

可能性理論に基づくファジィ集合の比較指標の 特徴付けとその応用

Characterization of possibility-theoretical comparison indices for fuzzy sets and its application

池 浩一郎 田中 環
Koichiro Ike Tamaki Tanaka

新潟大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1 はじめに

本研究では、線型空間上の複数のファジィ集合を比較するための指標として、可能性理論に基づく六種類のファジィ関係に焦点を当てる。それらは、Dubois・Prade [2] に端を発し、乾口・市橋・久米 [6] によって一般の形で提案されたものである。[7, 8, 11] では、それらの指標を種々のファジィ最適化問題へと応用した結果が報告されている。ファジィ集合（特にファジィ数）の比較指標に関する研究は、例えば [1] にまとめられているように数多くあるが、上記の指標は他と比べ、六種類を使い分けることで幅広い状況を適切に記述できる点が評価されている。

一方、集合最適化の分野では、集合どうしを比較するために“集合関係”と呼ばれる特定の（クリस्पな）二項関係がよく用いられる。集合関係には様々なバリエーションが存在するが、黒岩・田中・Ha [10] によって考案された六種類（その中でも特に二種類）が有名である。それらの集合関係は、限量子の組み合わせに対応して定まるという点で、ベクトル間の順序の自然な拡張として見ることができる。

本稿では、上で述べたファジィ集合の六種類の比較指標と六種類の集合関係との間の密接な関連性を明らかにすることを通して、当該指標の新たな特徴付けを与える。第2節ではいくつかの必要な記法・定義を準備し、第3節で上記の関連性を段階的に仮定の強さの異なる三つの結果として記述する。また、第4節では、得られた結果のファジィ最適化への応用を考え、ある種のファジィ最適化問題を解くこととある種の集合最適化問題を解くことが等価になることを示す。

2 準備

本稿を通しては、 Z を実ハウスドルフ線型位相空間、 C を $0_Z \in C \subsetneq Z$ を満たす凸錐、 \leq_C を

$$z \leq_C z' :\iff z' - z \in C$$

により定まる Z 上の前順序、 $\mathcal{P}(Z)$ を Z のべき集合とする。ここで、 0_Z は Z の零ベクトルを表し、前順序は反射性と推移性を満たす二項関係を意味する。

定義 1 ([10, 5]). 六種類の集合関係 $\preceq_C^{(*)}$ ($*$ = 1, 2L, 2U, 3L, 3U, 4) を、 $A, B \in \mathcal{P}(Z)$ に対して

$$\begin{aligned} A \preceq_C^{(1)} B &:\iff \forall a \in A \forall b \in B: a \leq_C b, \\ A \preceq_C^{(2L)} B &:\iff \exists a \in A \forall b \in B: a \leq_C b, \\ A \preceq_C^{(2U)} B &:\iff \exists b \in B \forall a \in A: a \leq_C b, \\ A \preceq_C^{(3L)} B &:\iff \forall b \in B \exists a \in A: a \leq_C b, \\ A \preceq_C^{(3U)} B &:\iff \forall a \in A \exists b \in B: a \leq_C b, \\ A \preceq_C^{(4)} B &:\iff \exists a \in A \exists b \in B: a \leq_C b \end{aligned}$$

により定める。

番号の L と U はそれぞれ、“Lower” と “Upper” に由来している。定義から直ちに、空でない集合 A, B に対して

$$\begin{aligned} A \preceq_C^{(1)} B &\implies A \preceq_C^{(2L)} B \implies A \preceq_C^{(3L)} B \implies A \preceq_C^{(4)} B, \\ A \preceq_C^{(1)} B &\implies A \preceq_C^{(2U)} B \implies A \preceq_C^{(3U)} B \implies A \preceq_C^{(4)} B \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。

ファジィ集合は、Zadeh [12] によって考案された、曖昧さを含む集合を定式化する概念である。 Z 上の任意のファジィ集合 \tilde{A} は、その所属度関数 $\mu_{\tilde{A}}: Z \rightarrow [0, 1]$ によって一意的に定められる。これは Z 上の集合 A をその特性関数 $\chi_A: Z \rightarrow \{0, 1\}$ と同一視できることに対応しており、ファジィ集合は通常の集合の一般化であると言える。 Z 上のファジィ集合の全体を $\mathcal{F}(Z)$ と書く。各 $\alpha \in [0, 1]$ に対して、ファジィ集合 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(Z)$ の α -レベル集合を

$$[\tilde{A}]_\alpha := \begin{cases} \{z \in Z \mid \mu_{\tilde{A}}(z) \geq \alpha\} & (\alpha \in (0, 1]) \\ \text{cl}\{z \in Z \mid \mu_{\tilde{A}}(z) > 0\} & (\alpha = 0) \end{cases}$$

により定める。ただし、 $\text{cl} A$ は集合 A の閉包を表す。集合値写像 $[0, 1] \ni \alpha \mapsto [\tilde{A}]_\alpha \in \mathcal{P}(Z)$

を \tilde{A} の切断写像と呼ぶことにする．また，ファジィ集合の正規性，コンパクト性，狭義凸性を次のように与える： $\tilde{A} \in \mathcal{F}(Z)$ が

- 正規： $\iff \mu_{\tilde{A}}(z) = 1$ となる $z \in Z$ が存在する．
- コンパクト： \iff 任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して $[\tilde{A}]_{\alpha}$ がコンパクト．
- 狭義凸： \iff 任意の異なる $z, z' \in Z$ と $\lambda \in (0, 1)$ に対して

$$\begin{aligned} \min \{\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(z')\} \in (0, 1) &\implies \mu_{\tilde{A}}(\lambda z + (1 - \lambda)z') > \min \{\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(z')\}, \\ \min \{\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(z')\} = 1 &\implies \mu_{\tilde{A}}(\lambda z + (1 - \lambda)z') = 1. \end{aligned}$$

ファジィ関係は，通常の二項関係をファジィ化した概念である．すなわち， Z 上のファジィ関係は $Z \times Z$ 上のファジィ集合として定義され，その所属度関数の値は関係の成り立つ度合いを表す．以下では，二つのファジィ集合を比較するための指標として， $\mathcal{F}(Z)$ 上のファジィ関係を取り扱う．

定義 2 ([6]). 六種類の $\mathcal{F}(Z)$ 上のファジィ関係 $\underset{C}{\succsim}^{(*)}$ ($*$ = 1, 2L, 2U, 3L, 3U, 4) を， $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して

$$\begin{aligned} \mu_{\underset{C}{\succsim}^{(1)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &:= \inf_{\substack{a, b \in Z \\ a \not\leq_C b}} \max \{1 - \mu_{\tilde{A}}(a), 1 - \mu_{\tilde{B}}(b)\}, \\ \mu_{\underset{C}{\succsim}^{(2L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &:= \sup_{a \in Z} \inf_{\substack{b \in Z \\ a \not\leq_C b}} \min \{\mu_{\tilde{A}}(a), 1 - \mu_{\tilde{B}}(b)\}, \\ \mu_{\underset{C}{\succsim}^{(2U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &:= \sup_{b \in Z} \inf_{\substack{a \in Z \\ a \not\leq_C b}} \min \{1 - \mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b)\}, \\ \mu_{\underset{C}{\succsim}^{(3L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &:= \inf_{b \in Z} \sup_{\substack{a \in Z \\ a \leq_C b}} \max \{\mu_{\tilde{A}}(a), 1 - \mu_{\tilde{B}}(b)\}, \\ \mu_{\underset{C}{\succsim}^{(3U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &:= \inf_{a \in Z} \sup_{\substack{b \in Z \\ a \leq_C b}} \max \{1 - \mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b)\}, \\ \mu_{\underset{C}{\succsim}^{(4)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &:= \sup_{\substack{a, b \in Z \\ a \leq_C b}} \min \{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b)\} \end{aligned}$$

により定める．

ここでは，これらのファジィ関係の番号付けを，次節で述べる集合関係との関連性に合わせて元の定義から変更している．各 $\mu_{\underset{C}{\succsim}^{(*)}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ は，可能性理論 ([13, 2]) で用いられる可能性測度と必然性測度を組み合わせて表すことができ，それにより

- $\begin{cases} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{cases}$ が必然的に $\begin{cases} \tilde{B} \text{ 以下である} \\ \tilde{A} \text{ 以上である} \end{cases}$ 必然性 ($*$ = 1)
- \tilde{A} が必然的に \tilde{B} 以下である可能性 ($*$ = 2L)

- \tilde{B} が必然的に \tilde{A} 以上である可能性 ($* = 2U$)
- \tilde{B} が可能的に \tilde{A} 以上である必然性 ($* = 3L$)
- \tilde{A} が可能的に \tilde{B} 以下である必然性 ($* = 3U$)
- $\begin{cases} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{cases}$ が可能的に $\begin{cases} \tilde{B} \text{ 以下である} \\ \tilde{A} \text{ 以上である} \end{cases}$ 可能性 ($* = 4$)

として解釈できる．また，一般に正規ファジィ集合 \tilde{A}, \tilde{B} に対しては

$$\begin{aligned} \mu_{\succeq_C}^{(1)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &\leq \mu_{\succeq_C}^{(2L)}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\succeq_C}^{(3L)}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\succeq_C}^{(4)}(\tilde{A}, \tilde{B}), \\ \mu_{\succeq_C}^{(1)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &\leq \mu_{\succeq_C}^{(2U)}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\succeq_C}^{(3U)}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\succeq_C}^{(4)}(\tilde{A}, \tilde{B}) \end{aligned}$$

が成り立つことが示せる．

3 ファジィ集合の比較指標の特徴付け

本節では，可能性理論に基づくファジィ集合の比較指標（定義 2）の新たな特徴付けとして，集合関係（定義 1）との関連性を記述する三つの結果（定理 1, 2 と系 1）を与える．

定理 1. $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \mu_{\succeq_C}^{(1)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(1)} [\tilde{B}]_{1-\alpha} \right\}, \\ \mu_{\succeq_C}^{(2L)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid [\tilde{A}]_{\alpha} \preceq_C^{(2L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha} \right\}, \\ \mu_{\succeq_C}^{(2U)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(2U)} [\tilde{B}]_{\alpha} \right\}, \\ \mu_{\succeq_C}^{(3L)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid [\tilde{A}]_{\alpha} \preceq_C^{(3L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha} \right\}, \\ \mu_{\succeq_C}^{(3U)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(3U)} [\tilde{B}]_{\alpha} \right\}, \\ \mu_{\succeq_C}^{(4)}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid [\tilde{A}]_{\alpha} \preceq_C^{(4)} [\tilde{B}]_{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

ただし， $\sup \emptyset := 0$ とする．

この一つ目の結果では，ファジィ集合 \tilde{A}, \tilde{B} に関する仮定を特に必要としない．以下の凸錐に依存する定義 ([3]) を利用して仮定を加えることで，より直接的な結論を述べた二つ目の結果が得られる：

- 集合 $A \in \mathcal{P}(Z)$ が C -コンパクト $:\iff \{O_s + C\}_{s \in S}$ (O_s は開集合) の形の A の任意の被覆が有限部分被覆をもつ．
- ファジィ集合 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(Z)$ が C -コンパクト $:\iff$ 任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して $[\tilde{A}]_{\alpha}$ が C -コンパクト．

- 集合値写像 $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ (X は位相空間) が
 - ◇ $x_0 \in X$ で C -上連続 $:\iff F(x_0) \subset O$ を満たす任意の開集合 O に対して, x_0 の近傍 U が存在して, 全ての $x \in U$ について $F(x) \subset O + C$.
 - ◇ $x_0 \in X$ で C -下連続 $:\iff F(x_0) \cap O \neq \emptyset$ を満たす任意の開集合 O に対して, x_0 の近傍 U が存在して, 全ての $x \in U$ について $F(x) \cap (O - C) \neq \emptyset$.
 - ◇ C -上連続 $:\iff F$ が任意の $x \in X$ で C -上連続.
 - ◇ C -下連続 $:\iff F$ が任意の $x \in X$ で C -下連続.

定理 2. Z を局所凸空間, C を閉凸錐, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$, $\alpha \in (0, 1]$ とする.

- \tilde{A} の切断写像が $(-C)$ -下連続, \tilde{B} の切断写像が C -下連続ならば

$$\mu_{\simeq_C^{(1)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(1)} [\tilde{B}]_{1-\alpha}.$$

- \tilde{A} が C -コンパクト, \tilde{A} の切断写像が C -上連続, \tilde{B} の切断写像が C -下連続ならば

$$\mu_{\simeq_C^{(2L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_\alpha \preceq_C^{(2L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha},$$

$$\mu_{\simeq_C^{(3L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_\alpha \preceq_C^{(3L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha}.$$

- \tilde{A} の切断写像が $(-C)$ -下連続, \tilde{B} が $(-C)$ -コンパクト, \tilde{B} の切断写像が $(-C)$ -上連続ならば

$$\mu_{\simeq_C^{(2U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(2U)} [\tilde{B}]_\alpha,$$

$$\mu_{\simeq_C^{(3U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(3U)} [\tilde{B}]_\alpha.$$

- \tilde{A} が C -コンパクト, \tilde{A} の切断写像が C -上連続, \tilde{B} が $(-C)$ -コンパクト, \tilde{B} の切断写像が $(-C)$ -上連続ならば

$$\mu_{\simeq_C^{(4)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_\alpha \preceq_C^{(4)} [\tilde{B}]_\alpha.$$

この定理の仮定は適切なものであるが, やや扱いづらさがある. そこで, 下の命題を利用することで仮定をより簡潔なものに置き換えたのが, 三つ目の結果である.

命題 1. $\tilde{A} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して, 次が成り立つ:

- \tilde{A} がコンパクト $\implies \tilde{A}$ は C -コンパクト.
- \tilde{A} がコンパクト $\implies \tilde{A}$ の切断写像は C -上連続.
- \tilde{A} が正規かつ狭義凸 $\implies \tilde{A}$ の切断写像は C -下連続.

系 1. Z を局所凸空間, C を閉凸錐, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$, $\alpha \in (0, 1]$ とする.

- \tilde{A}, \tilde{B} が正規かつ狭義凸ならば

$$\mu_{\succeq_C^{(1)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(1)} [\tilde{B}]_{1-\alpha}.$$

- \tilde{A} がコンパクト, \tilde{B} が正規かつ狭義凸ならば

$$\mu_{\succeq_C^{(2L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_\alpha \preceq_C^{(2L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha},$$

$$\mu_{\succeq_C^{(3L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_\alpha \preceq_C^{(3L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha}.$$

- \tilde{A} が正規かつ狭義凸, \tilde{B} がコンパクトならば

$$\mu_{\succeq_C^{(2U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(2U)} [\tilde{B}]_\alpha,$$

$$\mu_{\succeq_C^{(3U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_{1-\alpha} \preceq_C^{(3U)} [\tilde{B}]_\alpha.$$

- \tilde{A}, \tilde{B} がコンパクトならば

$$\mu_{\succeq_C^{(4)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha \iff [\tilde{A}]_\alpha \preceq_C^{(4)} [\tilde{B}]_\alpha.$$

4 ファジィ最適化への応用

最後に, 系 1 をファジィ最適化問題へと応用した結果を紹介する.

空でない集合 X , ファジィ集合値写像 $\tilde{F}: X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ に対して, ファジィ最適化問題

$$(FOP) \quad \begin{cases} \text{minimize} & \tilde{F}(x) \\ \text{subject to} & x \in X \end{cases}$$

を考える. その上で, 集合最適化問題

$$(SOP) \quad \begin{cases} \text{minimize} & F(x) \\ \text{subject to} & x \in X \end{cases}$$

($F: X \rightarrow \mathcal{P}(Z)$) に対して用いられる次の解概念を参考に, (FOP) の解概念を定義する.

定義 3 ([4, 9]). \preceq を $\mathcal{P}(Z)$ 上の二項関係とする. $\bar{x} \in X$ が \preceq に関する (SOP) の

- 最適解 : $\iff \forall x \in X: (F(x) \preceq F(\bar{x}) \implies F(\bar{x}) \preceq F(x))$.
- 強最適解 : $\iff \forall x \in X \setminus \{\bar{x}\}: F(\bar{x}) \preceq F(x)$.
- 狭義最適解 : $\iff \nexists x \in X \setminus \{\bar{x}\}: F(x) \preceq F(\bar{x})$.

定義 4. \succeq を $\mathcal{F}(Z)$ 上のファジィ関係, $\alpha \in (0, 1]$ とする. $\bar{x} \in X$ が \succeq に関する (FOP) の

- α -最適解 : $\iff \forall x \in X : \left(\mu_{\preceq}(\tilde{F}(x), \tilde{F}(\bar{x})) \geq \alpha \implies \mu_{\preceq}(\tilde{F}(\bar{x}), \tilde{F}(x)) \geq \alpha \right)$.
- α -強最適解 : $\iff \forall x \in X \setminus \{\bar{x}\} : \mu_{\preceq}(\tilde{F}(\bar{x}), \tilde{F}(x)) \geq \alpha$.
- α -狭義最適解 : $\iff \nexists x \in X \setminus \{\bar{x}\} : \mu_{\preceq}(\tilde{F}(x), \tilde{F}(\bar{x})) \geq \alpha$.

さらに, (FOP) に関わる二つの集合最適化問題

$$\begin{aligned} (\text{SOP})'_\beta & \begin{cases} \text{minimize} & [\tilde{F}(x)]_\beta \\ \text{subject to} & x \in X, \end{cases} \\ (\text{SOP})''_\beta & \begin{cases} \text{minimize} & \left([\tilde{F}(x)]_\beta, [\tilde{F}(x)]_{1-\beta} \right) \\ \text{subject to} & x \in X \end{cases} \end{aligned}$$

($\beta \in [0, 1]$) と, 集合関係の $\mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z)$ 上への拡張

$$(A_1, A_2) \hat{\preceq}_C^{(*)} (B_1, B_2) : \iff A_1 \preceq_C^{(*)} B_2$$

(* = 2L, 2U, 3L, 3U) を与える. このとき, 系 1 より次の定理が得られる. これは, それぞれ対応するファジィ最適化問題を解くことと集合最適化問題を解くことの等価性を示している.

定理 3. Z を局所凸空間, C を閉凸錐, $\alpha \in (0, 1]$, $\bar{x} \in X$ とする.

- 全ての $x \in X$ について $\tilde{F}(x)$ が正規かつ狭義凸ならば, 次は同値 :
 - ◇ \bar{x} が $\preceq_C^{(1)}$ に関する (FOP) の α - (強・狭義) 最適解.
 - ◇ \bar{x} が $\preceq_C^{(1)}$ に関する $(\text{SOP})'_{1-\alpha}$ の (強・狭義) 最適解.
- 全ての $x \in X$ について $\tilde{F}(x)$ がコンパクトかつ正規かつ狭義凸ならば, 各 * = 2L, 3L に対して, 次は同値 :
 - ◇ \bar{x} が $\preceq_C^{(*)}$ に関する (FOP) の α - (強・狭義) 最適解.
 - ◇ \bar{x} が $\hat{\preceq}_C^{(*)}$ に関する $(\text{SOP})''_\alpha$ の (強・狭義) 最適解.
- 全ての $x \in X$ について $\tilde{F}(x)$ がコンパクトかつ正規かつ狭義凸ならば, 各 * = 2U, 3U に対して, 次は同値 :
 - ◇ \bar{x} が $\preceq_C^{(*)}$ に関する (FOP) の α - (強・狭義) 最適解.
 - ◇ \bar{x} が $\hat{\preceq}_C^{(*)}$ に関する $(\text{SOP})''_{1-\alpha}$ の (強・狭義) 最適解.
- 全ての $x \in X$ について $\tilde{F}(x)$ がコンパクトならば, 次は同値 :
 - ◇ \bar{x} が $\preceq_C^{(4)}$ に関する (FOP) の α - (強・狭義) 最適解.
 - ◇ \bar{x} が $\preceq_C^{(4)}$ に関する $(\text{SOP})'_\alpha$ の (強・狭義) 最適解.

参考文献

- [1] M. Brunelli and J. Mezei, *How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study*, Int. J. Approx. Reason. **54** (2013), 627–639.
- [2] D. Dubois and H. Prade, *Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory*, Inform. Sci. **30** (1983), 183–224.
- [3] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer, New York, 2003.
- [4] T.X.D. Ha, *Some variants of the Ekeland variational principle for a set-valued map*, J. Optim. Theory Appl. **124** (2005), 187–206.
- [5] K. Ike and T. Tanaka, *Convex-cone-based comparisons of and difference evaluations for fuzzy sets*, Optimization **67** (2018), 1051–1066.
- [6] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and Y. Kume, *Some properties of extended fuzzy preference relations using modalities*, Inform. Sci. **61** (1992), 187–209.
- [7] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and Y. Kume, *Modality constrained programming problems: a unified approach to fuzzy mathematical programming problems in the setting of possibility theory*, Inform. Sci. **67** (1993), 93–126.
- [8] M. Inuiguchi, J. Ramík, T. Tanino, and M. Vlach, *Satisficing solutions and duality in interval and fuzzy linear programming*, Fuzzy Sets Syst. **135** (2003), 151–177.
- [9] J. Jahn and T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. **148** (2011), 209–236.
- [10] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1487–1496.
- [11] T. Maeda, *On characterization of fuzzy vectors and its applications to fuzzy mathematical programming problems*, Fuzzy Sets Syst. **159** (2008), 3333–3346.
- [12] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. Control **8** (1965), 338–353.
- [13] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*, Fuzzy Sets Syst. **1** (1978), 3–28.