集合最適化問題における共役双対性

(Conjugate duality in set optimization problem)

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
荒谷　洋輔 (Araya, Yousuke) *

1　はじめに

最適化問題における「双対性理論」とは、線形計画、多目的計画、離散凸解析などの分野で主問題とその双対問題の関係および集合や関数の双対関係を説明する重要な基礎理論のことである。双対問題を考えるメリットの一つとして最適性の簡単な証拠を提示できるというのがある。双対性理論は共役関数やラグランジュ関数の性質に基づいていて、鞍点定理やミニマックス定理と密接に関係しており、工学における制御理論や経済学のゲーム理論など実に幅広い応用がある。

H を Hilbert 空間、$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper な拡張実数値関数とする。そのとき、f の共役関数 $f^* : H \to (-\infty, \infty]$ と双共役関数 $f^{**} : H \to (-\infty, \infty]$ を以下で定義する。

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in H} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

$$f^{**}(x) := \sup_{x^* \in H} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\}$$

次の結果は、共役双対性の理論で最も基本的なものである。

定理 1.1 (弱双対定理 [28]). *H を Hilbert 空間とする。$f : H \to (-\infty, \infty]$ は proper であり、かつ $f^* : H \to (-\infty, \infty]$ も proper であるとする。そのとき、$f^{**} : H \to (-\infty, \infty]$ は下半連続な凸関数である。さらに、$f^{**} \leq f$ である。*

定理 1.2 (強双対定理 [28]). *H を Hilbert 空間、$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする。そのとき、$f^{**} = f$ である。*

共役双対性を多目的最適化問題へ拡張する研究は 1980 年代あたりから盛んに研究され、Bot-Grad-Wanka[5] が決定版に近い内容である。しかし、上記の弱双対定理に相当する結果は、十分満足できるものではないと筆者は考えている。その理由（問題の困難性）は、ベクトル値関数の共役写像は集合値写像になるので、ベクトル値関数 f とその双共役写像 f^{**} が直接比較できないからである。

そこで、本稿は集合最適化の枠組みで共役双対性の議論をする。まず、集合関係とその劣線形スカラー関数を導入する。次に、集合最適化問題の枠組みで共役写像と双共役写像の新しい定義を提案する。新しい共役写像の定義から、集合最適化問題におけるいくつかの弱双対定理を導く。最後に、集合のスカラー化手法と弱双対定理を組み合わせることにより、強双対定理を導く。

*(*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では Y を Hilbert 空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の代数的内部、位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{cor}A$、$\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。つまり、以下の条件を満たす。

(a) $\mathrm{cl}C = C$、

(b) $C + C \subseteq C$、

(c) $\lambda C \subseteq C\ \forall\lambda \in [0, \infty)$。

尚、錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\iff} y_2 - y_1 \in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。

2.2　集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、２つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \qquad\qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

そのとき $\mathcal{V}$ は、$\{\mathbf{0}_Y\}$ を零ベクトルとするベクトル空間であることが確かめられる。

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[21], Jahn-Ha[12])**.** Y を線形位相空間、$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合の族とする。$A,\, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

[**lower**]　$A \leq_C^l B$　by　$B \subset A + C$　　(**type 3**)

[**upper**]　$A \leq_C^u B$　by　$A \subset B - C$　　(**type 5**)

[**lower** & **upper**]　$A \leq_C^{l\&u} B$　by　$B \subset A + C$　and　$A \subset B - C$

命題 2.2 ([3])**.** $A,\, B \in \mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l\&u} B \quad\Longrightarrow\quad A \leq_C^l B$、

(ii) $A \leq_C^{l\&u} B \quad\Longrightarrow\quad A \leq_C^u B$、

(iii) $A \leq_C^l B$ と $A \leq_C^u B$ は比較できない。

注意 1. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して

$$y - x \in C\ (x \leq_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

である。一方、集合順序の場合、$A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上記の真ん中と右の順序に対応する $B \subset A + C$ $(A \leq_C^l B)$ と $A \subset B - C$ $(A \leq_C^u B)$ は一般に異なる（[1] を参照)。

例 1. 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y=\mathbb{R},\quad C=\mathbb{R}_+:=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\},\qquad A=[a_1,a_2],\quad B=[b_1,b_2]\quad (a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R})$$

このとき、$\leq_C^l$、$\leq_C^u$、$\leq_C^{l\&u}$ について次が分かる。([12] 参照)

$$A\leq_C^l B \iff a_1\leq b_1,\qquad\qquad A\leq_C^u B \iff a_2\leq b_2$$

$$A\leq_C^{l\&u} B \iff a_1\leq b_1 \quad \text{and} \quad a_2\leq b_2$$

命題 2.3 ([1, 2])**.** $A,B,D\in\mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A\leq_C^{l[u]} B \quad\Longrightarrow\quad (A+D)\leq_C^{l[u]}(B+D)$、

(ii) $A\leq_C^{l[u]} B \quad\Longrightarrow\quad \alpha A\leq_C^{l[u]}\alpha B$ ($\alpha\geq 0$)、

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

定義 2.4 (C-proper：Hernandez-Rodriguez-Marin[10])**.** $A\in\mathcal{V}$ が C-proper $[(-C)$-proper$]$ であるとは、$A+C\neq Y[A-C\neq Y]$ が成り立つときである。また、$\mathcal{V}_C[\mathcal{V}_{-C}]$ を Y の C-proper $[(-C)$-proper$]$ である部分集合の族とする。

定義 2.5 (C-closed：Luc[25])**.** $A\in\mathcal{V}$ が C-closed $[(-C)$-closed$]$ であるとは、$A+C$ $[A-C]$ が閉集合であることと定義する。

注意 2. ベクトル順序 $\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ は明らかに異なる。しかし、集合における順序の場合について、$\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ が同値になることもある。よって、$\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ を区別したいとき、集合 A に C-closed の仮定が必要となる([1] を参照)。

定義 2.6. $V_1,V_2\in\mathcal{V}$ とする。$\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する([3] を参照)。

$$V_1\sim_l V_2\iff V_1\leq_C^l V_2\quad\text{and}\quad V_2\leq_C^l V_1$$

$$V_1\sim_u V_2\iff V_1\leq_C^u V_2\quad\text{and}\quad V_2\leq_C^u V_1$$

$$V_1\sim_{l\&u} V_2\iff V_1\leq_C^{l\&u} V_2\quad\text{and}\quad V_2\leq_C^{l\&u} V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$、$[\cdot]^{l\&u}$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A\in[B]^l\Leftrightarrow A+C=B+C$$

$$A\in[B]^u\Leftrightarrow A-C=B-C$$

$$A\in[B]^{l\&u}\Leftrightarrow A+C=B+C\quad\text{and}\quad A-C=B-C$$

定義 2.7 ([2, 3])**.** $\mathcal{S}\subset\mathcal{V}$ とする。$A\in\mathcal{S}$ が $l[u,\,l\&u]$-minimal element であるとは、任意の $B\in\mathcal{S}$ について

$$B\leq_C^{l[u,l\&u]} A\quad\Longrightarrow\quad A\leq_C^{l[u,l\&u]} B$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の $l[u,l\&u]$-minimal element の族を $l[u,l\&u]$-Min$(\mathcal{S},C)$ と書く。同様にして、$A\in\mathcal{S}$ が maximal element であるとは、任意の $B\in\mathcal{S}$ について

$$A\leq_C^{l[u,l\&u]} B\quad\Longrightarrow\quad B\leq_C^{l[u,l\&u]} A$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の maximal element の族を $l[u,l\&u]$-Max$(\mathcal{S},C)$ と書く。

3　集合のスカラー化

Gerth(Tammer) と Weidner は次の劣線形スカラー化関数を導入した。この関数を導入する理由は、ベクトル最適化問題で重要な課題である Pareto 最適解の存在性について、下記のスカラー化関数を用いて過不足なく特徴づけできるためである。

補題 3.1 ([6]). $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。$\varphi_{C,k^0} : Y \to (-\infty, \infty]$、$\psi_{C,k^0} : Y \to [-\infty, \infty)$ を次で定義する。

$$\varphi_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \leq_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 - C\}$$

$$\psi_{C,k^0}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + C\}$$

この時、関数 φ_{C,k^0} は次の 6 つの性質をもつ。

(i) $\mathrm{dom}\varphi_{C,k^0} := \{y \in Y | \varphi_{C,k^0}(y) < \infty\} \neq \emptyset$、任意の $y \in Y$ に対して $\varphi_{C,k^0}(y) > -\infty$、

(ii) $\{y \in Y | \varphi_{C,k^0}(y) \leq t\} = tk^0 - C$、

(iii) φ_{C,k^0} は下半連続 (任意の $t \in R$ に対して、$\{y \in Y | \varphi_{C,k^0}(y) \leq t\}$ が閉集合)、

(iv) φ_{C,k^0} は $\leq_C$-単調 ($y_1 \leq_C y_2$ なら $\varphi_{C,k^0}(y_1) \leq \varphi_{C,k^0}(y_2)$)、

(v) 任意の $y \in Y$、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi_{C,k^0}(y + \lambda k^0) = \varphi_{C,k^0}(y) + \lambda$、

(vi) φ_{C,k^0} は劣加法的 (任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対して、$\varphi_{C,k^0}(y_1 + y_2) \leq \varphi_{C,k^0}(y_1) + \varphi_{C,k^0}(y_2)$)。

また、$\psi_{C,k^0}(y) = -\varphi_{C,k^0}(-y)$ も分かる。

3.1　集合に対するスカラー化関数

ここで、ベクトルに対するスカラー化関数 $\varphi_{C,k^0}, \psi_{C,k^0}$ を集合の場合に拡張してみる。集合の場合は順序が $\leq_C^l$、$\leq_C^u$、$\leq_C^{l\&u}$ の 3 通りあるので、inf 型、sup 型それぞれ 2 通りの合計 6 通りを考える。$\inf\emptyset = \infty$ と $\sup\emptyset = -\infty$ を認めることにより、$h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^{l\&u}_{\inf} : \mathcal{V} \to (-\infty, \infty]$ と $h^l_{\sup}, h^u_{\sup}, h^{l\&u}_{\sup} : \mathcal{V} \to [-\infty, \infty)$ を次のように定義する。

$$h^l_{\inf}(V) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, V \leq^l_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V + C\}$$

$$h^u_{\inf}(V) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V \leq^u_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V \subset tk^0 - C\}$$

$$h^{l\&u}_{\inf}(V) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, V \leq^{l\&u}_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V + C \quad \text{and} \quad V \subset tk^0 - C\}$$

$$h^l_{\sup}(V) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, tk^0 \leq^l_C V\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V \subset tk^0 + C\}$$

$$h^u_{\sup}(V) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq^u_C V\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V - C\}$$

$$h^{l\&u}_{\sup}(V) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, tk^0 \leq^{l\&u}_C V\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V \subset tk^0 + C \quad \text{and} \quad \{tk^0\} \subset V - C\}$$

集合のスカラー化についての重要な先行研究は、Hamel-Löhne [8]、Hernández-Rodríguez-Marín [10]、桑野-田中-山田 [22]、前田 [26]、Sach [27] などがあり、研究史の詳細は [1, 2] にある。近年の文献は、Köbis.et.al[18, 19, 20]、Karaman.et.al[13, 14] などがあり、盛んに研究されている分野の一つである。

命題 3.2 ([2, 3])**.** 上記のスカラー化関数の関係について、次が分かる。

(i) $h^l_{\inf}(V) \leq h^u_{\inf}(V) = h^{l\&u}_{\inf}(V) \quad and \quad h^{l\&u}_{\sup}(V) = h^l_{\sup}(V) \leq h^u_{\sup}(V)$

(ii) $h^l_{\sup}(V) = -h^u_{\inf}(-V) \quad and \quad h^u_{\sup}(V) = -h^l_{\inf}(-V)$

(iii) $h^{l\&u}_{\sup}(V) = -h^{l\&u}_{\inf}(-V)$

l 型と u 型は、双対の関係になっている。よって、l 型と u 型についての集合に対するスカラー化関数は、ベクトルの場合とは異なり、$h^l_{\inf}$ と $h^u_{\inf}$ の２つを調べる必要がある。

定理 3.3 ([1, 2])**.** スカラー化関数 $h^l_{\inf} : \mathcal{V}_C \to (-\infty, \infty]$ は次の性質をもつ。

(i) $h^l_{\inf} > -\infty$、

(ii) $h^l_{\inf}$ は $\leq^l_C$-増加、

(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $h^l_{\inf}(V + \lambda k^0) = h^l_{\inf}(V) + \lambda$、

(iv) $\hat{V} \in [V]^l \Longrightarrow h^l_{\inf}(\hat{V}) = h^l_{\inf}(V)$、

(v) $h^l_{\inf}$ は劣線形。

定理 3.4 ([1, 2])**.** スカラー化関数 $h^u_{\inf} : \mathcal{V} \to (-\infty, \infty]$ は次の性質をもつ。

(i) $h^u_{\inf} > -\infty$、

(ii) $h^u_{\inf}$ は $\leq^u_C$-増加、

(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $h^u_{\inf}(V + \lambda k^0) = h^u_{\inf}(V) + \lambda$、

(iv) $\hat{V} \in [V]^u \Longrightarrow h^u_{\inf}(\hat{V}) = h^u_{\inf}(V)$、

(v) $h^u_{\inf}$ は劣線形。

4 主な結果

この節では、まずベクトル値関数 f の共役関数について振り返る。

定義 4.1 (谷野-椹木 [29, 30, 31])**.** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をベクトル値関数とするとき、f の共役関数 $f^* : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$f^*(A) := \mathrm{Max}\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{Ax - f(x)\}; \mathbb{R}^m_+\right)$$

定義 4.2 (谷野-椹木 [29, 30, 31])**.** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をベクトル値関数、$f^* : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathcal{V}$ を f の共役関数とする。演算 $f \to f^*$ を f^* に対して繰り返すことにより、f の双共役関数 $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$f^{**}(x) := \mathrm{Max}\left(\bigcup_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}} \{Ax - f^*(A)\}; \mathbb{R}^m_+\right)$$

しかし、一般的には $f^*(A)$ は集合値写像になる。実数値関数の共役関数にある性質「$f^{**} \leq f$」を拡張するためには、どうしても集合同士の比較が必要となる。この問題の解決のため、川崎 [15, 16] は $\mathcal{V}$ に集合関係を導入した。川崎は、さらに共役関係と Γ^n-regularization という概念を導入することにより、多目的最適化問題における双対定理を得た。

私たちは、f に対して新しい双共役関数を定義した。

定義 4.3 (荒谷-鈴木-斉藤-木村 [4]). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をベクトル値関数、$f^* : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathcal{V}$ を f の共役関数とする。$f^*(A) \neq \emptyset$ に対して、 f の双共役関数 $f_l^{**}, f_u^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$f_l^{**}(x) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}} [Ax - f^*(A)], \mathbb{R}^m_+\right)$$
$$f_u^{**}(x) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}} [Ax - f^*(A)], \mathbb{R}^m_+\right)$$

（双共役関数の定義についての背景）

筆者の知る限りでは、川崎 [15, 16] がベクトル最適化問題に集合関係を導入した最初の論文である。川崎先生は独自に集合関係を提唱していて、反対称律を仮定に入れているのが特徴である。しかし、ベクトル順序を自然な形で拡張した集合関係 [21, 12] において、反対称律を満たすものは少ない。($\leq_C^l$、$\leq_C^l$、$\leq_C^{l\&u}$ は、反対称律を満たさない：本稿 2 章参照のこと）そこで、集合関係で最もスタンダードなものと現在では多くの研究者に認識されている l 型・u 型ではどうなるのかという疑問から上記の定義に至った。

4.1 集合値写像における共役関係

本稿では、[4, 15, 16, 29, 30, 31] を参考にして集合値写像の共役写像と双共役写像を定義する。

定義 4.4 ([2]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像とする。そのとき、F の共役写像 $F_l^*, F_u^* : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F_l^*(T) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{x\in X} [Tx - F(x)], C\right)$$
$$F_u^*(T) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{x\in X} [Tx - F(x)], C\right)$$

定義 4.5 ([2]). $F_l^*(T) \neq \emptyset$、$F_u^*(T) \neq \emptyset$ とする。そのとき、F の双共役写像 $F_{ll}^{**}, F_{lu}^{**}, F_{ul}^{**}, F_{uu}^{**} : X \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F_{ll}^{**}(x) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{T\in\mathcal{L}(X,Y)} [Tx - F_l^*(T)], C\right)$$
$$F_{lu}^{**}(x) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{T\in\mathcal{L}(X,Y)} [Tx - F_u^*(T)], C\right)$$
$$F_{ul}^{**}(x) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{T\in\mathcal{L}(X,Y)} [Tx - F_l^*(T)], C\right)$$
$$F_{uu}^{**}(x) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{T\in\mathcal{L}(X,Y)} [Tx - F_u^*(T)], C\right)$$

上記と同様にして、$\leq_C^{l\&u}$ についての共役写像を定義する。

定義 4.6 ([3]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像とする。そのとき、F の共役写像 $F^*_{l\&u} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F^*_{l\&u}(T) := l\&u\text{-Max}\left(\bigcup_{x\in X}[Tx - F(x)], C\right)$$

$F^*_{l\&u}(T) \neq \emptyset$ とする。そのとき、F の双共役写像 $F^{**}_{l\&u} : X \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F^{**}_{l\&u}(x) := l\&u\text{-Max}\left(\bigcup_{T\in\mathcal{L}(X,Y)}[Tx - F^*_{l\&u}(T)], C\right)$$

Bot-Grad-Wanka[5] の手法を参考にしながら、私たちは新たな共役写像の定義を提案する。この定義は方向ベクトル $k^0 \in \mathrm{int}C$ に依存しており、３章で導入した集合のスカラー化関数と相性はとても良い。

定義 4.7 ([2]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。そのとき、F の共役写像 $F^*_{k^0,l}, F^*_{k^0,u} : X \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F^*_{k^0,l}(x^*) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{x\in X}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F(x)], C\right)$$

$$F^*_{k^0,u}(x^*) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{x\in X}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F(x)], C\right)$$

定義 4.8 ([2]). $k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。$F^*_{k^0,l}(x^*) \neq \emptyset$、$F^*_{k^0,u}(x^*) \neq \emptyset$ に対して、F の双共役写像 $F^{**}_{k^0,ll}$, $F^{**}_{k^0,lu}$, $F^{**}_{k^0,ul}$, $F^{**}_{k^0,uu} : X \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F^{**}_{k^0,ll}(x) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{x^*\in X^*}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F^*_{k^0,l}(x^*)], C\right)$$

$$F^{**}_{k^0,lu}(x) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{x^*\in X^*}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F^*_{k^0,u}(x^*)], C\right)$$

$$F^{**}_{k^0,ul}(x) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{x^*\in X^*}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F^*_{k^0,l}(x^*)], C\right)$$

$$F^{**}_{k^0,uu}(x) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{x^*\in X^*}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F^*_{k^0,u}(x^*)], C\right)$$

定義 4.9 ([3]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。そのとき、F の共役写像 $F^*_{k^0,l\&u} : X \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F^*_{k^0,l\&u}(x^*) := l\&u\text{-Max}\left(\bigcup_{x\in X}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F(x)], C\right)$$

さらには、$F^*_{k^0,l\&u}(x^*) \neq \emptyset$ に対して、F の双共役写像 $F^{**}_{k^0,l\&u} : X \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$F^{**}_{k^0,l\&u}(x) := l\&u\text{-Max}\left(\bigcup_{x^*\in X^*}[\langle x, x^*\rangle k^0 - F^*_{k^0,l\&u}(x^*)], C\right)$$

共役写像の定義と３章の定理 3.3・3.4 を用いて、次を得る。

補題 4.10. 関数 $F^*_{k^0,l}, F^*_{k^0,u}, F^*_{k^0,l\&u}$ は、次の性質を持つ。

- $h^l_{\inf}(F^*_{k^0,l}(x^*)) = \sup_{x\in X}\{\langle x, x^*\rangle - h^l_{\inf}(F(x))\}$
- $h^u_{\inf}(F^*_{k^0,u}(x^*)) = \sup_{x\in X}\{\langle x, x^*\rangle - h^u_{\inf}(F(x))\}$
- $h^u_{\inf}(F^*_{k^0,l\&u}(x^*)) = \sup_{x\in X}\{\langle x, x^*\rangle - h^u_{\inf}(F(x))\}$

4.2 弱双対定理

まず、ベクトル値関数の場合の弱双対定理を紹介する。

命題 4.11 (荒谷-鈴木-斉藤-木村 [4]). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をベクトル値関数とする。そのとき、f の双共役関数は次の性質を持つ。

(a) もし任意の $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して $f^*(A)$ が単元集合ならば、 $f^{**}(x) \leq^{w}_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。

(b) もし任意の $x \in \mathbb{R}^n$、$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して $f^*(A)$ が $f^*(A) \subset Ax - f(x) + \mathbb{R}^m_+$ を満たすならば、$f^{**}_l(x) \leq^{l}_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。

(c) もし任意の $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して $f^*(A)$ が $f^*(A) - f^*(A) \subset -\mathbb{R}^m_+$ を満たすならば、$f^{**}_u(x) \leq^{u}_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。

[4] では集合関係を用いて、f^{**} と f を比較することができたが、何らかの条件が必要であった。集合値写像の場合については、前節の共役写像の定義から以下のようにいくつかの弱双対定理を得ることができる。

定理 4.12 (弱双対定理 I [2]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像とする。そのとき、 F の双共役写像は次の性質を持つ。

(a) もし、F が任意の $x \in X$ に対して $F(x) - F(x) \subset C$ が成り立つならば、$F^{**}_{ll}(x) \leq^{l}_{C} F(x)$。

(b) $F^{**}_{lu}(x) \leq^{l}_{C} F(x)$。

(c) $F^{**}_{ul}(x) \leq^{u}_{C} F(x)$。

(d) もし、$F^*_u(T)$ が任意の $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ に対して $F^*_u(T) - F^*_u(T) \subset -C$ が成り立つならば、$F^{**}_{uu}(x) \leq^{u}_{C} F(x)$。

上記の集合値の弱双対定理で、実数値の「$f^{**} \leq f$」に相当する結果は得られた。しかし、集合関係によっては、F、F^{**} に何らかの仮定を入れなければならない所は上記の [4] と同じである。
しかし、集合関係 $l\&u$ を用いると、条件不要のきれいな結果が得られる。

定理 4.13 (弱双対定理 II [3]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像とする。そのとき、 F の双共役写像は次の性質を持つ。

$$F^{**}_{l\&u}(x) \leq^{l\&u}_{C} F(x)$$

Proof. $F^*_{l\&u}$ の定義から、任意の $x \in X$ と $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ に対して次が成り立つ。

$$Tx - F(x) \leq^{l}_{C} F^*_{l\&u}(T) \qquad \text{and} \qquad Tx - F(x) \leq^{u}_{C} F^*_{l\&u}(T)$$

$$(F^*_{l\&u}(T) \subset Tx - F(x) + C \qquad \text{and} \qquad Tx - F(x) \subset F^*_{l\&u}(T) - C)$$

そのとき、次の包含関係が成り立つ。

$$Tx - F^*_{l\&u}(T) \subset F(x) - C \qquad \text{and} \qquad F(x) \subset Tx - F^*_{l\&u}(T) + C$$

上記の包含関係は、$Tx - F^*_{l\&u}(T) \leq^{u}_{C} F(x)$ と $Tx - F^*_{l\&u}(T) \leq^{l}_{C} F(x)$ を意味する。$F^{**}_{l\&u}$ の定義から、結論を得る。 □

上記と同様にして、Bot-Grad-Wanka 型の共役写像についても弱双対定理を得ることができる。

定理 4.14 (弱双対定理 III [2]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。そのとき、 F の双共役写像は次の性質を持つ。

(a) もし、F が任意の $x \in X$ に対して $F(x) - F(x) \subset C$ が成り立つならば、$F^{**}_{k^0,ll}(x) \leq^l_C F(x)$。

(b) $F^{**}_{k^0,lu}(x) \leq^l_C F(x)$。

(c) $F^{**}_{k^0,ul}(x) \leq^u_C F(x)$。

(d) もし、$F^*_{k^0,u}(x^*)$ が任意の $x^* \in X^*$ に対して $F^*_{k^0,u}(x^*) - F^*_{k^0,u}(x^*) \subset -C$ が成り立つならば、$F^{**}_{k^0,uu}(x) \leq^u_C F(x)$。

定理 4.15 (弱双対定理 IV [3]). $F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。そのとき、 F の双共役写像は次の性質を持つ。

$$F^{**}_{k^0,l\&u}(x) \leq^{l\&u}_C F(x)$$

4.3 強双対定理

最初に、集合値写像の凸性と下半連続性の概念を定義する。

定義 4.16. K をベクトル空間 X の凸集合とする。集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が K 上で l-C-凸関数 [u-C-凸関数、$l\&u$-C-凸関数] であるとは、それぞれの $x_1, x_2 \in K$、$\lambda \in [0, 1]$ に対して、次が成り立つときである。

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq^{l[u,l\&u]}_C \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2)$$

定義 4.17. X を位相空間とする。

(i) 集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が X で l-C-下半連続 (u-($-C$)-上半連続) であるとは、集合

$$\{x \in X | F(x) \leq^l_C V\} = \{x \in X | V \leq^u_{(-C)} F(x)\}$$

が任意の $V \in \mathcal{V}$ で閉集合であるときにいう。

(ii) 集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が X で u-C-下半連続 (l-($-C$)-上半連続) であるとは、集合

$$\{x \in X | F(x) \leq^u_C V\} = \{x \in X | V \leq^l_{(-C)} F(x)\}$$

が任意の $V \in \mathcal{V}$ で閉集合であるときにいう。

(iii) 集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が X で $l\&u$-C-下半連続 ($l\&u$-($-C$)-上半連続) であるとは、集合

$$\{x \in X | F(x) \leq^{l\&u}_C V\} = \{x \in X | V \leq^{l\&u}_{(-C)} F(x)\}$$

が任意の $V \in \mathcal{V}$ で閉集合であるときにいう。

上記の概念を用いて、次の結果を得る。

定理 4.18 ($F^{**}_{k^0,lu}$-type). $F : X \to \mathcal{V}_C$ を集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。次の条件を仮定する。

(i) F は、l-C-下半連続。

(ii) F は、l-C-凸関数。

そのとき、$h^l_{\inf}(F^{**}_{k^0,lu}) = h^l_{\inf}(F)$ が成り立つ。

注意 3. 上記の証明は、集合をスカラー化して実数値の結果を適用するという手法を取っている。具体的には、定理 3.3 の (ii)、(iii)、命題 3.2 (i)、補題 4.10 が重要な役割を果たしている。特に、命題 3.2 (i) が大きな制約であるため、この手法で $F^{**}_{k^0,ul}$ 型の強双対定理を導くことは難しい。別のアプローチで $F^{**}_{k^0,ul}$ 型の強双対定理が導けるかどうかは今後の課題である。

定理 4.18 と同様にして、次の結果を得る。

定理 4.19 ($F^{**}_{k^0,ll}$-type [2])**.** $F : X \to \mathcal{V}_C$ を集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。次の条件を仮定する。

(i) F は、l-C-下半連続。

(ii) F は、l-C-凸関数。

(iii) F は、任意の $x \in X$ に対して、$F(x) - F(x) \subset C$ が成り立つ。

そのとき、$h^l_{\inf}(F^{**}_{k^0,ll}) = h^l_{\inf}(F)$ が成り立つ。

定理 4.20 ($F^{**}_{k^0,uu}$-type [2])**.** $F : X \to \mathcal{V}$ を $(-C)$-有界な値をとる集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。次の条件を仮定する。

(i) F は、u-C-下半連続。

(ii) F は、u-C-凸関数。

(iii) $F^*_{k^0,u}(x^*)$ は、任意の $x^* \in X^*$ に対して、$F^*_{k^0,u}(x^*) - F^*_{k^0,u}(x^*) \subset -C$ が成り立つ。

そのとき、$h^u_{\inf}(F^{**}_{k^0,uu}) = h^u_{\inf}(F)$ が成り立つ。

定理 4.21 ($F^{**}_{k^0,l\&u}$-type [3])**.** $F : X \to \mathcal{V}$ を $(-C)$-有界な値をとる集合値写像、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。次の条件を仮定する。

(i) F は、$l\&u$-C-下半連続。

(ii) F は、$l\&u$-C-凸関数。

そのとき、$h^u_{\inf}(F^{**}_{k^0,l\&u}) = h^u_{\inf}(F)$ が成り立つ。

5 まとめと今後の課題

本稿では、まず、集合最適化問題の枠組みで新しい共役写像の定義を与えた。その新しい定義は、与えられたベクトル値関数に対して、その共役関数は集合値写像となることから着想を得ている。そこで、$\leq^l_C$、$\leq^u_C$、$\leq^{l\&u}_C$ に関する弱双対定理を与えた。特に $\leq^{l\&u}_C$ の結果は、集合値写像 F に仮定を入れることなく導出できる上に、例 1（区間の例）の実用的な面から、最も自然な結果であると筆者は考えている。さらに、4.2 節の弱双対定理と集合のスカラー化手法を利用することにより、方向ベクトル $k^0 \in \mathrm{int}C$ に依存する、集合値の強双対定理を得ることができた。

集合最適化問題における双対性理論の研究はあるが [7, 9, 11, 17, 23, 24]、歴史がとても浅いので、「共役双対性」に限っても今後の研究課題はいろいろある。

(a) 弱双対定理：4.2 節では、複数の型の弱双対定理を得ることができた。新たな型の弱双対定理の導出については、今後の課題である。

(b) 強双対定理 (I)：スカラー化手法について

- 本稿では、集合の劣線形スカラー化手法 [1, 2] を利用したが、方向ベクトル $k^0 \in \mathrm{int}C$ に依存することなく、強双対定理を得ることはできるのか？
- ul 型の強双対定理は本当に導出できないのか？もしかしたら、別のアプローチで導出できるのかも知れない。
- 集合のスカラー化手法は近年とても研究が盛んで、様々な興味深い結果が発表されている（[13, 14, 20]）。それらを利用した強双対定理はどうなるのか？

(c) 強双対定理 (II)：そもそも「適当な形」とは何か？

通常の強双対定理は「$F = F^{**}$」の形である。実際、川崎 [15, 16] は独自の集合関係を導入し、その集合関係で双対性を議論した。しかし、集合関係において「反対称律」を満たすものはほとんどない。（本稿で導入した、ベクトル順序の自然な拡張である $\leq_C^l$、$\leq_C^u$、$\leq_C^{l\&u}$ は反対称律を満たさない。）したがって、反対称律の「代用品」として、「$F^{**} = [F]^{l,u,l\&u}$」のような同値類を用いた結果も有力であると筆者は考えている。

上記のような「同値類を用いた結論」に違和感を持つ方もいるかも知れない。しかし、単調性を満たすスカラー化関数（$A, B \in \mathcal{V}$ とスカラー化関数 $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ が、$A \leq_C^{l[u,l\&u]} B \Longrightarrow f(A) \leq f(B)$ を満たす）について、同値類の定義から次が成り立つ。

$$A \in [B]^{l[u,l\&u]} \quad \Longrightarrow \quad f(A) = f(B)$$

よって、筆者は「同値類で表現した結果」も緩い意味での強双対定理の仲間として加えても良いと考えている。しかし、そのような結論を導くための十分条件については、全く分からないので、今後の課題である。（この話題については、島根大学の鈴木聡先生から似たようなコメントを頂きました。ありがとうございます。）

参考文献

[1] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 3821–3835.

[2] Y. Araya, *Conjugate duality in set optimization via nonlinear scalarization*, submitted.

[3] Y. Araya, *On some properties of conjugate relation and subdifferentials in set optimization problem*, submitted.

[4] Y. Araya, K. Suzuki, Y.Saito, Y. Kimura, *New sufficiency for global optimality and duality of multi-objective programming problems via underestimators*, submitted.

[5] R. I. Bot, S-M. Grad, G. Wanka, *Duality in vector optimization*, Vector Optimization. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[6] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York 2003.

[7] A. Hamel *A duality theory for set-valued functions. I. Fenchel conjugation theory*, Set-Valued Var. Anal. 17 (2009) 153–182.

[8] A. Hamel, A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7 (2006) 19–37.

[9] A. Hamel, A. Löhne, *Lagrange duality in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 161 (2014) 368–397.

[10] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 1–18.

[11] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Lagrangian duality in set-valued optimization*, J. Optim. Theory Appl. 134 (2007) 119–134.

[12] J. Jahn, T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148 (2011) 209–236.

[13] E. Karaman, I. Atasever Güvenç, M. Soyertem, D. Tozkan, M. Küçük, Y. Küçük, *A vectorization for nonconvex set-valued optimization*, Turkish J. Math. 42 (2018) 1815–1832.

[14] E. Karaman, M. Soyertem, I. Atasever Güvenç, D. Tozkan, M. Küçük, Y. Küçük, *Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization*, Positivity 22 (2018) 783–802.

[15] H. Kawasaki, *Conjugate relations and weak subdifferentials of relations*, Math. Oper. Res. 6 (1981) 593–607.

[16] H. Kawasaki, *A duality theorem in multiobjective nonlinear programming*, Math. Oper. Res. 7 (1982) 95–110.

[17] A. Khan, C. Tammer, C. Zălinescu, *Set-valued optimization. An introduction with applications*, Vector Optimization. Springer, Heidelberg, 2015.

[18] E. Köbis, M. A. Köbis, *Treatment of set order relations by means of a nonlinear scalarization functional: a full characterization*, Optimization 65 (2016) 1805–1827.

[19] E. Köbis, M. A. Köbis, J. Yao, *Generalized upper set less order relation by means of a nonlinear scalarization functional*, J. Nonlinear Convex Anal. 17 (2016) 725–734.

[20] J. Chen, E. Köbis, M. A. Köbis, J. Yao, *A new set order relation in set optimization*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (2017) 637–649.

[21] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30, (1997) 1487–1496.

[22] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 193–204. Yokohama Publishers, Yokohama (2009).

[23] A. Löhne, *Optimization with set relations: conjugate duality*, Optimization 54 (2005) 265–282.

[24] A. Löhne, C. Tammer, *A new approach to duality in vector optimization*, Optimization 56 (2007) 221–239.

[25] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[26] T. Maeda, *On optimization problems with set-valued objective maps: existence and optimality*, J. Optim. Theory Appl. 153 (2012) 263–279.

[27] P. H. Sach, *New nonlinear scalarization functions and applications*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 2281–2292.

[28] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis.*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[29] T. Tanino, Y. Sawaragi *Duality theory in multiobjective programming*, J. Optim. Theory Appl. 27 (1979) 509–529.

[30] T. Tanino, Y. Sawaragi *Conjugate maps and duality in multiobjective optimization*, J. Optim. Theory Appl. 31 (1980) 473–499.

[31] T. Tanino, *Conjugate duality in vector optimization*, J. Math. Anal. Appl. 167 (1992) 84–97.