非決定性逐次過程としてのナップサック問題

長崎大学・経済学部　丸山　幸宏（Yukihiro Maruyama）
Faculty of Economics, Nagasaki University

1　はじめに

通常のナップサック問題（KP : ある容量の範囲内で利益が最大となる品物をナップサックに詰める問題）は，離散的決定過程（discrete decision process; ddp）として定式化でき，さらに単調逐次決定過程（monotone sequential decision process; msdp）として表現できる（Ibaraki[3])。また msdp として表現された同問題は，Ibaraki[3] において，動的計画法や分枝限定法により解けることが示されている。さらに，Shaw および Cho ([1], [4]) は，ツリーナップサック問題（TKP）を導入し，動的計画法，および分枝限定法を用いた解法を提示している。

一方，Maruyama[5] は，非決定性離散的決定過程（nondeterministic ddp; nd-ddp) の非決定性単調逐次決定過程 (nd-msdp) による超表現定理を導出し，卵落とし問題や，非決定性最短経路問題への応用を行っている。

本研究では，非決定性ツリーナップサック問題 (NTKP) を新たに定義し，同問題が非決定性離散的決定過程（nd-ddp) として定式化でき，さらに同過程が, 非決定性ループフリー単調逐次決定過程（nd-lmsdp）により超強表現できることを示す。さらに，NTKP が nd-lmsdp における再帰式により解が得られることを示す。

2　定義

非決定性離散的逐次決定過程（nd-ddp）は次の 4 文字で定義される : $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \mathrm{Max})$,

Σ : 有限個のアルファベット集合 (決定の有限集合);

Σ^* : 決定を有限個連接して得られる方策の集合;

$\Sigma^* \ni \epsilon$: 長さ 0 の方策; $\Sigma^* \supset S$: 許容方策の集合;

$f : S \longrightarrow R^1$: コスト関数で最大化することが目的

$f(x) = \min\{f_i(x) \mid i \in \bar{A}(x) = A(x)\}, = \infty \text{ if } \bar{A}(x) \neq A(x)$,

$x \in S = \{x \in \Sigma^* \mid \exists i \in A(x) \text{ s.t. } \pi(i) \in A_F\}$

$A(x = a_1 \cdots a_n) \ni i = i_1 \cdots i_n$: 添え字の集合,

$A(x) \supset \bar{A}(x) = \{i \in A(x) \mid \pi(i) \in A_F\}$

A_F : 最終添え字の集合

である。

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F)$ とは

$$Q: \text{ 状態の有限集合}; \ Q \ni q_0: \text{ 初期状態};$$
$$ST \subset Q \times Q \times \Sigma, (q, r, a) \in ST; \ Q \supset Q_F: \text{ 最終状態の集合}$$

である。 $(q, r, a) \in ST$ は 状態　q で、決定 a が実行されたとき、複数の状態 r　への遷移許されることに注意する。

さらに、非決定性逐次決定過程（nd-sdp）は非決定性有限オートマトン (nd-fa) に目的関数を随伴させたシステムであり、次のように定義される： $\Pi_{\mathrm{Max}} = (M, h, \xi_0, \mathrm{Max})$, ただし、

$M = (Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F)$ ： 非決定性オートマトン;
$h : R^1 \times ST :$ Π のコスト関数,
$h(\xi, q, r, a)$:$(q, r, a) \in ST$ に対する状態遷移後のコスト値
$R^1 \ni \xi_0$ ： 初期状態 q_0 における初期コスト
$\min \bar{h}_{q_0;Y(q_0,x)}(x) = \min\{\bar{h}_{q_0;\sigma}(x) \mid \sigma \in Y(q_0, x), \pi(\sigma) \in Q_F\} \Longrightarrow$ 最大化,
ただし, $x = a_1 a_2 \cdots a_k$, に対して
$Y(q_0, x) = \{r_1 r_2 \ldots r_k \mid (q_0, r_1, a_1) \in ST,$
$(r_1, r_2, a_2) \in ST, \ldots (r_{k-1}, r_k, a_k) \in ST\}$:遷移経路の集合,
$\bar{h}_{q_0;\mu}(\epsilon) = \xi_{q_0}$, μ は長さ 0 の経路,
$\bar{h}_{q_0;\sigma r}(xa) = h(\bar{h}_{q_0;\sigma}(x), \pi(\sigma), r, a), \ \sigma \in Y(q_0, x), (\pi(\sigma), r, a) \in ST \quad (\sigma r \in Y(q_0, xa))$,
ただし, $\pi(\sigma)$:状態経路 σ の最後の状態,

である。ここでオートマトン M が最終状態の一つに遷移するとき, M は x を受理するといい, M の受理集合 $\{x \in \Sigma^* | \exists \sigma \in Y(q_0, x) \text{ s.t. } \pi(\sigma) \in Q_F\}$ を $F(M)$ と表す。また, nd-sdp Π の受理集合 $F(\Pi_{\mathrm{Max}})$ は, 基礎となるオートマトン M の受理集合と同一のものとする。($F(\Pi_{\mathrm{Max}}) = F(M)$)。

さらにコスト関数 h が単調性：

$$\xi_1 \leq \xi_2 \Longrightarrow h(\xi_1, q, r, a) \leq h(\xi_2, q, r, a) \ \text{ for } \forall (q, r, a) \in ST$$

を満たすとき, 非決定性単調逐次決定過程 (**nd-msdp**) と呼び，さらに，h が強単調性：

$$\xi_1 < \xi_2 \Longrightarrow h(\xi_1, q, r, a) < h(\xi_2, q, r, a) \ \text{ for } \forall (q, r, a) \in ST$$

を満たすとき，非決定性強単調逐次決定過程 (**nd-smsdp**)　と呼ぶ。非決定性単調逐次決定過程が，不等式：

$$h(\xi_1, q, r, a) \geq \xi \ \text{ for } \forall \xi \in R^1, \forall(q, r, a) \in ST$$

を満たすとき，Π　を非決定性正単調逐次決定過程 (**nd-smsdp**)　と呼び，

$$|F(\Pi_{\text{Max}})| < \infty: \ (F(\Pi_{\text{Max}}): \text{有限集合})$$

を満たす Π を非決定性ループフリー単調逐次決定過程 (**nd-lmsdp**) と呼ぶ。上述した逐次決定過程のクラスは，Ibaraki[2] により導入された逐次決定過程と同様のクラスである。

非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) $\Pi_{\text{Max}} = (M, \ h, \xi_0, \text{Max})$ が非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon_{\text{Max}} = (\Sigma, S, f, \text{Max}), \ f(x) = \min f_{A(x)}(x)$ を超強表現するとは，

$$F(\Pi_{\text{Max}}) = S, \ \ Y(q_0; x) = A(x) \ \forall x \in S, \ Q_F = A_F$$
$$\bar{h}_{q_0; Y(q_0; x)}(x) = f_{A(x)}(x) \ \forall x \in S$$

が成り立つことである。ただし，

$$\bar{h}_{q_0; Y(q_0; x)}(x) = \{\bar{h}_{q_0; \sigma}(x) \mid \sigma \in Y(q_0; x)\}, \ f_{A(x)}(x) = \ \{f_i(x) \mid i \in A(x)\},$$

である。また，強表現するとは

$$F(\Pi_{\text{Max}}) = S, \ \bar{h}(x) = f(x) \ \forall x \in S$$
$$\bar{h}(x) = \min \ \bar{h}_{q_0; \bar{Y}(q_0; x)}(x) = \min f_{\bar{A}(x)}(x) = f(x)$$

が成り立つことである。さらに，弱表現するとは，

$$\begin{aligned} O(\pi) &= \{x \in F(\pi) \mid \bar{h}(x) \geq \bar{h}(y) \ \forall y \in F(\pi)\} \\ &= \{x \in S \mid f(x) \geq f(y) \ \forall y \in S\} = O(\Upsilon) \end{aligned}$$

が成り立つことである。

非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) Π_{Max} が非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon_{\text{Max}} = (\Sigma, S, f, \text{Max}), \ f(x) = \min f_{A(x)}(x)$　を超強表現すれば強表現し，強表現すれば弱表現する。

3　nd-ddp の nd-msdp, nd-lmsdp による超強表現

まず，超強表現定理において主要な役割を担う同値関係を定義する，ただし，$S \times I = \cup_{x \in S}\{x\} \times \bar{A}(x)$：

定義 1 (同値関係) nd-ddp $\Upsilon_{\mathrm{Max}} = (\Sigma, S, f, \mathrm{Max})$, $f(x) = \min\{f_i(x) \mid i \in A(x)\}$ において，$\Sigma^* \times I^*$ 上の 2 項関係を次で定義する：

$$
\begin{aligned}
(x, i_x)\hat{R}_{S\times I}(y, i_y) &\iff \{(z, i_z) \mid (xz, i_x i_z) \in S \times I\} = \{(z, i_z) \mid (yz, i_y i_z) \in S \times I\} \\
(x, i_x)\hat{R}_{f_i}(y, i_y) &\iff f_{i_x}(x) = f_{i_y}(y) \wedge i_x \in \bar{A}(x), i_y \in \bar{A}(y) \\
(x, i_x)\hat{R}_{\Upsilon_{f_i}}(y, i_y) &\iff (x, i_x)\hat{R}_{S\times I}(y, i_y) \wedge \ (\forall (xz, i_x i_z) \in S \times I)(f_{i_x i_z}(xz) = f_{i_y i_z}(yz))
\end{aligned}
$$

また，右不変：$(x, i_x)\hat{R}(y, i_y) \implies (xz, i_x i_z)\hat{R}(yz, i_y i_z) \quad \forall (z, i_z) \in \Sigma^* \times I^*$，かつ集合 $S \times I$ を細分：$(x, i_x)R(y, i_y) \implies ((x, i_x) \in S \times I \iff (y, i_y) \in S \times I)$ する同値関係全体を $\Lambda(S \times I)$ と表すと， $\hat{R} = \hat{R}_{S\times I}$, $\hat{R}_{f_i}$, $\hat{R}_{\Upsilon_{f_i}} \in \Lambda(S \times I)$ が成り立っている。
さらに，

$$\Lambda_F(S \times I) = \{\hat{T} \in \Lambda(S \times I) \mid |\Sigma^* \times I^* / \hat{T}| < \infty\}$$

と定義する。また，$\Lambda(\Sigma^* \times I^*)$, $\Lambda_F(\Sigma^* \times I^*)$ は右不変同地関係の全体，指数有限右不変関係の全体を表す。

定義 2 (半順序) nd-ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f, A_F, \mathrm{Max})$, $f(x) = \min\{f_i(x) \mid i \in \bar{A}(x)\}$ において，$S \times I = \cup_{x\in S}\{x\} \times \bar{A}(x)$ 　上の半順序関係を次で定義する：

$$
\begin{aligned}
(x, i_x) \preceq_{\Upsilon_{f_i}} (y, i_y) \iff & (x, i_x)\hat{R}_{S\times I}(y, i_y) \wedge ((x, i_x)\hat{R}_{\Upsilon_{f_i}}(y, i_y)) \\
& \vee (\forall (xz, i_x i_z) \in S \times I) \ \ (f_{i_x i_z}(xz) \le f_{i_y i_z}(yz))
\end{aligned}
$$

命題 半順序関係 $\preceq_{\Upsilon_{f_i}}$ は右不変であり，さらに次の関係が成り立つ：

$$(x, i_x) \preceq_{\Upsilon_{f_i}} (y, i_y) \wedge (y, i_y) \preceq_{\Upsilon_{f_i}} (x, i_x) \iff (x, i_x)\hat{R}_{\Upsilon_{f_i}}(y, i_y)$$

次の nd-msdp による超強表現定理が成り立つ：

定理 1 （nd-msdp の超強表現定理）

非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \mathrm{Max})$ が，非決定性単調逐次決定過程 nd-msdp $\Pi_{\mathrm{Max}} = (M, h, \xi_0, \mathrm{Max})$ により超強表現されるための必要十分条件は，(i)，(ii) を満たす $\hat{T} \in \Lambda_F(S \times I$ が存在することである：

(i) $(\forall (x, i_x), (y, i_y) \in S \times I)((x, i_x)(\hat{T} \wedge \hat{R}_{f_i})(y, i_y) \implies (x, i_x)\hat{R}_{\Upsilon_{f_i}}(y, i_y))$

(ii) $(x, i_x), (y, i_y) \in C_i \times I_i \in \Sigma^* \times I^*/\hat{T} \implies$

$$(x, i_x) \preceq_{\Upsilon_{f_i}} (y, i_y) \text{ or } (y, i_y) \preceq_{\Upsilon_{f_i}} (x, i_x)$$

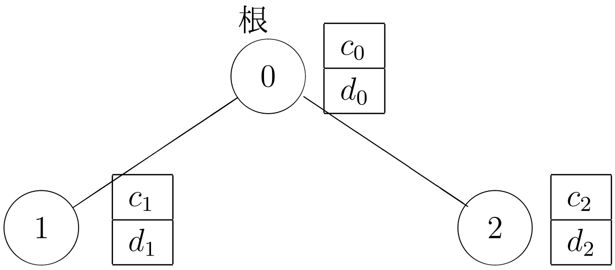
定理２（nd-lmsdp の超強表現定理）

非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \mathrm{Max})$ が，非決定性ループフリー単調逐次決定過程 nd-lmsdp $\Pi_{\mathrm{Max}} = (M, h, \xi_0, \mathrm{Max})$ により超強表現されるための必要十分条件は， $|S_{\bar{A}}| < \infty$ が成り立つことである，ただし， $S_{\bar{A}} = \bigcup_{x \in S} \{(x, i) \mid i \in \bar{A}(x)\}$. である。

4　非決定性ツリーナップサック問題

まず，ツリーナップ問題は以下で定義される：

$T = (V, E)$：ノード 0 を根に持つ無向木， $V = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$: ノードの集合，
各ノード $i \in V$ に対して，整数 c_i: 利益，整数 $d_i > 0$: 必要量（重量），が与えられ，
さらに，H : ナップサックの容量，とするとき，$\sum_{i \in V'} d_i \leq H$ を満たし $\sum_{i \in V'} c_i$ を最大にするような，T の (0 を根に持つ) 部分木 $T' = (V', E')$ を見つける問題.。

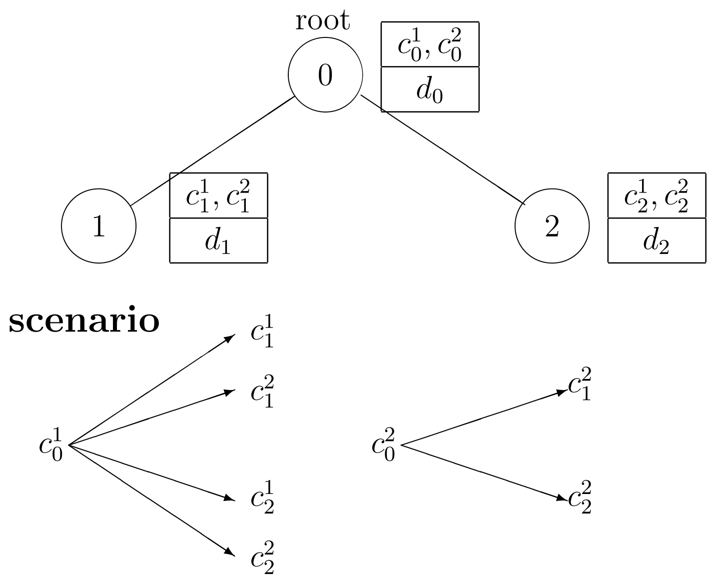


この問題は， 変数：$x_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j \in V' \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ を導入すると，整数計画問題：

$$(\mathrm{TKP}) \quad \begin{aligned} & \mathrm{Max} \quad \sum_{j=0}^{N} c_j x_j \\ & x_{p_j} \geq x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N \\ & \sum_{j=0}^{N} d_j x_j \leq \ H, \quad x_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

として定式化できる。ただし，p_j はノード j の直前のノードである。

本研究では，さらに各ノード i（品物 i）に 2 種類の整数 c_i^1, c_i^2 が付与された問題を考える。例えば，ナップサックに詰める水筒 (i) の候補が 2 つあり，2 人の意思決定者 $(1,2)$ が相談の上，意思決定者 1 の望む水筒を選べば（共通の）利益 c_i^1 が得られ，意思決定者 2 が望む水筒を選べば,（共通の）利益 c_i^2 が得られる等の状況が考えられる。さらに，一つのシナリオ（scenario）として，意思決定者 1 の望む品物が選ばれた（利得 c_0^1）後は，次の品物を選ぶ際には意思決定者 $1,2$ の望む品物はいずれも選択可能（$c_1^1, c_1^2, c_2^1, c_2^2$ のいずれの利益も可能）である一方，意思決定者 2 の望む品物が選ばれた（利得 c_0^2）後は，次の品物を選ぶ際には意思決定者 2 の望む品物のみ選択可能となる（$c_1^2,, c_2^2$ のみの利益が可能）場合を想定する（下図参照）。



このとき，1 つの決定の列（例えば $x = x_0x_1x_2 = 110$）に対して，複数の利益（$c_0^1 + c_1^1$, $c_0^1 + c_1^2, c_0^2 + c_1^2$）があり得る。そこで，各 $x = x_0 \cdots x_N$ に対して，添え字の集合：

$$I(x = x_0 \cdots x_N) = \{l = (l_0, l_1, \cdots, l_N) \mid l_i = 1 \text{ or } 2 \text{ or } -\}$$

を導入する。例えば $i = 0, 1, 2$ の場合，下記の通りである。

$$\begin{aligned}
I(x = x_0x_1x_2 = 100) &= \{l = (l_0, l_1, l_2) = (1, -, -), (2, -, -)\} \\
I(x = x_0x_1x_2 = 110) &= \{l = (l_0, l_1, l_2) = (1, 1, -), (1, 2, -), (2, 2, -)\} \\
I(x = x_0x_1x_2 = 101) &= \{l = (l_0, l_1, l_2) = (1, -, 1), (1, -, 2), (2, -, 2)\}
\end{aligned}$$

これを用いて，本研究では次の様な**Max-min**型のツリーナップサックサック問題を考える：

$$
\text{(NTKP)} \quad \begin{aligned}
&\text{Max} \min_{l=(l_j)\in I(x)} \sum_{j=0}^{N} c_j^{l_j} x_j \\
&x_{p_j} \geq x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N \\
&\sum_{j=0}^{N} d_j x_j \leq \ H, \ l_j \in \{1, 2\}, \quad x_j \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

このMax-min型（NTKP) 問題は，次のように非決定性離散的決定過程として定式化できる：nd-ddp $\Upsilon_{\text{Max}} = (\Sigma, S, A_F, f, \text{Max})$：

$$
\begin{aligned}
&\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, N, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{N}\} \ni l : \text{次に } x_l = 1 \text{ とする}, \ni \bar{l} : \text{次に } x_l = 0 \text{ とする} \\
&S = \{x = 0d_1 \cdots d_N \in \Sigma^* | d_j = l, \text{or } \bar{l} \quad \text{for each } j, \ a(x) = \sum_{d_j = l} a_l \leq H, \ x_{p(l)} \geq x_l\} \\
&A(x = 0d_1 \cdots d_k) = \{i \mid i = i_0 i_1 i_2 \cdots i_k, \ i_0 = [0, -, -], i_1 = [a_0, 0, (0, j_0)], \\
&\qquad\qquad i_2 = [\sum_{d_j = l \leq 1} a_l, 1, (l_1, j_1)], \ldots, \ i_k = [\sum_{d_j = l \leq k-1} a_l, k-1, (l_{k-1}, j_{k-1})], \\
&\qquad\qquad\qquad (0, j_0)(l_1, j_1) \cdots (l_{k-1}, j_{k-1}) \in S_e(x)\},
\end{aligned}
$$

ただし，$0, l_0, l_1, \ldots, l_{k-1} \ \in V$：：ノードの集合，$j_0, j_1, \ldots, j_{k-1} \ \in \{1, 2\}$

$S_e(x)$： シナリオから定まる，各決定 x に対応する，ノード l_k （品物の番号）とモード j_i（意思決定者の番号）の組の列からなる集合，

$$
\begin{aligned}
&A_F = \{[\sum_{d_j = l \leq N} a_l, N, (l_N, j_N)]\}, \\
&\bar{A}(x = 0d_1 \cdots d_N) = \{i \mid i = i_0 i_1 i_2 \cdots i_k \in A(x), \ \pi(i) = i_k = [\sum_{d_j = l \leq N} a_l, N, (l_N, j_N)]\}, \\
&f_{i_x}(x = 0d_1 \cdots d_N) = \sum_{d_j = l_m \leq N} c_{l_m}^{j_m}, \ \text{ただし}, \quad i_x = i_0 i_1 i_1 \cdots i_{k-1} i_k \in \bar{A}(x = 0d_1 \cdots d_N), \\
&\qquad i_0 = [0, -, -], i_1 = [a_0, 0, (0, j_0)], i_2 = [\sum_{d_j = l_m \leq 1} a_{l_m}, 1, (l_1, j_1)], \ldots, \\
&\qquad\qquad i_k = [\sum_{d_j = l_m \leq N} a_{l_m}, N, (l_N, j_N)], \ (0, j_0)(l_1, j_1) \cdots (l_N, j_N) \in S_e(x), \\
&f(x = 0d_1 \cdots d_N) = \min\{f_{i_x}(x) \mid i_x \in \bar{A}(x)\} = \min \ f_{\bar{A}(x)}(x) \Longrightarrow \text{最大化。}
\end{aligned}
$$

上記, 非決定性離散的決定過程において，同値関係 $\hat{T}$ を

$$
(x, i_x)\hat{T}(y, i_y) \iff \begin{aligned}
&x = 0d_1 d_2 \cdots j, \ y = 0d'_1 d'_2 \cdots j \\
&i_x = i_0 i_1 i_2 \cdots i, \ i_y = i_0 i'_1 i'_2 \cdots i,
\end{aligned}
$$

と定義すると $\hat{T} \in \Lambda_F(S_{\bar{A}})$ を満たし，さらに定理 2 の仮定： $|S_{\bar{A}}| < |S| \cdot 2^{N-1} < \infty$ を満たすので，非決定性ループフリー単調逐次決定過程（nd-lmsdp）として超強表現できる。実際，nd-lmsdp としての非決定性ツリーナップサック問題は次の通りである：

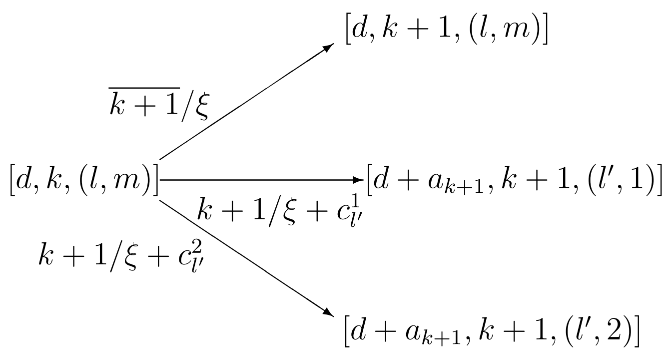
nd-lmsdp $\Pi_{Max} = (M(Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F), h, \xi_0, \mathrm{Max})$

$$Q = \{[d, k, (l, m)] \mid 0 \le d \le H, 0 \le k \le N,\ l \in V, m \in \{1, 2\}\} \cup \{[0, 0, -], q_d : \text{死状態}\},$$

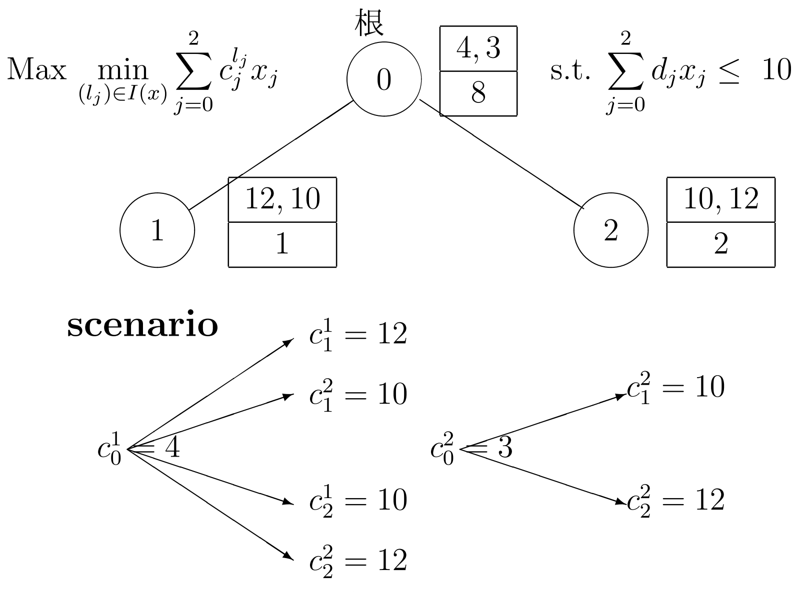
$$q_0 = [0, 0, -] : \text{初期状態},\ Q_F = \{[d, N, (l, m)] \mid a_0 \le d \le H, l \in V,\ m \in \{1, 2\}\},$$

$$\delta([d, k, (l, m)], d_j) = \begin{cases} [d, k+1, (l, m)] & \text{if } d_j = \overline{k+1}, k < N, d \le H \\ [d + a_{k+1}, k+1, (l', m')] & \text{if } d_j = k+1, k < N, d + a_{k+1} \le H \\ q_d & \text{otherwise} \end{cases}$$

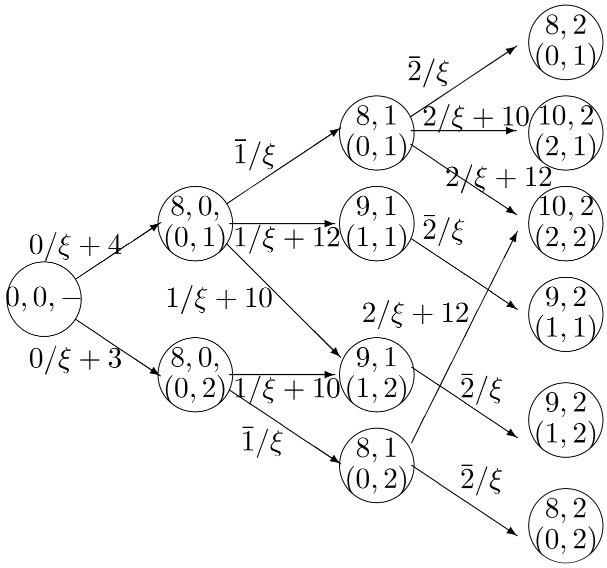
$$h(\xi, [d, k, (l, m)], [d', k+1, (l', m')], d_j) = \begin{cases} \xi & \text{if } d_j = \overline{k+1} \\ \xi + c_{l'}^{m'} & \text{if } d_j = k+1 \end{cases}$$



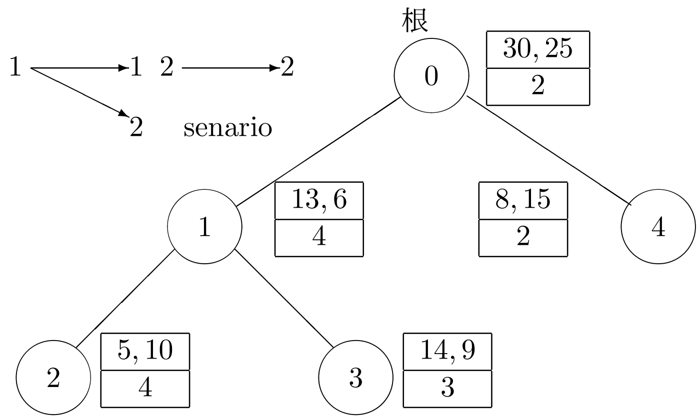
例 1 下図のような非決定性ナップサックツリー問題を考える：



上記，非決定性ツリーナップサック問題は下図のように nd-lmsdp として表すことができる：



例 2 さらに，次の様な非決定性ツリーナップサック問題を考える：



$$\text{Max} \min_{(l_j)\in I(w)} \sum_{j=0}^{4} c_j^{l_j} w_j \qquad \text{s.t.} \qquad \sum_{j=0}^{4} d_j w_j \leq 12$$

本問題も例 1 と同様に，非決定性逐次決定過程（nd-lmsdp) として超強表現できるが，本例題では再帰式を用いて，解を求める。そこで，

$$F(q) = \underset{x}{\text{Max}} \ \min\{\bar{h}_{q;\sigma_x}(x) \mid \sigma_x \in \bar{Y}(q, x)\}, \ \text{ただし，}$$

$$\bar{Y}(q, x = d_1 \cdots d_k) = \{r_1 \cdots r_k \mid (q, r_1, d_1) \in ST,$$
$$(r_1, r_2, d_2) \in ST, \cdots (r_{k-1}, r_k, d_k) \in ST,\ r_k \in Q_F\}$$

とすると，非決定性逐次決定過程（nd-lmsdp）Π_{Max} における，次の再帰式が成立する：

$$\begin{array}{rcl} F(q) & = & \mathrm{Max} \left\{ \begin{array}{l} \min\{F(p) + c_j^{l_j} \mid p \in \delta(q, j)\} \\ \{F(p) \mid p \in \delta(q, \bar{j})\} \end{array} \right. \\ & & \quad\quad \text{if} \quad q \notin Q_F \\ F(q) & = & 0 \quad\quad\quad\quad \text{if} \quad q \in Q_F \end{array}$$

これを用いると，

$$\begin{array}{rcl} F([0,0,-]) & = & \min\{F(q) + c_0^{l_0} \mid q \in \delta([0,0,-],0)\} \\ & = & (F([2,0,(0,1)]) + 30) \wedge F([2,0,(0,2)]) + 25) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} F([2,0,(0,1)]) & = & \begin{array}{l} \min\{F([6,1,(1,1)]) + 13, F([6,1,(1,2)]) + 6\} \\ \vee\{F([2,1,(0,1)])\} \end{array} \\ F([2,0,(0,2)]) & = & \{F([6,1,(1,2)]) + 6\} \vee \{F([2,1,(0,2)])\} \\ F([6,1,(1,1)]) & = & \begin{array}{l} \min\{F([10,2,(2,1)]) + 5, F([10,2,(2,2)]) + 10\} \\ \vee\{F([6,2,(1,1)])\} \end{array} \\ F([6,1,(1,2)]) & = & \{F([10,2,(2,2)]) + 10\} \vee \{F([6,2,(1,2)])\} \\ & & \cdots \quad\quad\quad\quad \cdots \\ F([d,4,(l_4,j_4)] & = & 0 \\ & & \cdots \quad\quad\quad\quad \cdots \\ F([6,1,(1,2)]) & = & \{F([10,2,(2,2)]) + 10\} \vee \{F([6,2,(1,2)])\} \\ & & = 25 \vee 15 = 25 \\ F([6,1,(1,1)]) & = & \begin{array}{l} \min\{F([10,2,(2,1)]) + 5, F([10,2,(2,2)]) + 10\} \\ \vee\{F([6,2,(1,1)])\} = (13 \wedge 25) \vee 22 = 22 \end{array} \\ F([2,0,(0,2)]) & = & \{F([6,1,(1,2)]) + 6\} \vee \{F([2,1,(0,2)])\} \\ & & = 31 \vee 15 = 31 \\ F([2,0,(0,1)]) & = & \begin{array}{l} \min\{F([6,1,(1,1)]) + 13, F([6,1,(1,2)]) + 6\} \\ \vee\{F([2,1,(0,1)])\} = (35 \wedge 31) \vee 8 = 31 \end{array} \\ F([0,0,-]) & = & (F([2,0,(0,1)]) + 30) \wedge F([2,0,(0,2)]) + 25) \\ & & = 61 \vee 56 = 56 \end{array}$$

$$[2,0,(0,2)] \xRightarrow{1} [6,1,(1,2)] \xRightarrow{2} [10,2,(2,2)]$$
$$\xRightarrow{\bar{3}} [10,3,(2,2)] \xRightarrow{4} [12,4,(4,2)]$$

従って，最適な部分木は，$x = 012\bar{3}4$ であり，そのとき，$F(q_0) = 56$，$d = 12$ である。

参考文献

[1] Cho, G. and Shaw, D.X.(1997), A depth-first dynamic programming algorithm for the tree knapsack problem, *INFORMS Journal on Computing* **9** (4), 431-438.

[2] Ibaraki, T. (1978), Finite automata having cost functions: Nondeterministic models, *Information and Control* **37**, 40-69.

[3] 茨木俊秀 (1979), 組合最適化の理論，情報とシステムシリーズ，社団法人電子通信学会編

[4] Shaw, D. and Cho, G.(1998), The critical-item, upper bounds, and a branch-and-bound algorithm for the tree knapsack problem, *Networks* **31**(4), 205-216.

[5] Maruyama, Y. (2017), Super-strong representation theorems for nondeterministic sequential decision processes, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **60**(2), 136-155.