対称群の一般化された類等式とその全単射証明

熊本大学大学院自然科学教育部　西山　雄太
Yuta Nishiyama
Graduate School of Science and Technology
Kumamoto University

1　導入

Hall-Littlewood 多項式 $P_\lambda(t)$ は分割によって添字付けられた対称多項式の族の一つであり，Hall と Littlewood [2] によって導入された．Hall-Littlewood 多項式はパラメータ t を持ち，単項対称多項式や Schur 多項式を一般化したものとみなすことができる．Macdonald [3] はこれを更に一般化し， Macdonald 多項式 $P_\lambda(q,t)$ を導入した．Macdonald 多項式は 2 つのパラメータを持つ対称多項式の族の一つであり，パラメータの特殊化により Hall-Littlewood 多項式が得られる．

対称多項式のなす空間には，冪和対称多項式が直交基底となるような内積を定義することができる．この内積の原型は， Redfield [6] およびその後に Hall [1] によって導入された．この内積の値の計算によって，パラメータを含むいくつかの恒等式が得られる．本稿では Hall-Littlewood 多項式や Macdonald 多項式の内積の値を計算することにより得られる恒等式を紹介し，さらにその全単射法を用いた別証明を与える．

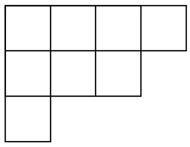
2　準備

まず分割に関するいくつかの概念を準備した上で，本稿で扱う定理を述べる．なお本稿では，$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ とする．

広義単調減少な正の整数の有限列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l)$ を分割という．ただし，成分を持たない $\emptyset$ も分割であるとする．全ての分割からなる集合を $\mathscr{P}$ とおく．分割

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ について，$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$ と定める．$|\lambda| = n$ となるとき λ を n の分割といい，このことを $\lambda \vdash n$ と書く．$n \in \mathbb{N}$ について $\mathscr{P}(n) = \{\lambda \in \mathscr{P} \mid \lambda \vdash n\}$ と定める．また $l(\lambda) = l$ と定め，これを λ の長さという．

分割 λ について，左端を揃えて第 i 行に λ_i 個の正方形を並べたものを λ の Young 図形という．例えば，8 の分割 $(4, 3, 1)$ の Young 図形は以下のようになる．



分割 λ と $k \geq 1$ について，$m_k(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j = k\}$ と定め，これを λ における k の重複度という．重複度を用いて，$\lambda = \left(1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \cdots\right)$ とも書く．また，分割 λ について $z_\lambda = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} k^{m_k(\lambda)} m_k(\lambda)!$ と定める．

以上の準備のもとで，定理を述べることができる：

定理 2.1. $n \in \mathbb{N}$ について，q, t についての形式的冪級数として以下の恒等式が成り立つ：

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1 - qt^{i-1}}{1 - t^i} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}.$$

定理 2.1 において特に $q = 0$ とすると，次が得られる：

定理 2.2. $n \in \mathbb{N}$ について，t についての形式的冪級数として以下の恒等式が成り立つ：

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t^i} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1}{1 - t^{\lambda_i}}.$$

定理 2.2 においてさらに $t = 0$ とすると，対称群の類等式を得ることができる．

3　対称多項式を用いた定理の証明

定理 2.2 および定理 2.1 を，対称多項式の内積を計算することによって証明する．以下，$n \in \mathbb{N}$ を 1 つとり固定する．

3.1　対称多項式についての準備

まず対称多項式についていくつかの概念を準備する．

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は変数の置換により n 変数多項式環に作用する．多項式環の，この作用によって不変な元を対称多項式と呼ぶ．$\mathbb{Q}$ 係数の n 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に属する全ての対称多項式からなる集合を Λ_n とおく．Λ_n は $\mathbb{Q}$ 上の線型空間である．

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ について $x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}\cdots{x_n}^{\alpha_n}$ とおき，これを用いて $l(\lambda) \leq n$ なる分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l(\lambda)})$ について $m_\lambda = m_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_\alpha x^\alpha$ と定める．ただしここで，α は λ の成分を並び替えることによって得られる相異なる $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 全体を動く．$l(\lambda) \leq n$ なる λ について，m_λ は Λ_n の元である．これを λ に対応する単項 (monomial) 対称多項式という．$\{m_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}, l(\lambda) \leq n\}$ は Λ_n の基底をなす．

Λ_n の基底をさらに 2 つ導入する．まず $\lambda_1 \leq n$ なる分割 λ について，λ に対応する基本 (elementary) 対称多項式 $e_\lambda = e_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を

$$e_\lambda = e_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_{\left(1^{\lambda_1}\right)} m_{\left(1^{\lambda_2}\right)} \cdots m_{\left(1^{\lambda_{l(\lambda)}}\right)}$$

により定める．$\{e_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}, \lambda_1 \leq n\}$ は Λ_n の基底をなす [5, Theorem 5.3.5.]．また分割 λ について，λ に対応する冪和 (power sum) 対称多項式 $p_\lambda = p_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を

$$p_\lambda = p_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_{(\lambda_1)} m_{(\lambda_2)} \cdots m_{\left(\lambda_{l(\lambda)}\right)}$$

により定める．$\{p_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}, l(\lambda) \leq n\}$ は Λ_n の基底をなす [5, Theorem 5.3.9.]．基本対称多項式と冪和対称多項式の間には次の関係がある：

命題 3.1 ([4, Chapter I, (2.14')])**.** $e_{(n)} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\epsilon_\lambda}{z_\lambda} p_\lambda$ が成り立つ．ただしここで，分割 λ について $\epsilon_\lambda = \prod_{i=1}^{\infty} (-1)^{(i-1)m_i(\lambda)}$ である．

3.2 定理 2.2 の証明

前節までの準備を踏まえ，さらにいくつかの概念を準備した上で，対称多項式を用いて定理 2.2 を証明する．

$\Lambda_{t,n} = \Lambda_n \otimes \mathbb{Q}(t)$ とおく．すなわち，$\Lambda_{t,n}$ は $\mathbb{Q}(t)$ 係数の多項式環 $\mathbb{Q}(t)[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に属する，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の置換によって不変な元のなす集合である．$\Lambda_{t,n}$ は $\mathbb{Q}(t)$ 上の線型空間をなす．$\Lambda_{t,n}$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ を

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_t = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1}{1 - t^{\lambda_i}} \quad (\lambda, \mu \in \mathscr{P}, l(\lambda), l(\mu) \leq n)$$

により定義する．ただし $\delta_{\lambda\mu}$ は Kronecker のデルタである．また，$l(\lambda) \leq n$ なる分割 λ について，λ に対応する Hall-Littlewood 多項式 $P_\lambda(t) = P_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \in \Lambda_{t,n}$ を以下により定める：

$$\begin{aligned} P_\lambda(t) =& P_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \\ =& \left(\prod_{i \geq 0} \prod_{j=1}^{m_i(\lambda)} \frac{1-t}{1-t^j} \right) \sum_{w \in S_n} w \left(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right). \end{aligned}$$

ただしここで，$m_0(\lambda) = n - l(\lambda)$ とする．特に $\lambda = (1^n)$ の場合，$P_{(1^n)}(t) = e_{(n)}$ となる [4, Chapter III, (2.8)]．Hall-Littlewood 多項式の内積について，次が成り立つ：

命題 3.2 ([4, Chapter III, (4.9)])**.** 分割 λ, μ について，$\langle P_\lambda(t), Q_\mu(t) \rangle_t = \delta_{\lambda\mu}$．ただし，分割 μ について $Q_\mu(t) = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m_i(\mu)} (1-t^j) \right) P_\mu(t)$ である．

以上の準備により, 定理 2.2 を証明することができる．(1^n) に対応する Hall-Littlewood 多項式 $P_{(1^n)}(t)$ の内積を計算すると

$$\begin{aligned} \langle P_{(1^n)}(t), P_{(1^n)}(t) \rangle_t =& \langle e_{(n)}, e_{(n)} \rangle_t = \left\langle \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\epsilon_\lambda}{z_\lambda} p_\lambda, \sum_{\mu \vdash n} \frac{\epsilon_\mu}{z_\mu} p_\mu \right\rangle_t = \sum_{\lambda, \mu \vdash n} \frac{\epsilon_\lambda \epsilon_\mu}{z_\lambda z_\mu} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle_t \\ =& \sum_{\lambda \vdash n} \frac{{\epsilon_\lambda}^2}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1}{1-t^{\lambda_i}} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1}{1-t^{\lambda_i}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P_{(1^n)}(t), P_{(1^n)}(t) \rangle_t &= \left\langle P_{(1^n)}(t), \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^i} \right) Q_{(1^n)}(t) \right\rangle_t \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^i} \right) \langle P_{(1^n)}(t), Q_{(1^n)}(t) \rangle_t = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^i} \end{aligned}$$

が得られるから，定理 2.2 が成り立つ．

3.3　定理 2.1 の証明

定理 2.2 と同様に，対称多項式を用いて定理 2.1 を証明する．

$\Lambda_{q,t,n} = \Lambda_n \otimes \mathbb{Q}(q,t)$ とおく．すなわち，$\Lambda_{q,t,n}$ は $\mathbb{Q}(q,t)$ 係数の多項式環 $\mathbb{Q}(q,t)[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に属する，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の置換によって不変な元の集合である．

$\Lambda_{q,t,n}$ は $\mathbb{Q}(q,t)$ 上の線型空間をなす．$\Lambda_{q,t,n}$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$ を

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}} \quad (\lambda, \mu \in \mathscr{P}, l(\lambda), l(\mu) \leq n)$$

により定義する．また $\mathscr{P}(n)$ の半順序関係 $\leq$ を

$$\mu \leq \lambda \iff \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \quad (\lambda, \mu \in \mathscr{P}(n))$$

により定める．ただし，$l(\lambda) < j$ なる j については $\lambda_j = 0$ とする（μ についても同様である）．この内積と半順序について，以下が成り立つ：

命題 3.3 ([4, Chapter VI, (4.7)])**.** 以下を満たす $\Lambda_{q,t,n}$ の元の族 $\{P_\lambda(q,t)\}_{\lambda \vdash n}$ が一意的に定まる：

1. 以下を満たす

$$\begin{array}{cccc} u: & \{(\lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathscr{P}(n), \mu \leq \lambda\} & \to & \mathbb{Q}(q,t) \\ & \cup & & \cup \\ & (\lambda, \mu) & \mapsto & u_{\lambda\mu} \end{array}$$

が存在する：

（a）$\lambda \in \mathscr{P}(n)$ について，$P_\lambda(q,t) = \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ \mu \leq \lambda}} u_{\lambda\mu} m_\mu$.

（b）$\lambda \in \mathscr{P}(n)$ について，$u_{\lambda\lambda} = 1$.

2. $\lambda \neq \mu$ なる $\lambda, \mu \in \mathscr{P}(n)$ について，$\langle P_\lambda(q,t), P_\mu(q,t) \rangle_{q,t} = 0$.

これにより定まる対称多項式 $P_\lambda(q,t)$ を Macdonald 多項式という．特に $\lambda = (1^n)$ の場合，$P_\lambda(t)$ の場合と同様に $P_{(1^n)}(q,t) = e_{(n)}$ となる [4, Chapter VI, (4.8)]．また，Macdonald 多項式の内積の値について，次が知られている：

命題 3.4 ([4, Chapter VI, (6.19)])**.** 分割 λ について，

$$\langle P_\lambda(q,t), P_\lambda(q,t) \rangle_{q,t} = \prod_{s \in \lambda} \frac{1 - q^{a(s)+1} t^{l(s)}}{1 - q^{a(s)} t^{l(s)+1}}$$

となる．ただし右辺の積は λ の Young 図形に含まれる各正方形 s についてのものであり，正方形 s について $a(s)$ は s と同じ行で s よりも右にある正方形の数，$l(s)$ は s と同じ列で s よりも下にある正方形の数である．

以上の準備により，定理 2.1 を証明することができる．(1^n) に対応する Macdonald 多項式 $P_{(1^n)}(q,t)$ の内積を計算すると

$$\begin{aligned}\langle P_{(1^n)}(q,t), P_{(1^n)}(q,t)\rangle_{q,t} =& \langle e_{(n)}, e_{(n)}\rangle_{q,t} = \left\langle \sum_{\lambda\vdash n}\frac{\epsilon_\lambda}{z_\lambda}p_\lambda, \sum_{\mu\vdash n}\frac{\epsilon_\mu}{z_\mu}p_\mu \right\rangle_{q,t}\\ =& \sum_{\lambda,\mu\vdash n}\frac{\epsilon_\lambda\epsilon_\mu}{z_\lambda z_\mu}\langle p_\lambda, p_\mu\rangle_{q,t} = \sum_{\lambda\vdash n}\frac{{\epsilon_\lambda}^2}{z_\lambda}\prod_{i=1}^{l(\lambda)}\frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}\\ =& \sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{z_\lambda}\prod_{i=1}^{l(\lambda)}\frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}},\end{aligned}$$

$$\langle P_{(1^n)}(q,t), P_{(1^n)}(q,t)\rangle_{q,t} = \prod_{s\in(1^n)}\frac{1-q^{a(s)+1}t^{l(s)}}{1-q^{a(s)}t^{l(s)+1}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1-qt^{n-i}}{1-t^{n-i+1}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1-qt^{i-1}}{1-t^i}$$

が得られるから，定理 2.1 が成り立つ．

4　全単射法を用いた定理の証明

定理 2.2 および定理 2.1 を，適当な全単射を構成することによって証明する．以下，$n\in\mathbb{N}$ を 1 つとり固定する．

4.1　定理 2.2 の証明

$d\in\mathbb{N}$ について

$$A_{n,d} = \left\{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \;\middle|\; a_i\in\mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot i = d\right\}$$

とおくと，

$$n!\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-t^i} = n!\prod_{i=1}^{n}(1+t^i+t^{2i}+\cdots) = n!\sum_{d=0}^{\infty}|A_{n,d}|t^d = \sum_{d=0}^{\infty}|A_{n,d}\times\mathfrak{S}_n|t^d$$

となる．また，$\lambda\vdash n$，$d\in\mathbb{N}$ について

$$B_{\lambda,d} = \left\{(b_1,b_2\ldots,b_{l(\lambda)}) \;\middle|\; b_i\in\mathbb{N}, \sum_{i=1}^{l(\lambda)} b_i\cdot\lambda_i = d\right\}$$

とおき $\lambda \vdash n$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の共役類を C_λ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\vdash n}\frac{n!}{z_\lambda}\prod_{i=1}^{l(\lambda)}\frac{1}{1-t^{\lambda_i}} &= \sum_{\lambda\vdash n}\frac{n!}{z_\lambda}\prod_{i=1}^{l(\lambda)}(1+t^{\lambda_i}+t^{2\lambda_i}+\cdots) = \sum_{\lambda\vdash n}|C_\lambda|\sum_{d=0}^{\infty}|B_{\lambda,d}|t^d \\ &= \sum_{\lambda\vdash n}\sum_{d=0}^{\infty}|B_{\lambda,d}||C_\lambda|t^d = \sum_{d=0}^{\infty}\left|\bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times C_\lambda)\right|t^d\end{aligned}$$

が得られる．したがって，定理 2.2 を証明するには $d \in \mathbb{N}$ について全単射

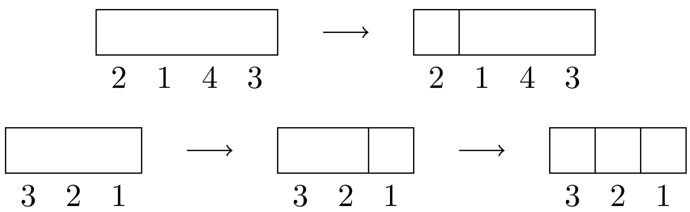
$$f_{n,d} : A_{n,d}\times\mathfrak{S}_n \to \bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times C_\lambda)$$

を作ればよい．そこで $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_{n,d}$，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について，

$$f_{n,d}\big((a_1,a_2,\ldots,a_n),\sigma\big) \in \bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times C_\lambda)$$

を以下のアルゴリズムにより定める：

- **ステップ 1.** d の分割 $(1^{a_1}2^{a_2}\cdots n^{a_n})$ の Young 図形の輪郭を描き，これを深さごとに縦に区切る．
- **ステップ 2.** Young 図形の各列に，左から数 $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ を書き入れる．ここで Young 図形の横幅が n 未満の場合は，横幅が n となるように Young 図形の右側に深さ 0 の列を付け加えた上で各列に数を書き入れる．
- **ステップ 3.** Young 図形の区切られた各部分について，その最も左の列に書き入れられた数がその部分の中で最も小さくなければ，その部分の中で最も小さい数が書き入れられた列とその左隣の列の間で部分を分ける．これによりできた左側の部分についても同じ操作を繰り返し，それぞれの部分について最も左の列に最も小さい数が書き入れられているようにする．1 回の操作および 2 回の操作でステップが完了する図形の例を下に挙げる．

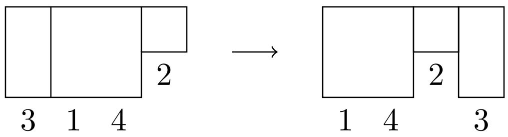


- **ステップ 4.** Young 図形の各部分を，以下の規則により並べ替える：
  1. 横幅の広いものがより左側にあるようにする．

2. 横幅の同じ部分が複数ある場合は，最も左に書き入れられている数がより小さい部分がより左側にあるようにする．

- **ステップ 5.** 部分の数を l とし，各 $1 \leq i \leq l$ について左から i 番目の部分の横幅を λ_i，深さを b_i とおく．これにより，n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ が定まる．左から i 番目の部分の各列に書き入れられている数が左から $j_{i,1}, j_{i,2}, \ldots, j_{i,\lambda_i}$ となっているとき，$\sigma_i = (j_{i,1}, j_{i,2}, \ldots, j_{i,\lambda_i}) \in \mathfrak{S}_n$ とおく．
- **ステップ 6.** $f_{n,d}\big((a_1, a_2, \ldots, a_n), \sigma\big) = \big((b_1, b_2, \ldots, b_{l(\lambda)}), \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{l(\lambda)}\big) \in B_{\lambda,d} \times C_\lambda$ と定める．

例えば $(0,0,1,1) \in A_{4,7}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$ について，ステップ 3 までを行うと以下の左側の図形，ステップ 4 までを行うと以下の右側の図形が得られる．



したがって，

$$f_{4,7}\left((0,0,1,1), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = \big((2,1,2), (1,4)(2)(3)\big) \in B_{(2,1,1),7} \times C_{(2,1,1)}$$

となる．

このアルゴリズムは可逆であるから，これにより定まる $f_{n,d}$ は全単射である．

4.2　定理 2.1 の証明

$e, k \in \mathbb{N}$ について

$$D_{n,e,k} = \left\{ J \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\} \;\middle|\; |J| = e, \sum_{j \in J} j = k \right\}$$

とおくと，

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - qt^{i-1}) = \sum_{e=0}^{n} \left(\sum_{d'=0}^{\infty} |D_{n,e,d'}| t^{d'} \right) (-q)^e$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
n!\prod_{i=1}^{n}\frac{1-qt^{i-1}}{1-t^{i}} &= n!\prod_{i=1}^{n}(1-qt^{i-1})\cdot\prod_{i=1}^{n}(1+t^{i}+t^{2i}+\cdots) \\
&= |\mathfrak{S}_n|\sum_{e=0}^{n}\left(\sum_{d'=0}^{\infty}|D_{n,e,d'}|t^{d'}\right)(-q)^{e}\cdot\sum_{d=0}^{\infty}|A_{n,d}|t^{d} \\
&= \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{e=0}^{n}(-1)^{e}\left|\bigsqcup_{k=0}^{d}(A_{n,d-k}\times D_{n,e,k}\times\mathfrak{S}_n)\right|t^{d}q^{e}
\end{aligned}$$

となる．また，$\lambda\vdash n$，$e\in\mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned}
E^{+}_{\lambda,e} &= \left\{J\subseteq\{1,2,\ldots,l(\lambda)\}\ \middle|\ \sum_{j\in J}\lambda_j=e,|J|:\text{偶数}\right\}, \\
E^{-}_{\lambda,e} &= \left\{J\subseteq\{1,2,\ldots,l(\lambda)\}\ \middle|\ \sum_{j\in J}\lambda_j=e,|J|:\text{奇数}\right\}
\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda\vdash n}\frac{n!}{z_\lambda}\prod_{i=1}^{l(\lambda)}\frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}} \\
&= \sum_{\lambda\vdash n}\frac{n!}{z_\lambda}\left(\prod_{i=1}^{l(\lambda)}(1+t^{\lambda_i}+t^{2\lambda_i}+\cdots)\cdot\prod_{i=1}^{l(\lambda)}(1-q^{\lambda_i})\right) \\
&= \sum_{\lambda\vdash n}|C_\lambda|\left(\sum_{d=0}^{\infty}|B_{\lambda,d}|t^{d}\cdot\sum_{e=0}^{n}\left(\left|E^{+}_{\lambda,e}\right|-\left|E^{-}_{\lambda,e}\right|\right)q^{e}\right) \\
&= \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{e=0}^{n}\sum_{\lambda\vdash n}\left(|B_{\lambda,d}|\left|E^{+}_{\lambda,e}\right||C_\lambda|-|B_{\lambda,d}|\left|E^{-}_{\lambda,e}\right||C_\lambda|\right)t^{d}q^{e} \\
&= \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{e=0}^{n}\left(\left|\bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times E^{+}_{\lambda,e}\times C_\lambda)\right|-\left|\bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times E^{-}_{\lambda,e}\times C_\lambda)\right|\right)t^{d}q^{e}
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，定理 2.1 を証明するには $d\in\mathbb{N}$ と $0\leq e\leq n$ なる偶数 e について全単射

$$\begin{aligned}
g_{n,d,e}:&\left(\bigsqcup_{k=0}^{d}(A_{n,d-k}\times D_{n,e,k}\times\mathfrak{S}_n)\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times E^{-}_{\lambda,e}\times C_\lambda)\right) \\
&\to\bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times E^{+}_{\lambda,e}\times C_\lambda),
\end{aligned}$$

$d \in \mathbb{N}$ と $0 \leq e \leq n$ なる奇数 e について全単射

$$g_{n,d,e} : \left(\bigsqcup_{k=0}^{d} (A_{n,d-k} \times D_{n,e,k} \times \mathfrak{S}_n) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\lambda \vdash n} (B_{\lambda,d} \times E^{+}_{\lambda,e} \times C_\lambda) \right) \to \bigsqcup_{\lambda \vdash n} (B_{\lambda,d} \times E^{-}_{\lambda,e} \times C_\lambda)$$

を作ればよい．

ここでは，$d \in \mathbb{N}$ と $0 \leq e \leq n$ なる偶数 e について全単射 $g_{n,d,e}$ を構成する．このためには，$\bigsqcup_{k=0}^{d} (A_{n,d-k} \times D_{n,e,k} \times \mathfrak{S}_n)$，$\bigsqcup_{\lambda \vdash n} (B_{\lambda,d} \times E^{-}_{\lambda,e} \times C_\lambda)$ の元に対して $\bigsqcup_{\lambda \vdash n} (B_{\lambda,d} \times E^{+}_{\lambda,e} \times C_\lambda)$ の元を対応させるアルゴリズムを作る必要がある．

まず $0 \leq k \leq d$ なる k および $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_{n,d-k}$，$J \in D_{n,e,k}$，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について，

$$g_{n,d,e}\big((a_1, a_2, \ldots, a_n), J, \sigma\big) \in \bigsqcup_{\lambda \vdash n} (B_{\lambda,d} \times E^{+}_{\lambda,e} \times C_\lambda)$$

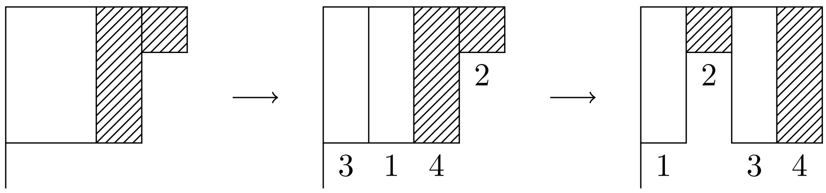
を対応させるアルゴリズムを以下により定める：

- **ステップ 1.** $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_e\}$ なる $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_e \leq n-1$ をとり，$(1^{a_1} 2^{a_2} \cdots n^{a_n})$ に成分 $j_1, j_2, \ldots, j_e$ を付け加えて得られる d の分割の Young 図形の輪郭を描く．ただし，$j_1 = 0$ の場合は Young 図形の最も下に長さ 0 の行があるものとする．さらに，この Young 図形を深さごとに縦に区切る．
- **ステップ 2.** $1 \leq m \leq e$ について，ステップ 1 より Young 図形には長さ j_m の行が存在する．このような行のうち，最も上にある行を第 i_m 行とおく．
- **ステップ 3.** $1 \leq m \leq e$ について， ステップ 2 より Young 図形には深さ $i_m - 1$ の列が存在する．このような列のうち，最も右にあるものを線で区切り，これに色を塗る．
- **ステップ 4.** ステップ 3 までで得られた図形に対し定理 2.2 の証明で用いた $f_{n,d}$ を定めるアルゴリズムのステップ 2 からステップ 6 を行い，対応する $\lambda \vdash n$，$(b_1, b_2, \ldots, b_{l(\lambda)}) \in B_{\lambda,d}$，$\sigma \in C_\lambda$ を得る．また，この操作を完了した時点で

$$J' = \{j \in \{1, 2, \ldots, l(\lambda)\} \mid \text{左から } j \text{ 番目の部分が色で塗られている}\} \in E^{+}_{\lambda,e}$$

とおく．
- **ステップ 5.** $g_{n,d,e}\big((a_1, a_2, \ldots, a_n), J, \sigma\big) = \big((b_1, b_2, \ldots, b_{l(\lambda)}), J', \sigma\big) \in B_{\lambda,d} \times E^{+}_{\lambda,e} \times C_\lambda$ と定める．

例として $n=4$，$d=10$，$e=2$ とし，$(0,0,1,1)\in A_{4,7}$，$\{0,3\}\in D_{4,2,3}$，$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_4$ についてこのアルゴリズムを実行する．この場合は $j_1=0$，$j_2=3$ であるから，ステップ 1 では分割 $\left(1^0 2^0 3^1 4^1\right)=(4,3)$ に $0,3$ を付け加えてできる分割 $(4,3,3,0)$ の Young 図形の輪郭を描く．$i_1=4$，$i_2=2$ であるから，ステップ 3 までを行うと以下の左側の図形が得られる．ステップ 4 では定理 2.2 の証明で用いた $f_{n,d}$ を定めるアルゴリズムのステップ 2 からステップ 6 を行うが，この中のステップ 3 までを行うと以下の中央の図形，ステップ 4 までを行うと以下の右側の図形が得られる．



したがって，

$$\begin{aligned}g_{4,10,2}\left((0,0,1,1),\{0,3\},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\right)=&\big((3,1,3,3),\{2,4\},(1)(2)(3)(4)\big)\\ \in&B_{(1,1,1,1),10}\times E^+_{(1,1,1,1),2}\times C_{(1,1,1,1)}\end{aligned}$$

となる．

次に $\mu\vdash n$ および $(b_1,b_2,\ldots,b_{l(\mu)})\in B_{\mu,d}$，$J\in E^-_{\mu,e}$，$\tau\in C_\mu$ について，

$$g_{n,d,e}\big((b_1,b_2,\ldots,b_{l(\lambda)}),J,\tau\big)\in\bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times E^+_{\lambda,e}\times C_\lambda)$$

を対応させるアルゴリズムを以下により定める：

- **ステップ 1.** $\big((b_1,b_2,\ldots,b_{l(\mu)}),\tau\big)\in B_{\mu,d}\times C_\mu$ について定理 2.2 の証明で用いた $f_{n,d}$ を定めるアルゴリズムのステップ 6，ステップ 5 を逆にたどり，各部分の横幅が $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{l(\mu)}$，各部分の深さが $b_1,b_2,\ldots,b_{l(\mu)}$ で与えられる図形を作る．この図形の各列に書かれた数は τ に対応している．
- **ステップ 2.** $j\in J$ なる $1\le j\le l(\mu)$ について，図形の左から j 番目の部分に色を塗る．$J\in E^-_{\mu,e}$ より，このとき色が塗られる列は合計 e 列ある．
- **ステップ 3.** 図形の各部分を，以下の規則により並べ替える：
  1. 深いものがより左側にあるようにする．
  2. 深さの同じ部分が複数ある場合は，色が塗られているものが左側にあるようにする．

3. 深さも塗られ方も同じ部分が複数ある場合には，最も左に書き入れられている数がより小さい部分がより左側にあるようにする．

- **ステップ 4.** $J \in E^-_{\mu,e}$ より $|J| < e$ であるから，色付きの列が 2 列以上ある深さが存在する．そこで，このような深さのうち最も深いものを a とおく．
- **ステップ 5.** 色の付いた深さ a の各部分を，左から $X_1, X_2, \ldots$ とおく．各 j について X_j の各列に書かれている数を左から $q_{j,1}, q_{j,2}, \ldots$ とおき，置換 ρ を

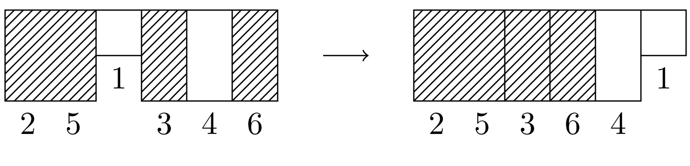
$$\rho = (q_{1,1}, q_{1,2}, \ldots)(q_{2,1}, q_{2,2}, \ldots) \cdots$$

により定める．$\{q_{1,1}, q_{1,2}, \ldots\} \cup \{q_{2,1}, q_{2,2}, \ldots\} \cup \cdots$ に含まれる最も小さい 2 つの数を i_1, i_2 とする．ただしこのとき，$i_1 < i_2$ とする．
- **ステップ 6.** $(i_1, i_2)\rho$ の巡回置換分解を $(r_{1,1}, r_{1,2}, \ldots)(r_{2,1}, r_{2,2}, \ldots) \cdots$ とする．各 j について，巡回置換成分 $(r_{j,1}, r_{j,2}, \ldots)$ の長さを横幅とし，各列に左から数 $r_{j,1}, r_{j,2}, \ldots$ が書かれた，色の付いた深さ a の部分 Y_j を作る．部分 $Y_1, Y_2, \ldots$ を左から並べ，これをステップ 3 までで作った図形の，色の付いた深さ a の部分全てと取り替える．
- **ステップ 7.** 定理 2.2 の証明で用いた $f_{n,d}$ を定めるアルゴリズムのステップ 4 と同じ方法で，各部分を並べ替える．
- **ステップ 8.** 定理 2.2 の証明で用いた $f_{n,d}$ を定めるアルゴリズムのステップ 5，ステップ 6 により，対応する $\lambda \vdash n$ および $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_{l(\lambda)}) \in B_{\lambda,d}$，$\sigma \in C_\lambda$ をとる．さらに，

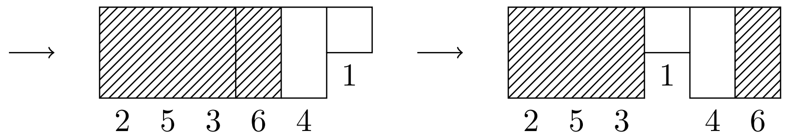
$$J' = \{j \mid 左から\ j\ 番目の部分が色で塗られている\ \} \in E^+_{\lambda,e}$$

とおく．
- **ステップ 9.** $g_{n,d,e}\big((b_1, b_2, \ldots, b_{l(\mu)}), J, \tau\big) = \big((b'_1, b'_2, \ldots, b'_{l(\lambda)}), J', \sigma\big) \in B_{\lambda,d} \times E^+_{\lambda,e} \times C_\lambda$ と定める．

例として $n = 6$，$d = 11$，$e = 4$ とし，$(2,1,1,1,1) \vdash 6$ および $(2,1,2,2,2) \in B_{(2,1,1,1,1),11}$，$\{1,3,5\} \in E^-_{(2,1,1,1,1),4}$，$(2,5)(1)(3)(4)(6) \in C_{(2,1,1,1,1)}$ についてこのアルゴリズムを実行する．まずステップ 2 までを行うと以下の左側の図形が得られ，さらにステップ 3 までを行うと右側の図形が得られる．



このとき $a=2$，$\rho=(2,5)(3)(6)$，$i_1=2$，$i_2=3$ となる．$(i_1,i_2)\rho=(2,3)(2,5)(3)(6)=(2,5,3)(6)$ であるから，ステップ 6 までを行うと以下の左側，ステップ 7 までを行うと以下の右側の図形が得られる．



したがって，

$$\begin{aligned} g_{6,11,4}\big((2,1,2,2,2),\{1,3,5\},(2,5)(1)(3)(4)(6)\big) =& \big((2,1,2,2),\{1,4\},(2,5,3)(1)(4)(6)\big) \\ \in& B_{(3,1,1,1),11}\times E^{+}_{(3,1,1,1),4}\times C_{(3,1,1,1)} \end{aligned}$$

となる．

以上により，写像 $g_{n,d,e}$ を構成することができる．それぞれのアルゴリズムは可逆であり，また $\bigsqcup_{\lambda\vdash n}(B_{\lambda,d}\times E^{+}_{\lambda,e}\times C_\lambda)$ は第 1 のアルゴリズムの像と第 2 のアルゴリズムの像の交わりを持たない合併となっている．したがって，$g_{n,d,e}$ は全単射である．$d\in\mathbb{N}$ と $0\le e\le n$ なる奇数 e についても，全単射 $g_{n,d,e}$ を同様のアルゴリズムにより定めることができる．

謝辞

本稿は， RIMS 共同研究『表現論とその組合せ論的側面』での講演を基にしたものです．世話人を務めて頂いた石川雅雄氏，研究集会の際に有益な助言を頂いた沼田泰英氏にこの場を借りて厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] P. Hall, The Algebra of Partitions, Proc. 4th Canadian Math. Congress (1959), 147-159.

[2] D. E. Littlewood, On Certain Symmetric Functions, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **11** (1961), 485-498.

[3] I. G. Macdonald, A New Class of Symmetric Functions, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, Actes 20^e Séminaire Lotharingien (1988), 131-171.

[4] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford Mathematical Monographs (2nd ed.), Oxford University Press, 1995.

[5] A. Prasad, Representation Theory: A Combinatorial Viewpoint, Cambridge University Press, 2015.

[6] J. H. Redfield, The Theory of Group-Reduced Distributions, Amer. J. Math., **49** (1927), 433-455.