

# 複数種類の検索資源の組合せ使用を考慮した検索ゲーム

防衛大学校・情報工学科 宝崎 隆祐

Ryusuke Hohzaki

Department of Computer Science,

National Defense Academy

## 1 はじめに

検索ゲームにおける不完備情報ゲームの研究は、目標が検索開始時における初期位置と初期移動エネルギー量に関する個人情報をもつ場合、あるいは検索者が保有する検索資源の探知能力に関する個人情報をもつ場合のモデルが別個に考えられてきた。Hohzaki and Joo [1] 及び Matuo and Hohzaki [2] は前者に関する論文であり、Hohzaki [3] は後者の研究である。それに対し、通常の検索活動では目標、検索者ともに個人情報をもった状況で行われることを考え、両プレイヤーの個人情報を同時に扱う不完備情報の検索ゲームを議論したのが宮田 et al. [4] である。しかし、Hohzaki [3] のモデルも宮田 et al. [4] のモデルも、検索資源は複数種類考えているものの、実際に使用する種類は一種類のみであった。多くの検索活動で見られるように、実際には幾つかの種類資源が同時使用される場合も多いことから、そのような検索資源使用を考慮した検索ゲームのモデルが必要であり、この論文はその現実的要請に答えたものとなっている。

さて、複数種類の資源を準備する必要のある状況を、次の例で説明しよう。山岳救助活動では、救助隊が担う荷物の量には厳しい制限があるため、その範囲内で複数の装備品を携行する。仮に遭難者の遭難状況が分からない状況では、それまでの経験から適切と思われる複数種の装備品を組み合わせ携行することになる。一方、事前に遭難状況の情報が入っていれば、救助に最も適していると思われる組合せを準備して救助に向かうことになる。

以下では、以上の異なる2つの検索状況に対応させた2つの検索ゲームのモデルを考え、それぞれの均衡解を比較することで、複数種の検索資源を同時使用する検索問題を分析しよう。

## 2 検索資源種類の組合せに関する個人情報があるモデル（モデルA）

以下は、検索資源種類の組合せが個人情報と見なせるモデル（モデルA）である。

### 2.1 モデルAの前提と定式化

ここでは、検索者は検索資源を複数種使用できるものの、その混載比率は検索資源のコスト制約から決まる幾つかの標準比率から1つが偶然手番により決定され、これを検索者は知っているが目標側は知らない状況、すなわち、混載比率が検索者の個人情報であるモデルを議論する。

(A1) 検索空間は離散地理空間と離散時間空間から成るとし、地理空間を  $K$  個のセル空間  $\mathbf{K} = \{1, \dots, K\}$  で、時間空間を  $T$  時点の集合  $\mathbf{T} = \{1, \dots, T\}$  で表現する。

(A2) 目標は実行可能なパス群  $\Omega$  の1つのパスを選んで移動し、探索者からの探知を逃れようとする。パス  $\omega \in \Omega$  を選択した場合の時点  $t \in \mathbf{T}$  での位置を  $\omega(t) \in \mathbf{K}$  とする。

(A3) 探索者の使用できる搜索資源の種類集合は  $S$  であり、探索者は、時点  $\tau$  以降の時間区間  $\hat{\mathbf{T}} = \{\tau, \tau+1, \dots, T\}$  において、 $S$  の中から複数種資源を組み合わせ使用できる。この可算有限個の組合せ比率の集合  $D$  の中からは、確率分布  $\{l(d), d \in D\}$  に従った偶然手番により一つの組合せ  $d$  が選ばれ、搜索に使用される。ただし、 $\sum_{d \in D} l(d) = 1$  である。実現した組合せ比率  $d$  を探索者は知っており、この比率の搜索資源を用いる探索者をタイプ  $d$  の探索者と呼ぶ。

組合せ比率のタイプ  $d \in D$  では、使用可能な総搜索コストに対する各資源種類  $s \in S$  の使用コストの比率は  $\gamma_s^d$  で与えられる。ただし、 $\sum_{s \in S} \gamma_s^d = 1$  である。総搜索コストは  $C$  であり、種類  $s$  の搜索資源の単位量使用にはコスト  $c_s$  を要するとするため、その使用可能量は次式となる。

$$\Phi_s^d = \frac{\gamma_s^d C}{c_s}, \quad s \in S \quad (1)$$

探索者は、これらの搜索資源を  $\hat{\mathbf{T}}$  の各時間、各セルに分割・投入して目標を探知しようとする。

(A4) セル  $i$  に存在する目標に対し、種類  $s$  の資源量  $x_s$  の投入により、確率

$$1 - \exp(-\alpha_i^s x_s) \quad (2)$$

で目標は探知される。非負のパラメータ  $\alpha_i^s$  は、種類  $s$  の単位資源量によるセル  $i$  での探知効率を表す。搜索資源の複数種間での探知や複数時点間での探知は、互いに独立である。

(A5) 探索者は目標の探知確率を大きくしようとし、目標は小さくしようとする。

前提 (A3) の確率  $l(d)$  はすべて正であるとする。そうでなければ、確率ゼロの組合せを  $D$  から削除すればいいからである。前提 (A5) から、この搜索問題は目標探知確率を支払とする2人ゼロ和ゲームであるが、式展開のし易さから、1から探知確率を引いた値である非探知確率を支払関数として取り扱う。

タイプ  $d$  の探索者の搜索資源配分戦略を  $\varphi^d = \{\varphi_s^d(i, t), i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}, s \in S\}$  で表す。 $\varphi_s^d(i, t)$  は時点  $t$  でセル  $i$  に投入するタイプ  $s$  資源の量である。前提 (A3) から、戦略  $\varphi^d$  の実行可能領域  $\Psi_d$  は次式で与えられる。

$$\Psi_d \equiv \left\{ \varphi^d \mid \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s^d(i, t) \leq \Phi_s^d, s \in S, \quad \varphi_s^d(i, t) \geq 0, i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}, s \in S \right\} \quad (3)$$

全タイプの探索者戦略  $\varphi \equiv \{\varphi^d, d \in D\}$  の実行可能領域は、 $\Psi_A \equiv \{\varphi \mid \Psi_d, d \in D\}$  で表される。

目標の純粋戦略は1本のパス選択  $\omega \in \Omega$  であり、その混合戦略を  $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$  で表現する。 $\pi(\omega)$  はパス  $\omega$  の選択確率である。 $\pi$  の実行可能領域は次式となる。

$$\Pi \equiv \left\{ \pi \mid \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \quad \pi(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega \right\} \quad (4)$$

タイプ  $d$  の探索者が戦略  $\varphi^d$  をとり、目標がパス  $\omega$  を採用した場合、時点  $t$  では目標はセル  $\omega(t)$  におり、そこには種類  $s$  資源が  $\varphi_s^d(\omega(t), t)$  だけ投入されるから、前提 (A4) から、非探知確率は次式で与えられる。

$$R_d(\varphi^d, \omega) = \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right)$$

この式から、目標の混合戦略  $\pi$  による期待非探知確率は

$$R_d(\varphi^d, \pi) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) R_d(\varphi^d, \omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \quad (5)$$

となり、これがタイプ  $d$  の探索者が最小化したい評価尺度となる。一方、搜索資源の組合せ分布  $\{l(d)\}$  の情報しか持たない目標が最大化したい期待支払は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} R(\varphi, \pi) &= \sum_{d \in D} l(d) R_d(\varphi^d, \pi) \\ &= \sum_{d \in D} l(d) \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

各タイプの探索者と目標は一見異なる評価尺度 (5) 式と (6) 式をもつが、(5) 式の最小化は (6) 式の最小化でもあるから、 $R(\varphi, \pi)$  を共通の期待支払とするゲームを考え、目標はその最大化プレイヤー、探索者は最小化プレイヤーとして扱えばよい。

## 2.2 均衡解の導出

期待支払  $R(\varphi, \pi)$  は  $\varphi$  に対し凸で、 $\pi$  に対し線形であるから、探索者の純粋戦略である  $\varphi$  と目標の混合戦略である  $\pi$  の組合せに均衡解をもつ。まず  $R(\varphi, \pi)$  に対するミニマックス最適化を行い、最適な搜索資源配分を求めよう。ミニマックス最適化は次式により実行できる。

$$\begin{aligned} \min_{\varphi} \max_{\pi} R(\varphi, \pi) &= \min_{\varphi} \max_{\pi \in \Pi} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{d \in D} l(d) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \\ &= \min_{\varphi} \max_{\omega \in \Omega} \sum_{d \in D} l(d) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、最終的に (7) 式中の  $\max$  以下の最適値を与える変数  $\eta$  を導入すれば、ミニマックス最適化問題は次式で定式化できる。

$$(P_S^A) \quad \min_{\varphi, \eta} \eta$$

$$s.t. \quad \sum_{d \in D} l(d) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \leq \eta, \quad \omega \in \Omega, \quad (8)$$

$$\sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s^d(i, t) \leq \Phi_s^d, \quad s \in S, \quad d \in D, \quad (9)$$

$$\varphi_s^d(i, t) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \hat{\mathbf{T}}, \quad s \in S, \quad d \in D. \quad (10)$$

次に目標の最適パス選択戦略を導出する．問題  $(P_S^A)$  を解いた結果得られる探索者の最適戦略  $\varphi^*$  に対し最適反応となる目標戦略  $\pi^*$  は， $\max_{\pi} R(\varphi^*, \pi)$  の最適解となっているはずである．したがって， $\pi^*$  は次の問題の最適解である．

$$\max_{\pi} R(\varphi^*, \pi) = \max_{\pi} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{d \in D} l(d) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^{*d}(\omega(t), t) \right) \quad (11)$$

次に，タイプ  $d$  の探索者の最適戦略  $\varphi^{*d}$  が目標戦略  $\pi$  に対し最適反応であることを考えれば， $\varphi^{*d}$  は次の凸計画問題の最適解でなければならない．

$$\begin{aligned} (M_d) \quad & \min_{\varphi^d} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s^d(i, t) = \Phi_s^d, \quad s \in S, \\ & \varphi_s^d(i, t) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \hat{\mathbf{T}}, \quad s \in S. \end{aligned} \quad (12)$$

ただし，問題の性質から，(3) 式中の第 1 の不等式制約を等式制約の (12) 式とした．この凸最小化問題の最適解の必要十分条件である KKT 条件を導き，それを整理すれば，次の方程式系を得る．

(i) もし  $\varphi_s^d(i, t) > 0$  ならば，

$$\alpha_i^s \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t' \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s' \in S} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}^d(\omega(t'), t') \right) = \lambda_s^d \quad (13)$$

(ii) もし  $\varphi_s^d(i, t) = 0$  ならば，

$$\alpha_i^s \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t' \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s' \in S} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}^d(\omega(t'), t') \right) \leq \lambda_s^d \quad (14)$$

ただし， $\lambda_s^d$  は最適なラグランジュ乗数であり， $\Omega_{it} \equiv \{\omega \in \Omega | \omega(t) = i\}$  は時刻  $t$  にセル  $i$  を通る目標パス群である．既に得られている探索者の最適戦略  $\varphi^{*d}$  に対する条件 (13), (14) 式は， $\varphi^{*d}$  が目標の戦略  $\pi$  に対して最適反応となるための  $\pi$  の条件と見なすことができる．

以上の (11) 式と，(13) 及び (14) 式から，探索者の既知の最適戦略  $\varphi^*$  に対応する最適な目標戦略  $\pi^*$  は，次の線形計画問題を解いて得られる．

$$\begin{aligned} (P_T^A) \quad & \max_{\pi, \lambda} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{d \in D} l(d) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^{*d}(\omega(t), t) \right) \\ \text{s.t.} \quad & \varphi_s^{*d}(i, t) > 0 \text{ なる } (i, t, s, d) \in \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{T}} \times S \times D \text{ に対し,} \\ & \alpha_i^s \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t' \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s' \in S} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}^{*d}(\omega(t'), t') \right) = \lambda_s^d, \\ & \varphi_s^{*d}(i, t) = 0 \text{ なる } (i, t, s, d) \in \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{T}} \times S \times D \text{ に対し,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i^s \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t' \in \hat{T}} \sum_{s' \in S} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}^{*d}(\omega(t'), t') \right) &\leq \lambda_s^d, \\ \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) &= 1, \\ \pi(\omega) &\geq 0, \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

凸計画問題 ( $P_S^A$ ) が最適解をもつことは、問題の形態から明らかであり、その最適解  $\varphi^*$  を使用して作られた線形計画問題 ( $P_T^A$ ) が必ず最適解  $\pi^*$  を持つことも証明できる。問題 ( $P_T^A$ ) は、探索者の最適戦略である  $\varphi^*$  に対し  $\pi^*$  が最適反応であることと、 $\varphi^*$  が  $\pi^*$  に対し最適反応となる条件から作成されているから、 $(\varphi^*, \pi^*)$  はこのゲームの均衡解を与える。

### 3 複数種探索資源を自由に組み合わせ可能なモデル (モデル B)

ここでは、探索者は探索コスト制約の下で複数の探索資源を自由に組み合わせて使用できるモデル (モデル B) を考える。

#### 3.1 モデル B の前提と定式化

このモデル B は、モデル A の前提 (A3) のみを次の前提で置き換えたモデルである。

(B3) 探索者は、有限数の複数種類の資源を使用できる。種類の集合を  $S$  で表す。探索者は、時点  $\tau$  以降の時間区間  $\hat{T} = \{\tau, \tau + 1, \dots, T\}$  で探索資源を使用できる。種類  $s \in S$  の資源を単位量使用するにはコスト  $c_s$  を要し、探索者は総探索コスト  $C$  の制約下で複数種の探索資源を  $\hat{T}$  の各時点、各セルに分割・投入して目標を探知しようとする。

目標の純粋戦略は 1 本のパス  $\omega \in \Omega$  を選択することであるが、ここでもパス  $\omega$  を選択する確率を  $\pi(\omega)$  とする混合戦略  $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$  を用いる。一方、探索者の純粋戦略を、各時点  $t \in \hat{T}$  での各種類  $s$  の資源のセル  $i$  への投入量  $\varphi_s(i, t)$  を用いた  $\varphi = \{\varphi_s(i, t), i \in \mathbf{K}, t \in \hat{T}, s \in S\}$  で表すと、前提 (B3) から、その実行可能領域は次式で表される。

$$\Psi_B \equiv \left\{ \varphi \left| \sum_{s \in S} c_s \sum_{t \in \hat{T}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s(i, t) \leq C, \varphi_s(i, t) \geq 0, i \in \mathbf{K}, t \in \hat{T}, s \in S \right. \right\} \quad (15)$$

次に支払関数を導出する。探索者が戦略  $\varphi$  を、目標が戦略  $\omega \in \Omega$  をとった場合、(2) 式から、非探知確率は次式で表される。

$$Q(\varphi, \omega) = \exp \left( - \sum_{t \in \hat{T}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s(\omega(t), t) \right) \quad (16)$$

したがって、目標の混合戦略  $\pi$  による期待非探知確率は、

$$Q(\varphi, \pi) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) Q(\varphi, \omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{T}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s(\omega(t), t) \right) \quad (17)$$

となり、目標はこの値を最大化しようとし、探索者は最小化しようとする。

### 3.2 均衡解の導出

期待支払  $Q(\varphi, \pi)$  は  $\varphi$  に対し凸で、 $\pi$  に対し線形であるから、 $\varphi$  と  $\pi$  の組合せに均衡解をもつ。期待支払  $Q(\varphi, \pi)$  をミニマックス最適化することにより、探索者の最適戦略を求める。目標戦略  $\pi$  は (4) 式による実行可能領域をもつから、最大化問題  $\max_{\pi} Q(\varphi, \pi)$  は次式に変形できる。

$$\max_{\pi} Q(\varphi, \pi) = \max_{\omega \in \Omega} Q(\varphi, \omega) = \max_{\omega \in \Omega} \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s(\omega(t), t) \right) \quad (18)$$

上記の変形は、 $\omega \notin \Omega^{B^+}(\varphi) \equiv \{\omega \in \Omega \mid Q(\varphi, \omega) = \max_{p \in \Omega} Q(\varphi, p)\}$  なるパス  $\omega$  に対しては  $\pi(\omega) = 0$  とする目標戦略により実現される。したがって、最終的に (18) 式中の  $\max$  以下の最適値を与える変数  $\eta$  を導入すれば、 $\min_{\varphi} \max_{\pi} Q(\varphi, \pi)$  は次式で定式化できる。

$$\begin{aligned} & \min_{\varphi, \eta} \eta \\ \text{s.t.} \quad & \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s(\omega(t), t) \right) \leq \eta, \quad \omega \in \Omega, \\ & \sum_{s \in S} c_s \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s(i, t) \leq C, \\ & \varphi_s(i, t) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \hat{\mathbf{T}}, \quad s \in S. \end{aligned}$$

ここで、 $\eta = \exp(-\xi)$  なる変数  $\xi$  を  $\eta$  の代わりに導入すれば、上の問題と同値な次の線形計画問題を得る。

$$(P_S^B) \quad \max_{\varphi, \xi} \xi \\ \text{s.t.} \quad \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s(\omega(t), t) \geq \xi, \quad \omega \in \Omega, \quad (19)$$

$$\sum_{s \in S} c_s \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s(i, t) \leq C, \quad (20)$$

$$\varphi_s(i, t) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \hat{\mathbf{T}}, \quad s \in S. \quad (21)$$

次に目標の最適戦略を求めよう。目標は問題  $(P_S^B)$  を解くことにより探索者の最適戦略  $\varphi^*$  を把握した上で  $Q(\varphi^*, \pi)$  を最大化する  $\pi$  を取ろうとするが、この最大化は式 (18) と同じ変形を許す。

$$\begin{aligned} \max_{\pi} Q(\varphi^*, \pi) &= \max_{\pi} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) Q(\varphi^*, \omega) = \max_{\omega \in \Omega} \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^*(\omega(t), t) \right) \\ &= \exp \left( - \min_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^*(\omega(t), t) \right) = \exp(-v^*) \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、 $v^*$  は最適値  $v^* = \min_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^*(\omega(t), t)$  であるが、(19) 式との比較から、 $v^*$  は  $\xi$  の最適値  $\xi^*$  でもあり、 $\exp(-\xi^*)$  が目標が実現できる最大の非探知確率である。

$$\Omega^+(\varphi^*) \equiv \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^*(\omega(t), t) = \xi^* \right\}$$

により、搜索資源配分戦略  $\varphi^*$  に対し最小の総有効搜索資源をもつパス群を表すと、最大化問題 (22) 式に対する最適な  $\pi^*$  は、 $\omega \notin \Omega^+(\varphi^*)$  なる  $\omega$  に対して  $\pi^*(\omega) = 0$  とすることで得られる。ここで、搜索者の最適戦略  $\varphi^*$  に対するこのような最適反応  $\pi^*$  は、非探知確率  $Q(\varphi^*, \pi)$  を最大にする (条件 A) ことを確認しておく。

次に、 $\pi$  に対し最適反応である  $\varphi$  の条件を、最小化問題  $\min_{\varphi \in \Psi_B} Q(\varphi, \pi)$  の最適解の KKT 条件により求める。この KKT 条件を整理すれば、次の方程式系 (条件 B) を得る。ただし、 $\lambda$  は最適なラグランジュ乗数である。

(i) もし  $\varphi_s(i, t) > 0$  ならば、

$$\alpha_i^s \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t' \in \hat{T}} \sum_{s' \in S} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}(\omega(t'), t') \right) = \lambda c_s \quad (23)$$

(ii) もし  $\varphi_s(i, t) = 0$  ならば、

$$\alpha_i^s \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t' \in \hat{T}} \sum_{s' \in S} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}(\omega(t'), t') \right) \leq \lambda c_s \quad (24)$$

この条件を、既知の  $\varphi^*$  が  $\pi$  の最適反応となるための  $\pi$  の条件と見なすことができる。

ここで、最適な  $\pi$  では  $\omega \notin \Omega^+(\varphi^*)$  に対して  $\pi(\omega) = 0$  であった。逆に、 $\pi(\omega) > 0$  の可能性のあるパス  $\omega \in \Omega^+(\varphi^*)$  に対しては、 $\sum_{t'} \sum_{s'} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}^*(\omega(t'), t') = \xi^*$  が成り立つ。これらの性質を適用すれば、式 (23) 及び (24) の左辺は次式に書き換えられる。

$$\alpha_i^s \exp(-\xi^*) \sum_{\omega \in \Omega_{it}^+(\varphi^*)} \pi(\omega) \quad (25)$$

ただし、 $\Omega_{it}$  と  $\Omega^+(\varphi^*)$  の性質を同時に満たすパス集合として次式で定義される  $\Omega_{it}^+(\varphi^*)$  を用いた。

$$\Omega_{it}^+(\varphi^*) \equiv \left\{ \omega \in \Omega \mid \omega(t) = i, \sum_{t' \in \hat{T}} \sum_{s' \in S} \alpha_{\omega(t')}^{s'} \varphi_{s'}^*(\omega(t'), t') = \xi^* \right\}$$

これまで、最適な目標戦略  $\pi$  の満たすべき条件である条件 A と条件 B について議論してきた。それらの条件を満たせば、問題  $(P_S^B)$  の最適解  $\varphi^*$  が  $\pi$  に対する搜索者の最適反応になり、かつ  $\varphi^*$  に対する目標の最適反応が  $\pi$  となることで、均衡解であることを保障することになる。以上により、最適な目標戦略を求めるための定式化は、次のような線形計画問題になる。

$$(P_T^B) \quad \max_{\pi, \lambda} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{T}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi^*(\omega(t), t) \right) \quad (26)$$

s.t.  $\varphi_s^*(i, t) > 0$  なる  $i \in \mathbf{K}, t \in \hat{T}, s \in S$  に対し、

$$\alpha_i^s \exp(-\xi^*) \sum_{\omega \in \Omega_{it}^+(\varphi^*)} \pi(\omega) = \lambda c_s, \quad (27)$$

$\varphi_s^*(i, t) = 0$  なる  $i \in \mathbf{K}, t \in \hat{T}, s \in S$  に対し、

$$\alpha_i^s \exp(-\xi^*) \sum_{\omega \in \Omega_{it}^+(\varphi^*)} \pi(\omega) \leq \lambda c_s, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) &= 1, \\ \pi(\omega) &\geq 0, \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (29)$$

## 4 2つのモデルの関係

ここでは、2節と3節の2つのモデルの関係を考える。モデルAは複数検索資源の組合せが自然が決めた偶然よるとしたモデル、モデルBは搜索者が資源の組合せを決定できるモデルである。問題の設定からすれば、モデルBの方が搜索者の意思決定の自由度が高く、より小さなゲームの値を実現しそうである。このことを確認しよう。

モデルAの期待支払である式(6)には、指数関数の凸性から、

$$\begin{aligned} R(\varphi, \pi) &= \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{d \in D} l(d) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \\ &\geq \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{s \in S} \alpha_{\omega(t)}^s \sum_{d \in D} l(d) \varphi_s^d(\omega(t), t) \right) \end{aligned} \quad (30)$$

の不等式が成り立つが、

$$\varphi_s(i, t) \equiv \sum_{d \in D} l(d) \varphi_s^d(i, t) \quad (31)$$

の置き換えにより、式(30)の最終式はモデルBの期待支払  $Q(\varphi, \pi)$  の式(17)に等しい。

次に、モデルAとBの搜索者の戦略を比較する。戦略  $\varphi_d \in \Psi_d$  の実行可能性条件(3)から、

$$\sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \sum_{d \in D} l(d) \varphi_s^d(i, t) = \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s(i, t) \leq \sum_{d \in D} l(d) \Phi_s^d = \sum_{d \in D} l(d) \frac{\gamma_s^d C}{c_s}$$

であるが、両辺に  $c_s$  を掛けて  $S$  に関して和をとれば、

$$\sum_{s \in S} c_s \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi_s(i, t) \leq \sum_{d \in D} l(d) \left( \sum_{s \in S} \gamma_s^d \right) C = C \sum_{d \in D} l(d) = C$$

となり、モデルBの搜索者の戦略の実行可能条件(15)が得られる。

ここで、モデルAとBの搜索者戦略を区別するため、前者を  $\varphi_A$  で、後者を  $\varphi_B$  と書く。つまり、モデルAに関しては  $\varphi_A = \{\varphi_s^d(i, t)\}$ 、モデルBに関しては  $\varphi_B = \{\varphi_s(i, t)\}$  とする。これまでの議論を整理すれば、任意の  $\varphi_A \in \Psi_A$  に対し定義式(31)で与えられる  $\varphi_B \in \Psi_B$  により  $R(\varphi_A, \pi) \geq Q(\varphi_B, \pi)$ 、つまり  $\max_{\pi} R(\varphi_A, \pi) \geq \max_{\pi} Q(\varphi_B, \pi)$  が成立する。さらに、上述した  $\varphi_A$  と  $\varphi_B$  の実行可能性条件の包含関係から、

$$\min_{\varphi_A \in \Psi_A} \max_{\pi \in \Pi} R(\varphi_A, \pi) \geq \min_{\varphi_B \in \Psi_B} \max_{\pi \in \Pi} Q(\varphi_B, \pi) \quad (32)$$



が成立する．つまり，モデルAのゲームの値はモデルBのゲームの値以上となり，本節の冒頭で述べた予想が正しいことが証明できた．このことから，複数種の資源を組合せ使用する探索者の組合せの確率分布が目標にとって不明な場合，モデルBの最適資源配分  $\varphi_B^* = \{\varphi_s^*(i, t)\}$  から計算される組合せ  $\{\Phi_s = \sum_{i \in \mathbf{K}} \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \varphi_s^*(i, t), s \in S\}$  が目標にとっての最悪のシナリオと見なせる．

## 5 おわりに

この報告では，探索ゲームにおける複数種類の探索資源の組合せ使用に関する2つのシナリオを考え，それぞれを異なる2人ゼロ和ゲームであるモデルAとBにより定式化し，その均衡解を求めた．「はじめに」の節で述べた山岳救難とは異なり，これらのモデルでは探索者と目標は互いに敵対するプレイヤーと仮定したが，両者が協力関係にあれば，当モデルとは取り扱いの異なる協力ゲームとして議論する必要がある，それが将来のテーマである．

## 謝辞

この報告が京都大学数理解析研究所の国際共同利用・共同研究によるご支援をいただいたことに対し，謝辞を述べる．

## 参考文献

- [1] R. Hohzaki and K. Joo: A search allocation game with private information of initial target position, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **58** (4), pp. 353–375, 2015.
- [2] T. Matsuo and R. Hohzaki: A search game with incomplete information about target's energy, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **80** (1), pp.57–76, 2017.
- [3] R. Hohzaki: A search game with incomplete information on detective capability of searcher, *Contributions to Game Theory and Management*, **10**, pp.129-142, 2017.
- [4] 宮田鉄矢, 宝崎隆祐, 佐久間大: 目標・探索者双方が個人情報をもつ情報不完備探索ゲーム, 防衛大学校理工学研究報告, **56** (1), pp.121–130, 2018.