完備距離空間における CJM 縮小写像に関する不動点定理

九州工業大学　　鈴木 智成　(Tomonari SUZUKI)

1. 序

完備距離空間における不動点定理の中で, 一番有名でかつ有用なものは, もちろん, Banach の縮小原理 (the Banach contraction principle) である.

定理 1 ([1, 4])**.** Let (X, d) be a complete metric space and let T be a *contraction* on X, that is, there exists $r \in [0, 1)$ satisfying

$$d(Tx, Ty) \leq r\, d(x, y) \tag{1}$$

for all $x, y \in X$. Then the following holds:

(A) T has a unique fixed point z and $\{T^n x\}$ converges to z for all $x \in X$.

実に多くの拡張定理が証明されてきている. 次の定理はその 1 つである.

定理 2 ([5, 8, 12])**.** Let (X, d) be a complete metric space and let T be a *CJM contraction* on X, that is, the following hold:

(i) For any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that $d(x, y) < \varepsilon + \delta$ implies $d(Tx, Ty) \leq \varepsilon$.
(ii) $x \neq y$ implies $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

Then (A) holds.

誰の定理と呼んでよいのか, 迷う定理である. 今現在, 筆者は 3 つの文献を挙げて, この定理を紹介している. この定理を初めて見たとき, 筆者はこの定理の良さに気付くことができなかった. 条件が 2 つ部分より構成されていて, このことを「美しくない」と感じたからである. しかしながら, 最近の研究を経て, 筆者は定理 2 の素晴らしさに気付くことができた. 本稿では, その辺りの解説をしたい.

MSC (2010). 54H25.
キーワード. The Banach contraction principle, CJM's fixed point theorem.
住所. 〒 804–8550 北九州市戸畑区 九州工業大学工学研究院.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

2. 小歴史

まず, Edelstein の不動点定理を紹介したい. この定理は compact 距離空間における不動点定理である. 空間の条件は定理 1 より強いが, 写像の条件が非常に弱いため, 定理 1 と定理 3 は独立な定理である. [10, 14] 等も参照のこと.

定理 3 (Edelstein [6])**.** Let (X, d) be a compact metric space and let T be a mapping on X. Assume

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad d(Tx, Ty) < d(x, y) \tag{2}$$

for any $x, y \in X$. Then (A) holds.

我々が「縮小写像」と言った場合, 通常は「強い縮小条件」である条件 (1) を指す. 一方で, 「縮小写像」という字句から想像できる条件は, 「弱い縮小条件」である条件 (2) である. 条件 (2) はあまりにも弱い条件であるため使い勝手が悪く, 条件 (1) を「縮小写像」の定義とするのはとても合理的なことである.

さて, 完備距離空間の不動点定理で, その縮小条件が条件 (1) と条件 (2) の間にくるものを挙げてみる. 結論部分はすべて (A) なので, 縮小条件のみを記す.

- [Bro 68] T is said to be a *Browder contraction* [3] if there exists a function φ from $[0, \infty)$ into itself satisfying the following:
  (a) φ is nondecreasing and right continuous.
  (b) $\varphi(t) < t$ for any $t \in (0, \infty)$.
  (c) $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ d(x, y)$ for all $x, y \in X$.
- [BW 69] T is said to be a *Boyd-Wong contraction* [2] if there exists a function φ from $[0, \infty)$ into itself satisfying the following:
  (a) φ is upper semicontinuous from the right.
  (b) $\varphi(t) < t$ for any $t \in (0, \infty)$.
  (c) $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ d(x, y)$ for all $x, y \in X$.
- [MK 69] T is said to be a *Meir-Keeler contraction* [13] if for any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that $d(x, y) < \varepsilon + \delta$ implies $d(Tx, Ty) < \varepsilon$.
- [Mat 75] T is said to be a *Matkowski contraction* [11] if there exists a function φ from $[0, \infty)$ into itself satisfying the following:
  (a) φ is nondecreasing.
  (b) $\lim_n \varphi^n(t) = 0$ for any $t \in (0, \infty)$.
  (c) $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ d(x, y)$ for all $x, y \in X$.

- [CJM 80, 定理 2] T is said to be a *CJM contraction* [5, 8, 12] if the following hold:
  - (a) For any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that $d(x, y) < \varepsilon + \delta$ implies $d(Tx, Ty) \leq \varepsilon$.
  - (b) $x \neq y$ implies $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

これらの縮小条件の強弱関係について, 以下のことが知られている. 各矢印について, 逆方向の矢印が成立しないことも分っている.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{縮小} & \to & \mathrm{Bro} & \to & \mathrm{BW} & \to & \mathrm{MK} & \to & \mathrm{CJM} & \to & (2) \\ & & & \searrow & & & & \nearrow & & & \\ & & & & & \mathrm{Mat} & & & & & \end{array} \tag{3}$$

また, 空間が compact であるとき, Bro と (2) が（つまり, これらの間に入るものすべてが）同値であることも分かっている. [9, 17] 等を参照のこと. 完備距離空間においては, CJM は (A) を保証する条件であり, 条件 (2) は (A) を保証しない. つまり, (A) を保証する最弱条件（１つであるとは限らないが）が両者の間に存在することが分かる. そこで, 以下の問題が自然に浮かび上がる.

問題 4. 距離空間 X は完備であり, 写像 T は条件 (2) を満たすとする. このとき, (A) を保証する最弱条件は何か？

次に, 条件の記述に関して一見して分かることは, MK がシンプルに表現されていることである. 一方で, 他の条件はあまりシンプルに表現されていない. さらに, 記述方法の統一感は感じにくい. Bro と BW が似ていて, MK と CJM が似ていることは分かる. しかしながら, Mat は Bro や BW に近い方法で記述されているが, 一瞥して比較できる程似ている訳ではない. さらに, BW と MK は条件として近いにも関わらず, 記述方法は大きく異なる. 以上により, 以下の問題も自然に生じてくる.

問題 5. 縮小条件間の関係を簡潔に説明することはできるか？

3. 問題 4

問題 4 に関して, 以下の結果が最近得られている.

例 6 (Example 8 in [15])**.** Let E be the Banach space consisting of all bounded functions x from $\mathbb{N}$ into $\mathbb{R}$ with supremum norm, that is, we can write

$$E = \Big\{ x := \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)\, e_n : \|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)| < \infty \Big\},$$

where $\{e_n\}$ is the canonical basis and $\sum$ represents 'formal sum'. Put $a_n^{(m)} = 2^{1-m/n}$ for $m, n \in \mathbb{N}$. Define a closed subset X of E by

$$X = \{a_n^{(m)} e_n : m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

and a mapping T on X by

$$T(a_n^{(m)} e_n) = a_n^{(m+1)} e_n \quad \text{and} \quad T(0) = 0.$$

Then (2) and (A) hold. However, T is not a CJM contraction. Moreover T^ℓ is not a CJM contraction for any $\ell \in \mathbb{N}$.

定理 7 (Corollary 7 in [15])**.** Let (X, d) be a complete metric space and let T be a mapping on X satisfying (2). Then (A) and the following are equivalent:

(B) For any $x \in X$ and $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that $d(T^i x, T^j x) < \varepsilon + \delta$ implies $d(T^{i+1} x, T^{j+1} x) \le \varepsilon$ for all $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

例 6 が示していることは, CJM を満たさない写像で, (A) を満たすものが存在するということである. すなわち, 問題 4 を考慮する際, 縮小条件 CJM は強すぎることを意味している.

一方, 定理 7 が示していることは, 条件 (B) が, 問題 4 の答えであることを示している. (B) は CJM よりもほんの少し弱いだけなので, 「実質的に CJM が問題 4 の答えである」というふうに表現できるであろう.

CJM が本質的な最弱条件であることをみるために, 定理 7 の (B) $\Rightarrow$ (A) の部分の証明を与える.

定理 7 (B) $\Rightarrow$ (A) の証明. Fix $x \in X$ and define a sequence $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ in X by $x_n = T^n x$ for $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. We first show that $\{x_n\}$ converges to a fixed point of T, dividing the following three cases:

- There exists $\nu \in \mathbb{N}$ satisfying $x_{\nu+1} = x_\nu$.
- $x_{n+1} \ne x_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and there exist $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ such that $\mu + 2 \le \nu$ and $x_\mu = x_\nu$.
- $x_1, x_2, \cdots$ are all different.

In the first case, x_ν is a fixed point of T. Since $x_\nu = x_{\nu+1} = x_{\nu+2} = \cdots$ holds, $\{x_n\}$ converges to x_ν. In the second case, from (2), we have that $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ is strictly decreasing. So, since $x_{\mu+1} = x_{\nu+1}$ holds, we have

$$d(x_\mu, x_{\mu+1}) = d(x_\nu, x_{\nu+1}) < \cdots < d(x_\mu, x_{\mu+1}).$$

This is a contradiction. Thus, the second case cannot be possible. In the third case, as above, we have that $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ is strictly decreasing. So

$\{d(x_n, x_{n+1})\}$ converges to some $\varepsilon_1 \geq 0$. Arguing by contradiction, we assume $\varepsilon_1 > 0$. From (B), there exists $\delta_1 > 0$ such that

- $d(x_i, x_j) < \varepsilon_1 + \delta_1$ implies $d(x_{i+1}, x_{j+1}) \leq \varepsilon_1$.

From the definition of ε_1, we can choose $\nu \in \mathbb{N}$ satisfying $d(x_\nu, x_{\nu+1}) < \varepsilon_1 + \delta_1$. Then we have

$$d(x_{\nu+2}, x_{\nu+3}) < d(x_{\nu+1}, x_{\nu+2}) \leq \varepsilon_1,$$

which implies a contradiction. Therefore we obtain $\varepsilon_1 = 0$. So we obtain $\lim_n d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Fix $\varepsilon_2 > 0$. Then from (B), there exists $\delta_2 > 0$ such that

- $d(x_i, x_j) < \varepsilon_2 + \delta_2$ implies $d(x_{i+1}, x_{j+1}) \leq \varepsilon_2$.

Since $\lim_n d(x_n, x_{n+1}) = 0$ holds, we can choose $\lambda \in \mathbb{N}$ satisfying

$$d(x_\ell, x_{\ell+1}) < \delta_2$$

for any $\ell \in \mathbb{N}$ with $\ell \geq \lambda$. Fix $\ell \in \mathbb{N}$ with $\ell \geq \lambda$. We will show

$$d(x_{\ell+1}, x_{\ell+j}) \leq \varepsilon_2 \tag{4}$$

for $j \in \mathbb{N}$ by induction. It is obvious that (4) holds when $j = 1$. We assume that (4) holds for some $j \in \mathbb{N}$. Then we have

$$d(x_\ell, x_{\ell+j}) \leq d(x_\ell, x_{\ell+1}) + d(x_{\ell+1}, x_{\ell+j}) < \delta_2 + \varepsilon_2$$

and hence $d(x_{\ell+1}, x_{\ell+j+1}) \leq \varepsilon_2$ holds. So, by induction, (4) holds for every $j \in \mathbb{N}$. Thus, we obtain

$$\sup_{m > n > \lambda} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_2.$$

Since $\varepsilon_2 > 0$ is arbitrary, we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} d(x_n, x_m) = 0,$$

which implies that $\{x_n\}$ is Cauchy. Since X is complete, $\{x_n\}$ converges to some point $z \in X$. From (2), we have

$$\lim_{n\to\infty} d(Tz, x_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} d(z, x_n) = 0.$$

So $\{x_n\}$ also converges to Tz. Hence $Tz = z$ holds, thus, z is a fixed point of T. We have shown that $\{x_n\}$ converges to a fixed point in all cases. The uniqueness of the fixed point is followed by (2). $\square$

4. 問題 5

(X,d) を距離空間とし, T を X 上の写像とする. $[0,\infty)^2$ の部分集合 Q を以下で定める:

$$Q = \{ (d(x,y), d(Tx,Ty)) :\ x,y \in X \}. \tag{5}$$

Hegedüs と Szilágyi は論文 [7] において, Q を導入し, 縮小条件に関する議論を行っている.

Q の導入が素晴らしいのは, 距離空間 (X,d) や 写像 T と無関係に議論を進めることができる点にある. 言い換えれば, 純粋に, 縮小条件のみにスポットを当てることができる.

これらを動機付けとして, 論文 [16] では, 縮小条件の記述方法の統一を図った.

定義 8 (Definitioin 3 in [16])**.** Let Q be a subset of $[0,\infty)^2$.

(1) Q is said to satisfy *Condition C*$(0,0,0)$ if the following hold:
- (1-i) $u < t$ for any $(t,u) \in Q$ with $u > 0$.
- (1-ii) There does not exist $\tau > 0$ and a sequence $\{(t_n,u_n)\}$ in Q satisfying $\tau < t_n$, $\tau < u_n$ and $\lim_n t_n = \lim_n u_n = \tau$.

(2) Q is said to satisfy *Condition C*$(0,0,1)$ if the following hold:
- (2-i) Q satisfies Condition C$(0,0,0)$.
- (2-ii) There does not exist $\tau > 0$ and a sequence $\{(t_n,u_n)\}$ in Q satisfying $\tau < t_n$, $u_n = \tau$ and $\lim_n t_n = \tau$.

(3) Q is said to satisfy *Condition C*$(0,0,2)$ if the following hold:
- (3-i) Q satisfies Condition C$(0,0,0)$.
- (3-ii) There does not exist $\tau > 0$ and a sequence $\{(t_n,u_n)\}$ in Q satisfying $\tau < t_n$, $u_n \le \tau$ and $\lim_n t_n = \lim_n u_n = \tau$.

(4) Q is said to satisfy *Condition C*$(0,1,0)$ if the following hold:
- (4-i) Q satisfies Condition C$(0,0,0)$.
- (4-ii) There does not exist $\tau > 0$ and a sequence $\{(t_n,u_n)\}$ in Q satisfying $t_n = \tau$, $u_n < \tau$ and $\lim_n u_n = \tau$.

(5) Q is said to satisfy *Condition C*$(1,0,0)$ if the following hold:
- (5-i) Q satisfies Condition C$(0,0,0)$.
- (5-ii) There does not exist $\tau > 0$ and a sequence $\{(t_n,u_n)\}$ in Q satisfying $t_n < \tau$, $u_n < \tau$ and $\lim_n t_n = \lim_n u_n = \tau$.

(6) Let $(p,q,r) \in \{0,1\}^2 \times \{0,1,2\}$. Then Q is said to satisfy *Condition C*(p,q,r) if Q satisfies Conditions C$(p,0,0)$, C$(0,q,0)$ and C$(0,0,r)$.

命題 9 ([16])**.** Let (X, d) be a metric space and let T be a mapping on X. Define a subset Q of $[0, \infty)^2$ by (5). Then the following hold:

(i) T is a CJM contraction iff Q satisfies Condition $\mathrm{C}(0, 0, 0)$.
(ii) T is a Meir-Keeler contraction iff Q satisfies Condition $\mathrm{C}(0, 0, 1)$.
(iii) T is a Boyd-Wong contraction iff Q satisfies Condition $\mathrm{C}(0, 1, 2)$.
(iv) T is a Matkowski contraction iff Q satisfies Condition $\mathrm{C}(1, 1, 0)$.
(v) T is a Browder contraction iff Q satisfies Condition $\mathrm{C}(1, 1, 2)$.

定義 8 で, Q を用いて, $\mathrm{C}(?, ?, ?)$ という形の 12 個の縮小条件を導入した. そして, 命題 9 において, そのうちの 5 個の条件が第 2 節で記述した縮小条件と同値であることを示した.

このことにより, 縮小条件の強弱関係図 (3) を以下のように数値を用いて書き直すことができる. 数値が大きい程, 条件が強くなるので, 強弱関係は一目瞭然になる.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{C}(1,1,2) & \to & \mathrm{C}(0,1,2) & \to & \mathrm{C}(0,0,1) & \to & \mathrm{C}(0,0,0) \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & & \mathrm{C}(1,1,0) & & & \end{array}$$

また, 第 2 節での定義の記述方法では, MK がシンプルに表現されているため, MK が特別な条件のように思えた. しかしながら, この研究結果のにより, 条件のシンプルさには違いがないことが分かった.

5. 結論

今回の研究により, 以下のことが分かった.

- X を完備距離空間とし, T を条件 (2) を満たす写像とする. このとき, (A) を保証する最弱条件は, 実質的に CJM である.
- CJM は MK 等の他の縮小条件と同じレベルのシンプルさで表現できる.

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., 3 (1922), 133–181.

[2] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458–464. MR0239559

[3] F. E. Browder, *On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 71=Indag. Math. 30 (1968), 27–35. MR0230180

[4] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale*, Rend. Accad. Naz. Lincei, 11 (1930), 794–799.

[5] Lj. B. Ćirić, *A new fixed-point theorem for contractive mappings*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 30 (1981), 25–27. MR0672538

[6] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc., 37 (1962), 74–79. MR0133102

[7] M. Hegedüs and T. Szilágyi, *Equivalent conditions and a new fixed point theorem in the theory of contractive type mappings*, Math. Japon., 25 (1980), 147–157. MR0571276

[8] J. Jachymski, *Equivalent conditions and the Meir-Keeler type theorems*, J. Math. Anal. Appl., 194 (1995), 293–303. MR1353081

[9] ———, *Remarks on contractive conditions of integral type*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 1073–1081. MR2527526

[10] M. Kikkawa and T. Suzuki, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings satisfying Condition* (CC), Linear Nonlinear Anal., 1 (2015), 37–52. MR3570780

[11] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations*, Diss. Math., 127, Warsaw, 1975. MR0412650

[12] ———, *Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces*, Časopis Pěst. Mat., 105 (1980), 341–344. MR0597909

[13] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 326–329. MR0250291

[14] T. Suzuki, *A new type of fixed point theorem in metric spaces*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 5313–5317. MR2560200

[15] ———, *The weakest contractive conditions for Edelstein's mappings to have a fixed point in complete metric spaces*, J. Fixed Point Theory Appl., 19 (2017), 2361–2368. MR3720456

[16] ———, *Characterizations of contractive conditions by using convergent sequences*, Fixed Point Theory Appl., 2017, 2017:30. MR3738870

[17] ———, *Edelstein's fixed point theorem in semimetric spaces*, J. Nonlinear Var. Anal., 2 (2018), 165–175.