ファジィ Schwarz の不等式

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

本稿では、内積空間における Schwarz の不等式のファジィ版として、ファジィ Schwarz の不等式を導く。ファジィ Schwarz の不等式において、Zadeh の拡張原理を用いて定義されるファジィノルムおよびファジィ内積が用いられる。Schwarz の不等式は、内積空間における二つのベクトルの間の内積がとる値をそれぞれのベクトルのノルムによって評価する不等式である。ファジィ Schwarz の不等式は、内積空間上の二つのファジィ集合のファジィ内積がとる値（ファジィ集合）をそれぞれのファジィ集合のファジィノルム（ファジィ集合）によって評価する不等式である。

1　はじめに

ファジィ集合の概念は、Zadeh [10] によって、曖昧性または不確実性を含む集合を表現するために、ファジィ集合論として最初に導入された。そして、ファジィ集合論は経済学, 経営学, 工学, 最適化理論やオペレーションズ・リサーチなど様々な分野に応用されてきた。Zadeh の拡張原理 [3, 7, 10] は、写像の像の自然な拡張を与え、ファジィ演算などの発展において重要なツールになる。X, Y, Z を集合とし、$f : X \times Y \to Z$ を写像とする。また、$\widetilde{a}$ および $\widetilde{b}$ をそれぞれ X および Y 上のファジィ集合とする。さらに、$f(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ を Zadeh の拡張原理によって得られる Z 上のファジィ集合とする。[7, 9] において、$f([\widetilde{a}]_\alpha, [\widetilde{b}]_\alpha)$ と $[f(\widetilde{a}, \widetilde{b})]_\alpha$ の間の関係が調べられている。ここで、$[\widetilde{a}]_\alpha$, $[\widetilde{b}]_\alpha$ および $[f(\widetilde{a}, \widetilde{b})]_\alpha$ は、それぞれ $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ および $f(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ の α-レベル集合である。また、Zadeh の拡張原理を用いて定義されるファジィノルムおよびファジィ内積が [6, 7] および [5, 7] において提案され、それらの性質が調べられている。

一方、Schwarz の不等式は、内積空間における二つのベクトルの間の内積がとる値をそれぞれのベクトルのノルムによって評価する不等式であり、長い歴史がある（例えば、[2] 参照）。本稿では、内積空間における Schwarz の不等式のファジィ版として、ファジィノルムおよびファジィ内積を用いて、ファジィ Schwarz の不等式を導く。ファジィ Schwarz の不等式は、内積空間上の二つのファジィ集合のファジィ内積がとる値（ファジィ集合）をそれぞれのファジィ集合のファジィノルム（ファジィ集合）によって評価す

る不等式である。

2 準備

本節では、いくつかの記号を準備する。

$\mathbb{R}$ および $\mathbb{C}$ をそれぞれすべての実数の集合およびすべての複素数の集合とし、$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ とする。$A \subset \mathbb{R}$ に対して、A の内部を $\mathrm{int}(A)$ と表す。$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ および $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。

X を集合とする。$\widetilde{a} : X \to [0,1]$ を X 上のファジィ集合といい、$\mathcal{F}(X)$ を X 上のすべてのファジィ集合の集合とする。$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ および $\alpha \in]0,1]$ に対して、$\widetilde{a}$ の **$\boldsymbol{\alpha}$-レベル集合**は

$$[\widetilde{a}]_\alpha = \{x \in X : \widetilde{a}(x) \geq \alpha\} \tag{2.1}$$

と定義される。クリスプ集合 $S \subset X$ に対して、S の指示関数 $c_S : X \to \{0,1\}$ は各 $x \in X$ に対して

$$c_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in S \\ 0 & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

と定義される。$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ は

$$\widetilde{a} = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{[\widetilde{a}]_\alpha} \tag{2.2}$$

と表現でき、**分解定理**または**表現定理**として知られている（例えば、[3, 7] 参照）。

位相空間上のファジィ集合を考える。$(X, \mathbb{T})$ を位相空間とする。$\mathcal{C}(X)$ および $\mathcal{K}(X)$ をそれぞれ X のすべての閉部分集合の集合およびすべてのコンパクト部分集合の集合とする。$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ とする。$\widetilde{a}$ が（X 上の）**閉ファジィ集合**であるとは、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{a}]_\alpha \in \mathcal{C}(X)$ であるときをいう。$\widetilde{a}$ が X 上の閉ファジィ集合であるための必要十分条件は、$\widetilde{a}$ が X 上の上半連続関数になることである。$\widetilde{a}$ が（X 上の）**コンパクトファジィ集合**であるとは、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{a}]_\alpha \in \mathcal{K}(X)$ であるときをいう。$\mathcal{FC}(X)$ および $\mathcal{FK}(X)$ をそれぞれ X 上のすべての閉ファジィ集合の集合およびすべてのコンパクトファジィ集合の集合とする。

$\mathbb{R}$ において、集合の順序を定義し、集合の順序を用いてファジィ集合の順序を定義する。$A, B \subset \mathbb{R}$ とする。$B \subset A + \mathbb{R}_+$, $A \subset B + \mathbb{R}_-$ であるとき、$A \leq B$ と書く。$B \subset A + \mathrm{int}(\mathbb{R}_+)$, $A \subset B + \mathrm{int}(\mathbb{R}_-)$ であるとき、$A < B$ と書く。$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ とする。任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{a}]_\alpha \leq [\widetilde{b}]_\alpha$ であるとき、$\widetilde{a} \preceq \widetilde{b}$ と書く。任意の $\alpha \in]0,1]$ に対

して $[\widetilde{a}]_\alpha < [\widetilde{b}]_\alpha$ であるとき、$\widetilde{a} \prec \widetilde{b}$ と書く。$\preceq$ および $\prec$ はそれぞれ $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ 上の**ファジィマックス順序**および**狭義ファジィマックス順序**とばれ、$\preceq$ は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ 上の擬順序になる（[4, 7, 8] 参照）。

3 Zadeh の拡張原理によるファジィ集合の像

本節では、ファジィ集合のレベル集合と Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合のレベル集合の関係について考察する。また、Zadeh の拡張原理を用いてファジィノルムとファジィ内積を導入する。

定義 1 $X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ を集合とし、$\widetilde{a}_i \in \mathcal{F}(X_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ とする。このとき、$\widetilde{a}_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ の**ファジィ直積集合** $\prod_{i=1}^n \widetilde{a}_i = \widetilde{a}_1 \times \widetilde{a}_2 \times \cdots \times \widetilde{a}_n \in \mathcal{F}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$ を各 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$ に対して

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^n \widetilde{a}_i\right)(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= (\widetilde{a}_1 \times \widetilde{a}_2 \times \cdots \times \widetilde{a}_n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= \min_{i=1,2,\cdots,n} \widetilde{a}_i(x_i)\end{aligned}$$

と定義する。$\prod_{i=1}^n \widetilde{a}_i = \widetilde{a}_1 \times \widetilde{a}_2 \times \cdots \times \widetilde{a}_n$ を $(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n)$ とも表す。

次の定義は、Zadeh の拡張原理によるクリスプ写像の下でのファジィ集合の像の定義である。Zadeh の拡張原理に関しては、例えば [3, 7, 10] 参照。

定義 2 $X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ および Y を集合とし、$f : \prod_{i=1}^n X_i \to Y$ とする。このとき、$\widetilde{a}_i \in \mathcal{F}(X_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ に対して、$f(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n) \in \mathcal{F}(Y)$ を各 $y \in Y$ に対して

$$f(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n)(y) = \sup_{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min_{i=1,2,\cdots,n} \widetilde{a}_i(x_i)$$

と定義する。ただし、$\sup \emptyset = 0$ とする。

X をノルム $\|\cdot\|$ をもつ実または複素ノルム空間とし、$f : X \to \mathbb{R}$ を各 $x \in X$ に対して $f(x) = \|x\|$ とする。定義 2 より、$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(X)$ に対して

$$f(\widetilde{a})(y) = \|\widetilde{a}\|(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \widetilde{a}(x), \quad y \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

となる。$\|\widetilde{a}\| \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を $\widetilde{a}$ の**ファジィノルム**という。[6, 7] において、ファジィノルムの性質が詳しく調べられている。

X を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をもつ実または複素内積空間とし、$f: X\times X\to\mathbb{K}$ を各 $x,y\in X$ に対して $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ とする。ここで、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である。定義 2 より、$\widetilde{a},\widetilde{b}\in\mathcal{F}(X)$ に対して

$$f(\widetilde{a},\widetilde{b})(z)=\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle(z)=\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)}\min\{\widetilde{a}(x),\widetilde{b}(y)\},\quad z\in\mathbb{K} \tag{3.2}$$

となる。$\langle\widetilde{a},\widetilde{b}\rangle\in\mathcal{F}(\mathbb{K})$ を $\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ の**ファジィ内積**という。[5, 7] において、ファジィ内積の性質が詳しく調べられている。

次の定理 1 は、ファジィ集合のレベル集合と Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合のレベル集合の関係を与える。

定理 1（[9]）$X_i,\ i=1,2,\cdots,n$ および Y を集合とし、$f:\prod_{i=1}^{m}X_i\to Y$ とする。また、$\widetilde{a}_i\in\mathcal{F}(X_i),\ i=1,2,\cdots,n$ とする。このとき、任意の $\alpha\in\,]0,1]$ に対して

$$[f(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2,\cdots,\widetilde{a}_n)]_\alpha=f([\widetilde{a}_1]_\alpha,[\widetilde{a}_2]_\alpha,\cdots,[\widetilde{a}_n]_\alpha) \tag{3.3}$$

となるための必要十分条件は、$y\in Y,\ f^{-1}(y)\neq\emptyset$ ならばある $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)\in f^{-1}(y)$ が存在して次が成り立つことである。

$$\min_{i=1,2,\cdots,n}\widetilde{a}_i(x_i^*)=\sup_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in f^{-1}(y)}\ \min_{i=1,2,\cdots,m}\widetilde{a}_i(x_i)$$

次の定理 2 は、定理 1 における (3.3) が成り立つための十分条件を与える。

定理 2　$(X_i,\mathbb{T}_i),i=1,2,\cdots,n$ を Hausdorff 空間とし、Y を T_1-空間とし、$f:\prod_{i=1}^{n}X_i\to Y$ は連続であるとする。また、$\widetilde{a}_i\in\mathcal{FK}(X_i),\ i=1,2,\cdots,n$ とする。このとき、任意の $\alpha\in\,]0,1]$ に対して次が成り立つ。

$$[f(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2,\cdots,\widetilde{a}_n)]_\alpha=f([\widetilde{a}_1]_\alpha,[\widetilde{a}_2]_\alpha,\cdots,[\widetilde{a}_n]_\alpha)$$

次の定理 3 は、コンパクトファジィ集合から Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合がコンパクトファジィ集合になるための十分条件を与える。

定理 3　$(X_i,\mathbb{T}_i),i=1,2,\cdots,n$ を Hausdorff 空間とし、Y を T_1-空間とし、$f:\prod_{i=1}^{n}X_i\to Y$ は連続であるとする。また、$\widetilde{a}_i\in\mathcal{FK}(X_i),\ i=1,2,\cdots,n$ とする。このとき、$f(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2,\cdots,\widetilde{a}_n)\in\mathcal{FK}(Y)$ となる。

次の定理４は、Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合の順序関係が Zadeh の拡張原理で用いられる関数の大小関係によって導かれることを示している。

定理４ $(X_i, \mathbb{T}_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ を Hausdorff 空間とし、$\widetilde{a}_i \in \mathcal{FK}(X_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ とする。また、$f, g : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ は連続であるとする。

(i) $f \leq g \Rightarrow f(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n) \preceq g(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n)$

(ii) $f < g \Rightarrow f(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n) \prec g(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n)$

4　ファジィ Schwarz の不等式

本節では、内積空間における Schwarz の不等式のファジィ版として、ファジィノルムおよびファジィ内積を用いて、ファジィ Schwarz の不等式を導く。

本節を通して、X は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ をもつ実または複素内積空間とする。ここで、$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である。各 $x \in X$ に対して、x のノルムは

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{4.1}$$

と定義される。

次の定理５は、内積空間における二つのベクトルの間の内積がとる値をそれぞれのベクトルのノルムによって評価する不等式を与える。

定理５（Schwarz の不等式 (Schwarz Inequality)）（例えば [2] 参照）任意の $x, y \in X$ に対して

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

が成り立つ。さらに、等号が成り立つための必要十分条件は x と y が一次従属になることである。

ファジィ Schwarz の不等式を導くために、次の補題１を与える。

補題１ $f_1 : X \times X \to \mathbb{K}$ を各 $(x, y) \in X \times X$ に対して $f_1(x, y) = \langle x, y \rangle$ とし、$f_2 : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ を各 $z \in \mathbb{K}$ に対して $f_2(z) = |z|$ とし、$f : X \times X \to \mathbb{R}$ を各 $(x, y) \in X \times X$ に対して $f(x, y) = f_2(f_1(x, y)) = |\langle x, y \rangle|$ とする。また、$g_1 : X \to \mathbb{R}$ を各 $x \in X$ に対して $g_1(x) = \|x\|$ とし、$g_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を各 $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して $g_2(u, v) = uv$ とし、

$g : X \times X \to \mathbb{R}$ を各 $(x, y) \in X \times X$ に対して $g(x, y) = g_2(g_1(x), g_1(y)) = \|x\|\|y\|$ とする。このとき、$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{FK}(X)$ に対して

$$f(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = f_2(f_1(\widetilde{a}, \widetilde{b})) = |\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle| \tag{4.4}$$

$$g(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = g_2(g_1(\widetilde{a}), g_1(\widetilde{b})) = \|\widetilde{a}\|\|\widetilde{b}\| \tag{4.5}$$

となる。ここで、(4.4) および (4.5) における第二の等号は定義である。

次の定理 6 は、内積空間上の二つのファジィ集合のファジィ内積がとる値（ファジィ集合）をそれぞれのファジィ集合のファジィノルム（ファジィ集合）によって評価する不等式を与える。

定理 6（ファジィ Schwarz の不等式 (Fuzzy Schwarz Inequality)）任意の $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{FK}(X)$ に対して

$$|\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle| \preceq \|\widetilde{a}\|\|\widetilde{b}\|$$

が成り立つ。

5 結論

本稿では、内積空間における Schwarz の不等式のファジィ版として、ファジィ Schwarz の不等式を導いた。Schwarz の不等式は、内積空間における二つのベクトルの間の内積がとる値をそれぞれのベクトルのノルムによって評価する不等式である。ファジィ Schwarz の不等式は、内積空間上の二つのファジィ集合のファジィ内積がとる値（ファジィ集合）をそれぞれのファジィ集合のファジィノルム（ファジィ集合）によって評価する不等式である。

まず、Zadeh の拡張原理を用いてファジィノルムおよびファジィ内積が定義された。次に、定理 2 として、ファジィ集合のレベル集合の像が Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合のレベル集合と一致するための十分条件を与えた。次に、定理 3 として、コンパクトファジィ集合から Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合がコンパクトファジィ集合になるための十分条件を与えた。次に、定理 4 として、Zadeh の拡張原理によって得られるファジィ集合の順序関係が Zadeh の拡張原理で用いられる関数の大小関係によって導かれることを示した。これらを用いて、定理 6 として、ファジィ Schwarz の不等式が導かれた。

参考文献

[1] C. Berge, Topological Spaces, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1963.

[2] F. Deutsch, Best Approximation in Inner Product Spaces, Springer, New York, NY, 2001.

[3] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, Fuzzy sets: history and basic notions, in *Fundamentals of Fuzzy Sets* (D. Dubois and H. Prade, Eds.) (Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000), pp.21–124.

[4] M. Kon, Operation and ordering of fuzzy sets, and fuzzy set-valued convex mappings, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, Vol.2014, Article ID jfsva-00202 (URL: http://ispacs.com/journals/jfsva/2014/jfsva-00202/) (DOI: 10.5899/2014/jfsva-00202), 2014.

[5] M. Kon, Fuzzy inner product and fuzzy product space, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Vol.9, No.5, 2015, pp.753–769.

[6] M. Kon, Fuzzy distance and fuzzy norm, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.60, 2017, pp.66–77.

[7] 金正道, ファジィ集合最適化, 弘前大学出版会, 2019.

[8] M. Kurano , M. Yasuda, J. Nakagami and Y. Yoshida, Ordering of convex fuzzy sets—a brief survey and new results, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.43, 2000, pp.138–148.

[9] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications 64 (1978) 369–380.

[10] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338–353.