

ALCOVE PATHS AND GELFAND-TSETLIN PATTERNS

京都大学数理解析研究所 渡邊英也

HIDEYA WATANABE

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY

1. 導入

\mathfrak{g} を複素半単純リー代数とする。 P を \mathfrak{g} のウェイト格子、 P_+ を優整ウェイトの集合とする。 \mathfrak{g} の有限次元既約表現は最高ウェイトという不変量で分類されることがよく知られている。有限次元既約表現の最高ウェイトは P_+ の元である。 $\lambda \in P_+$ を最高ウェイトとする \mathfrak{g} の有限次元既約表現を $V(\lambda)$ と書くことにする。 $V(\lambda)$ の構造を統一的に記述することは、リー代数の表現論において非常に重要な問題である。

この問題に対しては様々なアプローチがあるが、 \mathfrak{g} が A 型、すなわち $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ (特殊線形リー代数) の場合は特に種類が多い。本稿では Gelfand-Tsetlin パターンとアルコブ・パス模型について概説し、両者の関係について述べる。Gelfand-Tsetlin パターンや、以下で述べる結晶基底、ストリング・データについては、例えば [1] にまとまっている。アルコブ・パスについては [2, 3, 4] を参照されたい。本稿は山村圭太氏との共同研究 [5] に基づく。

以下、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ とし、次の記号をよく使う：

- $I = \{1, \dots, n-1\}$.
- $\alpha_i, i \in I$: 単純ルート .
- $h_i, i \in I$: 単純コルート .

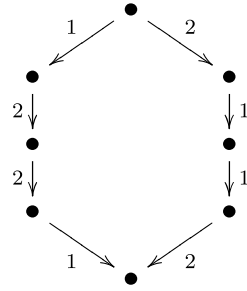
2. 結晶基底

V を \mathfrak{g} の表現とする。 V の結晶基底 \mathcal{B} とは、写像 $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow P$, $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ ($i \in I$) を持ち、様々な条件を満たすもののことを言う。 \mathcal{B} を頂点集合とし、 $\tilde{f}_i(b) = b'$ なる頂点 b から頂点 b' をラベル i の矢印で繋いで得られる色付き有向グラフを \mathcal{B} の結晶グラフと呼ぶ。次はよく知られている事実である。

命題 2.1. $\lambda \in P_+$ とする。

- (1) $V(\lambda)$ は唯一の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を持つ。
- (2) $|\mathcal{B}(\lambda)| = \dim V(\lambda)$.
- (3) $\text{wt}(b_\lambda) = \lambda$ なる $b_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$ が唯一つ存在する。
- (4) b_λ は、結晶グラフにおける唯一のソースである。すなわち、各 $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ は $b = \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l}(b_\lambda)$, $i_1, \dots, i_l \in I$ と書ける。

例 2.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\lambda \in P_+$, $\lambda(h_1) = \lambda(h_2) = 1$ とする。 $\mathcal{B}(\lambda)$ の結晶グラフは次の通りになる。

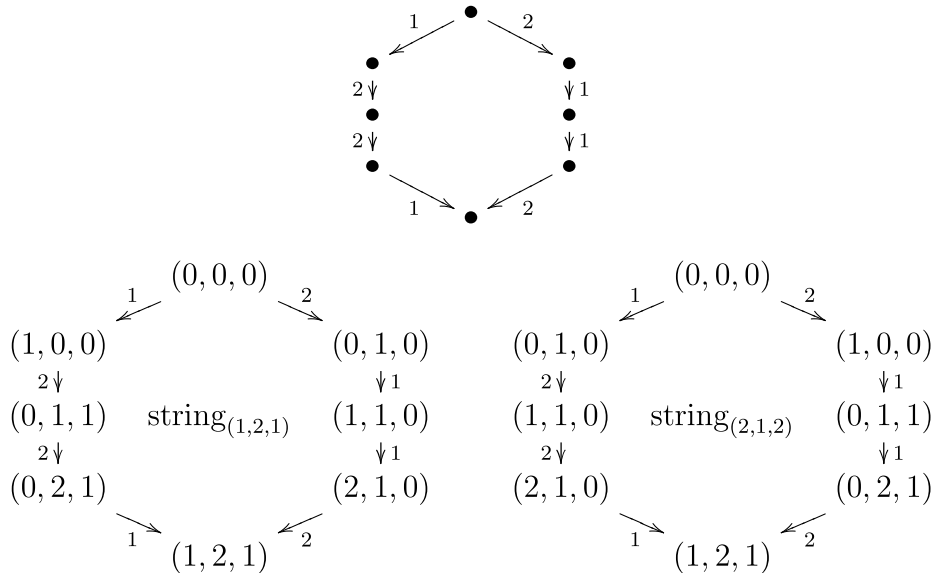


- 定義 2.3. (1) W の最長元を w_0 と書く。
 (2) 簡約語とは、 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ なる列 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in I^N$ である。
 (3) 各 $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ と簡約語 \mathbf{i} に対し、 $\text{string}_{\mathbf{i}}(b) := (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ を次で定義する：
 • $a_k := \varepsilon_{i_k}(\tilde{e}_{i_{k-1}}^{\max} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{\max}(b))$.
 • $\varepsilon_i(b) := \max\{n \mid \tilde{e}_i^n(b) \neq 0\}$.
 • $\tilde{e}_i^{\max}(b) := \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)}(b)$.
 (4) $\text{string}_{\mathbf{i}}(b)$ を、 b の \mathbf{i} に関するストリング・データと呼ぶ。

写像 $\text{string}_{\mathbf{i}} : \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ は単射であることが知られている。実際、 $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ はストリング・データ $\text{string}_{\mathbf{i}}(b) = (a_1, \dots, a_N)$ から次のように復元される：

$$b = \tilde{f}_{i_1}^{a_1} \cdots \tilde{f}_{i_N}^{a_N}(b_\lambda).$$

例 2.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, λ を先の例の通りとする。このとき、簡約語は $(1, 2, 1)$ と $(2, 1, 2)$ の 2 つしかない。結晶グラフ、ストリング・データは次の通りである。

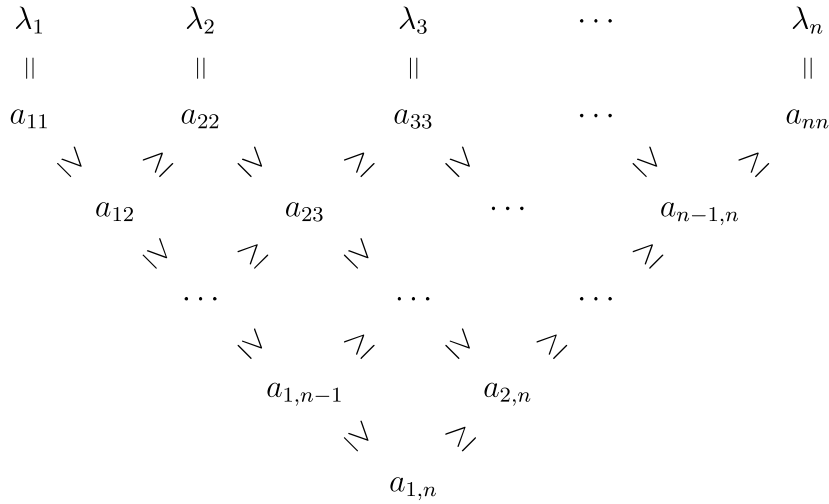


3. GELFAND-TSETLIN パターン

定義 3.1. $\lambda \in P_+$ とする。型 λ の Gelfand-Tsetlin パターン とは、非負整数列 $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ で次を満たすものである：

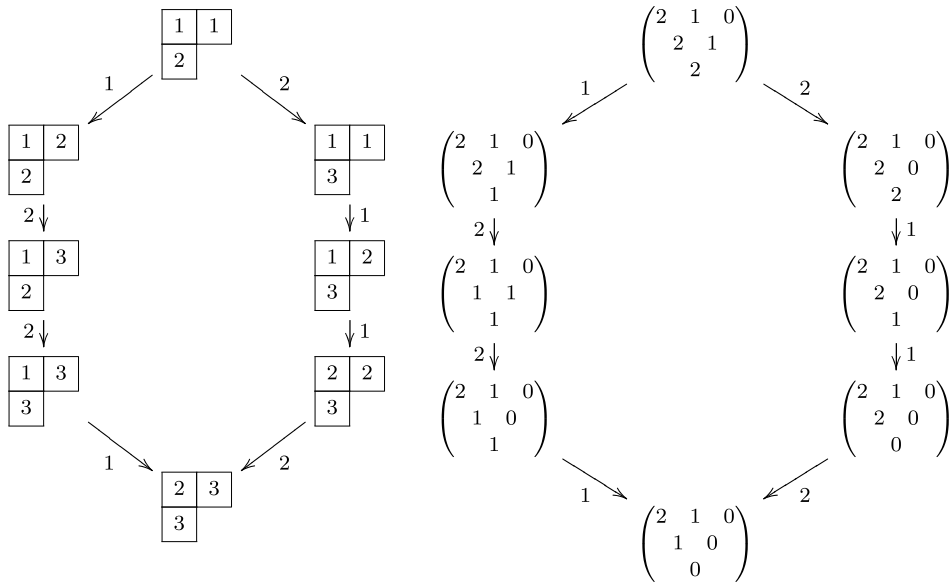
- $a_{i,i} = \lambda_i$ for all $i = 1, \dots, n$.
- $a_{i+1,j} \leq a_{i,j} \leq a_{i,j-1}$ for all $1 \leq i < j \leq n$.

型 λ の Gelfand-Tsetlin パターンの集合を $\text{GT}(\lambda)$ と書く。



Gelfand-Tsetlin パターンは、半標準 Young 盤とともに結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を実現することが知られている：

例 3.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, λ を先の例の通りとすると、Young 盤、Gelfand-Tsetlin パターンによる $\mathcal{B}(\lambda)$ の表示は次のようになる：



さて、 $\mathbf{i}_A := (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n-1, n-2, \dots, 1) \in I^N$ は簡約語である。 \mathfrak{g} の正ルート $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ を次のようにおく：

$$\gamma_1 := (1, 2), \gamma_2 := (1, 3), \gamma_3 := (2, 3), \gamma_4 := (1, 4), \gamma_5 := (2, 4), \dots, \gamma_N := (n-1, n).$$

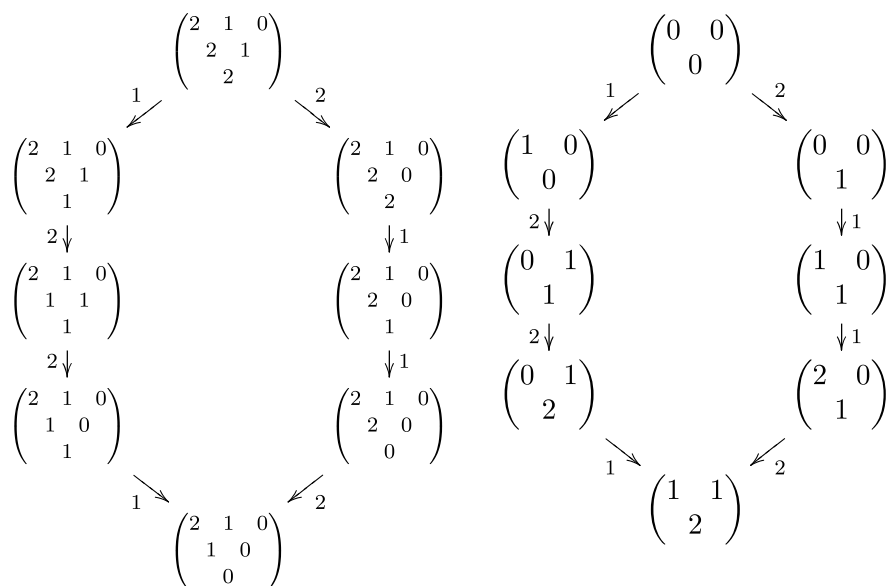
ただし、 $(i, j) = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1}$ とした。

$b \in \mathcal{B}(\lambda)$ に対し、 $\text{string}_{\mathbf{i}_A}(b) = (d_k(b))_{1 \leq k \leq N} = (d_{i,j}(b))_{1 \leq i < j \leq n}$ とおく。ただし、 $\gamma_k = (i, j)$ のとき $d_{i,j}(b) = d_k(b)$ とおいた。

命題 3.3. $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \in \text{GT}(\lambda)$ とするとき、 \mathbf{i}_A に関するストリング・データは $\text{string}_{\mathbf{i}_A}(\mathbf{a}) = (d_{i,j}(\mathbf{a}))_{1 \leq i < j \leq n}$ で与えられる。ただし、

$$d_{i,j}(\mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{j-i} (a_{m,n-j+m} - a_{m,n-j+m+1}).$$

例 3.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, λ を先の例の通りとすると、 $GT(\lambda)$ の結晶グラフ (左) と i_A に関するストリング・データ (右) は以下の通りである。



4. アルコブ・パス模型

少し記号を用意する。

- $E := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
- Φ^+ : 正ルートの集合.
- $\alpha \in \Phi^+$, $k \in \mathbb{Z}$, に対し

$$H_{\alpha,k} := \{v \in E \mid (v, \alpha^\vee) = k\} \subset E: \text{アフィン超平面.}$$

- $E \setminus \bigcup_{\alpha,k} H_{\alpha,k}$ の連結成分をアルコブ呼ぶ.
- $A_0 := \{v \in E \mid 0 < (v, \alpha^\vee) < 1 \text{ for all } \alpha \in \Phi^+\}$: 基本アルコブ.
- $W_{\text{aff}} := \langle s_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi^+, k \in \mathbb{Z} \rangle \subset \text{Aff}(E)$: アフィン・ワイル群. ただし, $s_{\alpha,k}$ は $H_{\alpha,k}$ に関するアフィン鏡映, $\text{Aff}(E)$ は E のアフィン変換群.

定義 4.1. アルコブ・パスとは, A_0 から A_s までの, 互いに隣り合うアルコブの列 (A_0, A_1, \dots, A_s) で, 長さが最短のものである。

定義 4.2. $\lambda \in P_+$, $\Pi = (A_0 = A_0, A_1, \dots, A_s = A_0 - \lambda)$ を A_0 から $A_0 - \lambda$ へのアルコブ・パスとする。 $J = \{j_1 < \dots < j_t\} \subset \{1, \dots, s\}$ が許容部分集合であるとは, ワイル群 W の Bruhat 順序に関して $e \rightarrow s_{\beta_{j_1}} \rightarrow s_{\beta_{j_1}} s_{\beta_{j_2}} \rightarrow \dots \rightarrow s_{\beta_{j_1}} \dots s_{\beta_{j_t}}$ を満たすことである。ただし, $v \rightarrow w$ とは, $v < w$ であって, $v < u < w$ なる u が存在しないことを表す。また, s_{β_i} は正ルート $\beta_i \in \Phi^+$ に関する鏡映で, β_i はある整数 k_i について $s_{\beta_i, k_i}(A_{i-1}) = A_i$ を満たすものである。

$\mathcal{A}(\Pi)$ を許容部分集合の集合とする。

定理 4.3 (Lenart-Postnikov). $\lambda \in P_+$, $\Pi = (A_0 = A_0, A_1, \dots, A_s = A_0 - \lambda)$ を A_0 から $A_0 - \lambda$ へのアルコブ・パスとする。このとき, $\mathcal{A}(\Pi)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を実現する。

注意 4.4. Π, Π' をともに A_0 から $A_0 - \lambda$ へのアルコブ・パスとすると, 先の定理より, $\mathcal{A}(\Pi) \simeq \mathcal{A}(\Pi')$ である。この同型写像は Yang-Baxter 変形と呼ばれる。

例 4.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, λ を先の例の通り、 $\Pi_1 = (A_0, s_1 A_0, s_1 s_2 A_0, s_2 s_1 s_2 A_0, A_0 - \lambda)$, $\Pi_2 = (A_0, s_2 A_0, s_2 s_1 A_0, s_1 s_2 s_1 A_0, A_0 - \lambda)$ とすると、 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ はそれぞれ $(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$, $(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)$ であり、

$$\mathcal{A}(\Pi_1) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\},$$

$$\mathcal{A}(\Pi_2) = \{\emptyset, \{3\}, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$$

となる。

定義 4.6. $\lambda \in P_+$, $\Pi = (A_0 = A_0, A_1, \dots, A_s = w_0 A_0 - \lambda)$ を A_0 から $w_0 A_0 - \lambda$ へのアルコブ・パスとする。 $J = \{j_1 < \dots < j_N\} \subset \{1, \dots, s\}$ が許容部分集合であるとは、 $e \rightarrow s_{\beta_{j_1}} \rightarrow s_{\beta_{j_1}} s_{\beta_{j_2}} \rightarrow \dots \rightarrow s_{\beta_{j_1}} \dots s_{\beta_{j_N}} = w_0$ を満たすことである。

$\mathcal{A}(\Pi)$ を許容部分集合の集合とする。

定理 4.7 (W.-Yamamura). $\lambda \in P_+$, $\Pi = (A_0 = A_0, A_1, \dots, A_s = w_0 A_0 - \lambda)$ を A_0 から $w_0 A_0 - \lambda$ へのアルコブ・パスとする。このとき、 $\mathcal{A}(\Pi)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を実現する。

Φ^+ 上に順序 $<_{i_A}$ を次で定める：

$$\alpha_{i_1} <_{i_A} s_{i_1}(\alpha_{i_2}) <_{i_A} s_{i_1} s_{i_2}(\alpha_{i_3}) <_{i_A} \dots <_{i_A} s_{i_1} \dots s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N}).$$

定義 4.8. $J = \{j_1 < \dots < j_N\} \in \mathcal{A}(\Pi)$ が概降下部分集合であるとは、以下を満たすことである：

- $\{\beta_j \mid j \in J\} = \Phi^+$.
- 各 $1 \leq k < l \leq N$ に対し、 $(\beta_{j_k}, \beta_{j_l}) = 0$ か $\beta_{j_l} <_{i_A} \beta_{j_k}$ のどちらかが成り立つ。

概降下部分集合 J と $1 \leq i < j \leq n$ に対し、

$$N_{i,j}(J) := |\{l > j_k \mid \beta_l = \beta_{j_k}\}| \quad \text{if } \beta_{j_k} = (i, j)$$

とおく。

定理 4.9 (W.-Yamamura). $\lambda \in P_+$, $\Pi = (A_0 = A_0, \dots, A_s = w_0 A_0 - \lambda)$ を A_0 から $A_0 - \lambda$ へのアルコブ・パスとする。

- (1) 各 $J \in \mathcal{A}(\Pi)$ は Yang-Baxter 変形を適当に繰り返すことで概降下部分集合になる。
- (2) $J \in \mathcal{A}(\Pi)$ が概降下部分集合 J' に変形されるとき $N_{i,j}(J')$ は J' に依らない。特に、 $N_{i,j}(J) := N_{i,j}(J')$ は well-defined である。
- (3) $J \in \mathcal{A}(\Pi)$ に対し、 $\mathbf{a}(J) := (a_{i,j}(J))_{1 \leq i < j \leq n}$ を以下で定義する。

$$a_{i,j}(J) := \lambda_i - N_{i,j}(J) \quad (\text{we understand } N_{i,j}(J) = 0 \text{ if } i = j).$$

このとき、 $\mathbf{a}(J) \in \text{GT}(\lambda)$ である。

- (4) 対応 $J \mapsto \mathbf{a}(J)$ は、 $\mathcal{A}(\Pi)$ と $\text{GT}(\lambda)$ の間の結晶基底としての同型写像を与える。

例 4.10. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, λ を先の例の通り、 Π を A_0 から $w_0 A_0 - \lambda$ へのアルコブ・パスで、 $(\beta_1, \beta_2, \dots)$ が $(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1)$ となるものとする。このとき、

$$\mathcal{A}(\Pi) = \{\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 7\}, \\ \{1, 6, 7\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 6, 7\}\}$$

となり、 $J \in \mathcal{A}(\Pi)$ は全て概降下部分集合である。 $(N_{1,2}(J), N_{1,3}(J), N_{2,3}(J))$ たちはそれぞれ

$$(1, 2, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1), \\ (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0)$$

となる。よって、 $\mathbf{a}(J)$ たちは

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \\ 2 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

となり、 $GT(\lambda)$ に一致する。

謝辞

最後に、研究集会“表現論とその組合せ論的側面”の開催にご尽力くださり、筆者に講演の機会を与えてくださった石川先生に感謝の意を表します。

REFERENCES

- [1] D. Bump and A. Schilling, Crystal Bases, Representations and combinatorics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017. xii+279 pp.
- [2] C. Lenart, On the combinatorics of crystal graphs. I. Lusztig’s involution, Adv. Math. 211 (2007), no. 1, 204–243.
- [3] C. Lenart and A. Postnikov, Affine Weyl groups in K-theory and representation theory, Int. Math. Res. Not. IMRN 2007, no. 12, Art. ID rnm038, 65 pp.
- [4] C. Lenart and A. Postnikov, A combinatorial model for crystals of Kac-Moody algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 8, 4349–4381.
- [5] Alcove paths and Gelfand-Tsetlin patterns, arXiv:1909.00327.

Email address: `hideya@kurims.kyoto-u.ac.jp`