よって C_1 は閉凸集合で $x_1 \in C_1$ と $S \subset C_1$ をみたす. ここで, $k \in \mathbb{N}$ を任意に固定し, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ が定義されており, かつ $C_1, C_2, \ldots, C_k$ が S を含む閉凸集合であると仮定する. 定理の仮定を用いると, 集合 $\{z \in X : d(x_k, z) \leq d(J_{\lambda_n f} x_k, z)\}$ は凸集合であり, さらに距離の連続性から閉集合でもある. ここで $p \in S = \operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$ をとる

と, $p \in \operatorname{Fix} J_{\lambda_k f}$ であることから, $J_{\lambda_k f}$ の擬非拡大性より

$$d(J_{\lambda_k f} x_k, p) \leq d(x_k, p)$$

が成り立つ. よって, 帰納法の仮定とあわせて

$$p \in C_k \cap \{z \in X : d(J_{\lambda_k f} x_k, z) \leq d(x_k, z)\} = C_{k+1}$$

となり, $S \subset C_{k+1}$ が得られる. したがって C_{k+1} は空でない閉凸集合であり, $x_{k+1} = P_{C_{k+1}} u$ によって x_{k+1} が定義できることもわかる. 以上より, 帰納法によって $\{x_n\}$ および $\{C_n\}$ の定義が妥当であることが示された.

$\{C_n\}$ は空でない閉凸集合の列で, 包含関係に関して単調減少であり, さらに $C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ とすると $\emptyset \neq S \subset C_0$ が成り立つため, C_0 も空でない閉凸集合である. よって, 定理 4 より, $\{x_n\}$ は $x_0 = P_{C_0} u$ へ収束する. ここで P_{C_0} は C_0 への距離射影である.

$x_0 \in C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ であることから

$$0 \leq d(J_{\lambda_n f} x_n, x_0) \leq d(x_n, x_0)$$

が各 $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことがわかる. $x_n \to x_0$ であることから $J_{\lambda_n f} x_n \to x_0$ が得られ, さらに $p = P_S u \in S$ とすると, リゾルベントの定義より, $\tau \in \,]0, 1[$ に対して $z_\tau = \tau J_{\lambda_n f} x_n \oplus (1 - \tau) p$ とすることで

$$\begin{aligned}
&\lambda_n f(J_{\lambda_n f} x_n) + \tanh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \sinh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \\
&\leq \lambda_n f(z_\tau) + \tanh d(z_\tau, x_n) \sinh d(z_\tau, x_n) \\
&\leq \tau \lambda_n f(J_{\lambda_n f} x_n) + (1 - \tau) \lambda_n f(p) + \tanh d(z_\tau, x_n) \sinh d(z_\tau, x_n)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$\tanh t \sinh t = \cosh t + \frac{1}{\cosh t}$$

であることから,

$$\begin{aligned}
&(1 - \tau) \lambda_n (f(J_{\lambda_n f} x_n) - f(p)) \\
&\leq \tanh d(z_\tau, x_n) \sinh d(z_\tau, x_n) - \tanh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \sinh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \\
&= (\cosh d(z_\tau, x_n) - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)) + \left(\frac{1}{\cosh d(z_\tau, x_n)} - \frac{1}{\cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)} \right) \\
&= (\cosh d(z_\tau, x_n) - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)) \left(1 - \frac{1}{\cosh d(z_\tau, x_n) \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)} \right) \\
&\leq \cosh d(z_\tau, x_n) - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n).
\end{aligned}$$

ここで, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n = d(J_{\lambda_n f} x_n, p)$ とする. もし, $D_{n_0} = 0$ をみたす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在すると, $J_{\lambda_{n_0} f} x_{n_0} = p \in S = \mathrm{Fix}\, J_{\lambda_n f}$ より, $n > n_0$ に対して $C_n = C_{n_0}$ が成り立ち, したがって $\{x_n\}$ は $p = P_S u$ に収束する.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n > 0$ であるとき, 定理 2 を用いて

$$
\begin{aligned}
&(\cosh d(z_\tau, x_n) - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)) \sinh D_n \\
&= \cosh d(\tau J_{\lambda_n f} x_n \oplus (1-\tau) p, x_n) \sinh D_n - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \sinh D_n \\
&\le \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \sinh(\tau D_n) + \cosh d(p, x_n) \sinh((1-\tau) D_n) \\
&\quad - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \sinh D_n \\
&= \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)(\sinh(\tau D_n) - \sinh D_n) + \cosh d(p, x_n) \sinh((1-\tau) D_n) \\
&= 2 \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cosh \frac{(\tau+1) D_n}{2} \sinh \frac{(\tau-1) D_n}{2} \\
&\quad + \cosh d(p, x_n) \sinh((1-\tau) D_n) \\
&= -2 \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cosh \frac{(\tau+1) D_n}{2} \sinh \frac{(1-\tau) D_n}{2} \\
&\quad + \cosh d(p, x_n) \sinh((1-\tau) D_n).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&(1-\tau)\lambda_n (f(J_{\lambda_n f} x_n) - f(p)) \sinh D_n \\
&\le -2 \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cosh \frac{(\tau+1) D_n}{2} \sinh \frac{(1-\tau) D_n}{2} \\
&\quad + \cosh d(p, x_n) \sinh((1-\tau) D_n)
\end{aligned}
$$

となり,

$$
\begin{aligned}
&\lambda_n (f(J_{\lambda_n f} x_n) - f(p)) \frac{\sinh D_n}{D_n} \\
&\le -\cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cosh \frac{(\tau+1) D_n}{2} \frac{\sinh((1-\tau) D_n/2)}{(1-\tau) D_n/2} \\
&\quad + \cosh d(p, x_n) \frac{\sinh((1-\tau) D_n)}{(1-\tau) D_n}
\end{aligned}
$$

となる. $\tau \uparrow 1$ とすると $z_\tau \to J_{\lambda_n f} x_n$ となり, よって

$$
\begin{aligned}
&\lambda_n (f(J_{\lambda_n f} x_n) - f(p)) \frac{\sinh D_n}{D_n} \\
&\le -\cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cosh D_n + \cosh d(p, x_n) \\
&= \cosh d(p, x_n) - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cosh D_n
\end{aligned}
$$

を得る．ここで $n \to \infty$ とすると，

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n > 0$$

であり，

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sinh D_n}{D_n} > 0$$

である．さらに $\lim_{n\to\infty} J_{\lambda_n f} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ より $\lim_{n\to\infty} D_n = d(x_0, p)$ なので

$$\lim_{n\to\infty} (\cosh d(p, x_n) - \cosh d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cosh D_n) = \cosh d(p, x_0) - \cosh d(x_0, p) = 0.$$

したがって

$$0 \leq f(x_0) - f(p) \leq \liminf_{n\to\infty} f(J_{\lambda_n f} x_n) - f(p) = 0$$

を得る．これより，$f(x_0) = f(p) = \min_{x\in X} f(x)$ となり，これは $x_0 \in S$ を意味する．$x_0 = P_{C_0} u$ で $S \subset C_0$ であることから $x_0 = P_S u$ であることが導かれ，以上により $\{x_n\}$ は $P_S u$ に収束することが示された． $\square$

参考文献

[1] J. Jost, *Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 659–673.

[2] T. Kajimura and Y. Kimura, *Resolvents of convex functions in complete geodesic metric spaces with negative curvature*, J. Fixed Point Theory Appl., to appear.

[3] Y. Kimura, *Convergence of a sequence of sets in a Hadamard space and the shrinking projection method for a real Hilbert ball*, Abstr. Appl. Anal. (2010), Art. ID 582475, 11.

[4] Y. Kimura and F. Kohsaka, *Spherical nonspreadingness of resolvents of convex functions in geodesic spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **18** (2016), 93–115.

[5] ———, *The proximal point algorithm in geodesic spaces with curvature bounded above*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 133–148.

[6] W. A. Kirk, *Fixed point theorems in* CAT(0) *spaces and* $\mathbb{R}$*-trees*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 309–316.

[7] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 199–253.

[8] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[9] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.