The spinor representation of conformal mappings of surfaces

筑波大学・数理物質系数学域　守屋克洋
Katsuhiro Moriya
Division of Mathematics, Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1　序

ユークリッド空間内の極小曲面のワイエルシュトラス表現公式は、よく知られているものである. それは, 極小曲面のパラメトライゼーションの微分を具体的に構成するものである. 本稿の目的は, 高次元のユークリッド空間内の曲面のパラメトライゼーションの微分をスピン束の切断を用いて書くこと, そこから得られる共形はめ込みのコーシー・リーマン方程式の類似物を用いて, 共形はめ込みの変換を与えることである ([1]).

2　曲面のスピノル表現

$\mathbb{R}^r$ の標準基底を $e_1, \ldots, e_r$ と書く. V を e_1, e_2 で張られる $\mathbb{R}^r$ の二次元線形部分空間とする.

$\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^r)$ を $\mathbb{R}^r$ のクリフォード代数とし, $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^r)$ を $\mathbb{R}^r$ のスピン群とする. $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^{r-1})$ は $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^r)$ の部分代数であり, $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{r-1})$ は $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^r)$ の部分群である. Ad を $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^r)$ の随伴作用素とする.

M をリーマン面とし J を M の複素構造とする. $f\colon M \to \mathbb{R}^r$ $(r \geq 3)$ を共形はめ込みとする. 任意の $p \in M$ に対し, $(df)_p(T_pM)$ は $T_{f(p)}\mathbb{R}^r$ の 2 次元部分空間であるから, $v\colon M \to \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^r)$ で $\mathrm{Ad}_{v(p)}(T_{f(p)}V) = df_p(T_pM)$ となるものが存在する. f は共形はめ込みであるから, M 上の零にならない一次微分形式 θ_1, θ_2 で $\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2$ が $(1,0)$ 形式もしくは $(0,1)$ 形式であり,

$$df = \mathrm{Ad}_v(\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2)$$

となるものが存在する. $T^*M \otimes V$ のスピン構造を一つ固定して, そのスピン束を S と書く. この時, 二重被覆バンドル写像 $\Psi\colon S \to T^*M \otimes V$ が存在する. この写像は全射だか

ら, S の切断 s で

$$\Psi(s) = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2$$

となるものが存在し,

$$df = \operatorname{Ad}_v \Psi(s) \tag{1}$$

となる.

定義 1. 式 (1) の右辺を df のスピン表現と呼ぶ.

$T^*M \otimes V$ のスピン構造が固定され, したがって Ψ が固定されているときに, $\operatorname{Ad}_v \Psi(s)$ が共形はめ込みの微分になっているための s と v の満たすべき条件を考える. それは, $\Psi(s)$ が 0 にならない $(1,0)$ 形式もしくは $(0,1)$ 形式で, $\operatorname{Ad}_v \Psi(s)$ が完全微分形式であれば良いので, 次が得られる.

補題 1. M が単連結で $v\colon M \to \operatorname{Spin}(\mathbb{R}^r)$ と 0 にならない S の切断 s が

$$\begin{aligned}
&\Psi(s) \text{ は零点を持たない}, \\
&\Psi(s) \text{ は } (1,0) \text{ 形式もしくは } (0,1) \text{ 形式}, \\
&v^{-1}\, dv \wedge \Psi(s) + d\Psi(s) + \Psi(s) \wedge v^{-1}\, dv = 0
\end{aligned}$$

を満たすとき, 共形はめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^r$ で $df = \operatorname{Ad}_v \Psi(s)$ となるものが存在する.

写像

$$\begin{aligned}
&G\colon M \to \operatorname{Spin}(\mathbb{R}^r)/\operatorname{Spin}(\mathbb{R}^2) \times \operatorname{Spin}(\mathbb{R}^{r-2}), \\
&G = \operatorname{Ad}_v e_1 e_2
\end{aligned}$$

は, f の一般化されたガウス写像である. $G^2 = -1$ であるので, スピン表現は次のように共形はめ込みのコーシー・リーマン方程式の類似方程式を誘導する.

補題 2. スピン表現が $df = \operatorname{Ad}_v \Psi(s)$ である共形はめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^r$ は

$$df \circ J = G\, df = -df\, G, \quad G = \operatorname{Ad}_v e_1 e_2$$

もしくは,

$$df \circ J = -G\, df = df\, G, \quad G = \operatorname{Ad}_v e_1 e_2$$

を満たす.

この方程式を使うと共形はめ込みの変換が得られる．以下, しばらくその準備をする．

$\tilde{\mathbb{R}}^{r-1}$ を $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^r)$ の部分空間で e_1e_r, …, $e_{r-1}e_r$ で張られるものとする．この時 $\mathrm{C}\ell(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1})$ は $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^r)$ の部分代数となり, したがって $\mathrm{Spin}(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1}) \subset \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^r)$ である．$\mathrm{Pin}(\mathbb{R}^r)$ を $\mathbb{R}^r$ のピン群とすると,

$$u = \sum_{i=1}^{r-1} a_i e_i e_r \in \mathrm{Pin}(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1})$$

は

$$u = \left(\sum_{i=1}^{r-1} a_i e_i\right) e_r$$

であるので, 次がすぐにわかる．

補題 3. $\mathrm{Spin}(\tilde{\mathbb{R}}^{r-1}) = \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{r-1})$.

すると, 共形はめ込み $g \colon M \to \tilde{\mathbb{R}}^{r-1}$ がスピン表現で

$$dg = \mathrm{Ad}_w \tilde{\Psi}(\tilde{s}), \ \ w \colon M \to \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{r-1})$$

とかける．

$$dg \circ J = (\mathrm{Ad}_w e_1e_2)\, dg = -dg\, (\mathrm{Ad}_w e_1e_2)$$

または,

$$dg \circ J = -(\mathrm{Ad}_w e_1e_2)\, dg = dg\, (\mathrm{Ad}_w e_1e_2)$$

である．

定理 1. $f \colon M \to \mathbb{R}^{r-1}$ を共形はめ込みで, そのスピン表現を $df = \mathrm{Ad}_v \Psi(s)$, $v \colon M \to \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{r-1})$, $\Psi(s)$ は $(1,0)$ 形式とし, $g \colon M \to \tilde{\mathbb{R}}^{r-1}$ をはめ込みとする．この時, 次は同値．

1. $df \wedge dg = 0$,
2. $dg \wedge df = 0$,
3. g は共形で, スピン表現が $dg = \mathrm{Ad}_v \tilde{\Psi}(\tilde{s})$ で $\tilde{\Psi}(\tilde{s})$ は $(0,1)$ 形式

証明. X を零でない M の接ベクトルとすると

$$\begin{aligned}(df \wedge dg)(X, JX) &= df(X)\, dg(JX) - df(JX)\, dg(X) \\ &= df(X)\{dg(JX) + (\mathrm{Ad}_v e_1e_2)\, dg(X)\} = 0\end{aligned}$$

より, $(df(X))^{-1}$ を左からかけて

$$dg \circ J = -(\mathrm{Ad}_v e_1e_2)\, dg$$

である．したがって, g は共形で, そのスピン表現が $\mathrm{Ad}_v \tilde{\Psi}(\tilde{s})$ で $\tilde{\Psi}(\tilde{s})$ は $(0,1)$ 形式となり, 1 と 3 の同値性が示される．

2 と 3 の同値性も同様である．

参考文献

[1] Moriya, K., Transforms of conformal mappings of surfaces of higher codimension, in preparation.