Branching rules for Koornwinder polynomials with one column diagrams and matrix inversions

広島工業大学工学部　星野歩 *
Ayumu Hoshino
Hiroshima Institute of Technology,
東京大学大学院数理科学研究科　白石潤一 †
Jun'ichi Shiraishi
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

本稿では，一列型 BC_n 型 Koornwinder 多項式 $P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)$ と一列型 BC_n 型単項対称多項式 $m_{(1^r)}(x)$ の間の遷移行列 $\mathcal{C}$ を具体的に求め，一列型 BC_n 型 Koornwinder 多項式の一列型 BC_{n-1} 型 Koornwinder 多項式による分規則を記述する．証明のために一列型 Koornwinder 多項式の退化隣接関係 (degeneration scheme) を導入する．一列型 Koornwinder 多項式の退化隣接関係とは，一列型 Koornwinder 多項式のパラメタ a,b,c,d を次のように 1 つずつ特殊化した多項式を考えることである: $(a,b,c,d) \to (a,-a,c,d) \to (a,-a,c,-c) \to (\sqrt{t}c,-\sqrt{t}c,c,-c) \to (\sqrt{t},-\sqrt{t},1,-1)$．これらの退化多項式間の遷移行列は Bressoud や Krattenthaler の matrix inversion を用いて記述される．応用として，一列型 B_n 型 Schur 多項式の一列型 B_n 型 Hall-Littlewood 多項式による展開係数（Kostka 多項式）を具体的に記述する．

1　準備

本稿で用いる主な記号を次に記載する．

$$(z;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k z), \quad (z;q)_k = \frac{(z;q)_\infty}{(q^k z;q)_\infty} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$
$$(a_1,a_2,\dots,a_r;q)_k = (a_1;q)_k(a_2;q)_k\cdots(a_r;q)_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

* 本研究は JSPS 科研費 19K03530 の助成を受けています．
† 本研究は JSPS 科研費 19K03530, 19K03512 の助成を受けています．

$$ {}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{r+1} \\ b_1, \ldots, b_r \end{matrix} ; q, z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}; q)_n}{(q, b_1, b_2, \ldots, b_r; q)_n} z^n, $$

$$ [n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad [n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q, \quad \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q = \prod_{k=1}^{j} \frac{[m-k+1]_q}{[k]_q} = \frac{[m]_q!}{[j]_q![m-j]_q!}. $$

2 Koornwinder 多項式の定義

この節では, Koornwinder 多項式の定義を復習する．n を正の整数とし, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を変数とする．BC_n 型のワイル群を $W_n (\simeq \mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n)$ とし，$\mathbb{C}[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]^{W_n}$ を W_n 不変な x の Laurent 多項式環とする． 長さ n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$) に対し, 単項対称多項式 $m_\lambda = m_\lambda(x)$ を

$$ m_\lambda = \frac{1}{|\mathrm{Stab}(\lambda)|} \sum_{\mu \in W_n \cdot \lambda} \prod_i x_i^{\mu_i} $$

で定める．ただし，$\mathrm{Stab}(\lambda) = \{ s \in W_n \mid s\lambda = \lambda \}$，$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ とする．

複素パラメタ a, b, c, d, q, t に対し，Koornwinder の BC_n 型 q-差分作用素 $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x(a, b, c, d|q, t)$ は次で与えられる [K].

$$ \begin{aligned} \mathcal{D}_x = & \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-ax_i)(1-bx_i)(1-cx_i)(1-dx_i)}{\alpha t^{n-1}(1-x_i^2)(1-qx_i^2)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_ix_j)(1-tx_i/x_j)}{(1-x_ix_j)(1-x_i/x_j)} \left(T_{q,x_i}^{+1} - 1 \right) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-a/x_i)(1-b/x_i)(1-c/x_i)(1-d/x_i)}{\alpha t^{n-1}(1-1/x_i^2)(1-q/x_i^2)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_j/x_i)(1-t/x_ix_j)}{(1-x_j/x_i)(1-1/x_ix_j)} \left(T_{q,x_i}^{-1} - 1 \right), \end{aligned} $$

ただし，$\alpha = (abcdq^{-1})^{1/2}$, $T_{q,x}^{\pm 1} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, q^{\pm 1}x_i, \ldots, x_n)$ とする．

Definition 2.1 ([K]). Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x|a, b, c, d|q, t) \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]^{W_n}$ は, 次の 2 つの条件により, 一意に特徴づけられる．

$$ \begin{aligned} &(a) \quad P_\lambda(x) = \sum_{\mu \leq \lambda} c_{\lambda,\mu} m_\mu(x) \quad (c_{\lambda,\lambda} = 1), \\ &(b) \quad \mathcal{D}_x P_\lambda(x) = d_\lambda P_\lambda(x), \end{aligned} $$

ここに，分割 λ, μ の支配的順序は

$$ \lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n) $$

で定め，固有値 d_λ は

$$ d_\lambda = \sum_{j=1}^{n} (\alpha t^{n-j}(q^{\lambda_j} - 1) + \alpha^{-1} t^{-n+j}(q^{-\lambda_j} - 1)) $$

とする．

Koornwinder 多項式は, パラメタを特殊化することによって, (B_n, B_n), (C_n, C_n), (D_n, D_n) 型の Macdonald 多項式に退化することが知られている [K, Mac].

本稿では，一列型分割 (1^r) $(0 \le r \le n)$ に対する Koornwinder 多項式 $P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)$ (以下，一列型 Koornwinder 多項式と呼ぶ) や，その退化多項式を扱う.

3 主結果

この節では本稿の主結果を紹介する．簡単のため $P^{BC_n}_{(1^r)} = P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)$，$m_{(1^r)} = m_{(1^r)}(x)$ と略記する.

Definition 3.1.

$$f(s|a,b,c,d) = \frac{(1-abcds/t)(1-ts)(1-abs)(1-acs)(1-ads)(1-bcs)(1-bds)(1-cds)}{(1-abcds^2/t)(1-abcds^2)^2(1-abcdts^2)},$$
$$g(s|a,b,c,d) = g_1(s|a,b,c,d) - g_1(st|a,b,c,d),$$

ここに

$$g_1(s|a,b,c,d) = \frac{a+b+c+d-(abc+abd+acd+bcd)s/t}{1-abcds^2/t^2}\frac{1-s}{1-t}.$$

次のように $\mathbf{P}^{(n)}$ と $\mathbf{m}^{(n)}$ を定める:

$$\mathbf{P}^{(n)} = {}^t(P^{BC_n}_{(1^n)}, P^{BC_n}_{(1^{n-1})}, \ldots, P^{BC_n}_{\phi}, 0, \ldots),$$
$$\mathbf{m}^{(n)} = {}^t(m_{(1^n)}, m_{(1^{n-1})}, \ldots, m_{\phi}, 0, \ldots).$$

Theorem 3.2 (主結果 1). $\mathbf{P}^{(n)} = \mathcal{C}\mathbf{m}^{(n)}$ となる遷移行列 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ で，次を満たすものが唯一存在する:

$$\mathcal{C} \text{ は上三角行列}, \tag{3.2a}$$
$$\mathcal{C}_{i,i} = 1 \quad (i \ge 0), \tag{3.2b}$$
$$\mathcal{C}_{i,j} = \mathcal{C}_{i-1,j-1} + g(t^i|a,b,c,d)\mathcal{C}_{i,j-1} + f(t^i|a,b,c,d)\mathcal{C}_{i+1,j-1}. \tag{3.2c}$$

特に，$\mathcal{C}$ は階数 n に依らない.

遷移行列 $\mathcal{C}$ の初めのいくつかの成分を書き下すと次のようになる:

$$\begin{pmatrix} 1 & -g_1(t) & g_1(t)^2+f(1) & -g_1(t)^3-g_1(t)f(1)-g_1(t^2)f(1) & \cdots \\ & 1 & -g_1(t^2) & g_1(t)^2+f(1)-g_1(t^2)g(t)+f(t) & \cdots \\ & & 1 & -g_1(t^3) & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.2 の証明は §7 で与える．また，次の分規則が成り立つ.

Theorem 3.3 (主結果 2)**.** 簡単のため $P^{BC_{n-1}}_{(1^n)}(x|a,b,c,d|q,t)=P^{BC_{n-1}}_{(1^{-1})}(x|a,b,c,d|q,t)=0$ と定める．このとき次を得る:

$$\begin{aligned}
&P^{BC_n}_{(1^r)}(x_1,x_2,\ldots,x_n|a,b,c,d|q,t)\\
&\quad=P^{BC_{n-1}}_{(1^r)}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}|a,b,c,d|q,t)\\
&\qquad+\Big(x_n+1/x_n+g(t^{n-r}|a,b,c,d)\Big)P^{BC_{n-1}}_{(1^{r-1})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}|a,b,c,d|q,t)\\
&\qquad+f(t^{n-r}|a,b,c,d)P^{BC_{n-1}}_{(1^{r-2})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}|a,b,c,d|q,t).
\end{aligned}$$

Theorem 3.3 の証明は §8 で与える．

4 一列型 Koornwinder 多項式の四重級数表示

この節では一列型 Koornwinder 多項式の明示公式を紹介する．

Definition 4.1. 対称な Laurent 多項式 $E_r(x)$ を次で定める:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-yx_i)(1-y/x_i)=\sum_{r\geq 0}(-1)^r E_r(x)y^r.$$

分割 λ の共役を λ' とする．[Mi] で与えられた BC 型の核関数関係式を用いれば，m 個の変数 $y=(y_1,\cdots,y_m)$ に関する Koornwinder の q-差分作用素の固有関数を用いることで，長さが m 以下の分割 λ の共役 λ' に対する n 変数 $(n\geq m)$ の Koornwinder 多項式 $P_{\lambda'}(x|a,b,c,d|q,t)$ を構成することができる [HS1]．これを $m=1$ の場合に適用する．Askey-Wilson 多項式 (BC_1 型 Koornwinder 多項式) の四重級数表示 [HNS] を用いることで次の定理を得る．

Theorem 4.2 ([HS1])**.**

$$P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)=\sum_{k,l,i,j\geq 0}(-1)^{i+j}E_{r-2k-2l-i-j}(x)c_e(k,l;t^{n-r+1+i+j})c_o(i,j;t^{n-r+1}),$$

ここに

$$\begin{aligned}
c_e(k,l;s)=&\frac{(tc^2/a^2;t^2)_k(sc^2t;t^2)_k(s^2c^4/t^2;t^2)_k}{(t^2;t^2)_k(sc^2/t;t^2)_k(s^2a^2c^2/t;t^2)_k}\frac{(1/c^2;t)_l(s/t;t)_{2k+l}}{(t;t)_l(sc^2;t)_{2k+l}}\frac{1-st^{2k+2l-1}}{1-st^{-1}}a^{2k}c^{2l},\\
c_o(i,j;s)=&\frac{(-a/b;t)_i(scd/t;t)_i}{(t;t)_i(-sac/t;t)_i}\frac{(s;t)_{i+j}(-sac/t;t)_{i+j}(s^2a^2c^2/t^3;t)_{i+j}}{(s^2abcd/t^2;t)_{i+j}(sac/t^{3/2};t)_{i+j}(-sac/t^{3/2};t)_{i+j}}\\
&\times\frac{(-c/d;t)_j(sab/t;t)_j}{(t;t)_j(-sac/t;t)_j}b^id^j.
\end{aligned}$$

Theorem 4.2 を次のように修正する．

Theorem 4.3.

$$P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t) = \sum_{k,l,i,j\geq 0} (-1)^{i+j} E_{r-2k-2l-i-j}(x) \widehat{c}'_e(k,l;t^{n-r+1+i+j}) \widehat{c_o}^{new}(i,j;t^{n-r+1}),$$

ここに

$$\begin{aligned}\widehat{c_o}^{new}(i,j;s) &= \frac{(-a/b;t)_i(s;t)_i(sac/t;t)_i(sad/t;t)_i(scd/t;t)_i(-s^2a^2cd/t^3;t)_i}{(t;t)_i(s^2abcd/t^2;t)_i(-s^2a^2cd/t^3;t^2)_i(-s^2a^2cd/t^2;t^2)_i} b^i \\ &\quad\times \frac{(-c/d;t)_j(t^is;t)_j(-t^isa^2/t;t)_j(t^{2i}s^2a^2c^2/t^3;t)_j}{(t;t)_j(-t^{2i}s^2a^2cd/t^2;t)_j(t^{2i}s^2a^2c^2/t^3;t^2)_j} d^j.\end{aligned}$$

証明には q-超幾何級数の変換公式を用いる.

5 退化隣接関係における matrix inversion

この節では退化隣接関係における退化多項式間の遷移行列を Bressoud や Krattenthaler の matrix inversion を用いて具体的に構成する. はじめに Bressoud の matrix inversion を紹介する.

Theorem 5.1 ([B], p.1, Theorem, [L], p.5, Corollary)**.** 下三角行列 $\mathcal{M}(u,v;x,y;q)$ の各成分を次で定める:

$$\mathcal{M}_{r,r-2i}(u,v;x,y;q) = y^iv^i \frac{(x/y;q)_i}{(q;q)_i} \frac{(uq^{r-2i};q)_{2i}}{(uxq^{r-i};q)_i(uyq^{r-2i+1};q)_i} \quad (\, r,i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i \leq \lfloor r/2 \rfloor\,).$$

このとき $\mathcal{M}(u,v;x,y;q)\mathcal{M}(u,v;y,z;q) = \mathcal{M}(u,v;x,z;q)$ であり, 特に $\mathcal{M}(u,v;x,y;q)$ と $\mathcal{M}(u,v;y,x;q)$ は互いに逆行列となる.

Definition 5.2. 行列 $\mathcal{M}(u,v;x,y;t^2)$ の共役行列 $\widetilde{\mathcal{M}}(u,v;x,y;t)$ の各成分を次で定める:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(u,v)_r &= \frac{(t^2v^{1/2};t)_r}{(u^{1/2};t)_r}(u^{1/4}/v^{3/4})^r, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{r,r-2i}(u,v;x,y;t) &= \mathcal{M}_{r,r-2i}(u,v;x,y;t^2) \times d_{\mathcal{M}}(u,v)_r / d_{\mathcal{M}}(u,v)_{r-2i} \\ &= \frac{(x/y;t^2)_i}{(t^2;t^2)_i} \frac{(v^{1/2}t^{r-2i+2};t)_{2i}}{(u^{1/2}t^{r-2i};t)_{2i}} \frac{(ut^{2r-4i};t^2)_{2i}}{(uxt^{2r-2i};t^2)_i(uyt^{2r-4i+2};t^2)_i}(yu^{1/2}/v^{1/2})^i. \end{aligned}$$

特に $\widetilde{\mathcal{M}}(u,v;x,y;t)$ と $\widetilde{\mathcal{M}}(u,v;y,x;t)$ は互いに逆行列となる.

次に Krattenthaler の matrix inversion を紹介する.

Theorem 5.3 ([K], p.3, Corollary)**.** 行列 $\mathcal{K}(x,y;q)$ の各成分を次で定める:

$$\mathcal{K}_{i,j}(x,y;q) = y^{i-j} \frac{(x/y;q)_{i-j}}{(q;q)_{i-j}} \frac{1}{(xq^{i+j};q)_{i-j}(yq^{2j+1};q)_{i-j}}.$$

このとき $\mathcal{K}(x,y;q)$ と $\mathcal{K}(y,x;q)$ は互いに逆行列となる.

Definition 5.4. 行列 $\mathcal{K}(xv, yv; t)$ の共役行列 $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}, v; x, y; t)$ $(\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4))$ の各成分を次で定める:

$$
\begin{aligned}
&d_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{u}, v)_r = v^{-r}(u_1; t)_r(u_2; t)_r(u_3; t)_r(u_4; t)_r,\\
&\mathcal{N}_{r,r-i}(\boldsymbol{u}, v, x, y; t) = \mathcal{K}_{r,r-i}(xv, yv; t) \times d_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{u}, v)_r / d_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{u}, v)_{r-i}\\
&\qquad = y^i \frac{(x/y; t)_i}{(t; t)_i} \frac{(u_1 t^{r-i}; t)_i (u_2 t^{r-i}; t)_i (u_3 t^{r-i}; t)_i (u_4 t^{r-i}; t)_i}{(xvt^{2r-i}; t)_i (yvt^{2r-2i+1}; t)_i} \quad (\, r, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,).
\end{aligned}
$$

このとき $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}, v; x, y; t)$ と $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}, v; y, x; t)$ は互いに逆行列となる.

Proposition 5.5. 一列型 Koornwinder 多項式の四重級数表示と matrix inversion の関係は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\widehat{c_o}^{new}(i, 0; t^{n-r+1}) = (-1)^i \mathcal{N}_{r,r-i}(t^{-n}, t^{-n+1}/ac, t^{-n+1}/ad, t^{-n+1}/cd, -t^{-2n}/acd, -t/b, t/a; t),\\
&\widehat{c_o}^{new}(0, j; t^{n-r+1}) = (-1)^j \mathcal{N}_{r,r-j}(t^{-n}, -t^{-n+1}/a^2, t^{-n+1}/ac, -t^{-n+1}/ac, t^{-2n}/a^2c, -t/d, t/c; t),\\
&\widehat{c'_e}(k, 0; t^{n-r+1}) = \widetilde{\mathcal{M}}_{r,r-2k}(t^{-2n+2}/c^4, t^{-2n-4}, c^2/ta^2, 1/t^2; t),\\
&\widehat{c'_e}(0, l; t^{n-r+1}) = \mathcal{M}_{r,r-2l}(t^{-n}, t, 1/c^2, 1; t).
\end{aligned}
$$

ここで，一列型 Koornwinder 多項式のパラメタ a, b, c, d を

$$
(a, b, c, d) \to (a, -a, c, d) \to (a, -a, c, -c) \to (\sqrt{t}c, -\sqrt{t}c, c, -c) \to (\sqrt{t}, -\sqrt{t}, 1, -1) \quad (5.1)
$$

と特殊化した退化多項式たちを考える (退化隣接関係). 特に $P_{(1^r)}(x|\sqrt{t}, -\sqrt{t}, 1, -1|q, t) = E_r(x)$ である.

Theorem 5.6. 退化隣接関係におけるそれぞれの退化多項式たちと matrix inversion との関係は次のようになる.

$$
P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \widehat{c_o}^{new}(i, 0; t^{n-r+1}) P_{(1^{r-i})}(x|a, -a, c, d|q, t), \quad (5.2a)
$$

$$
P_{(1^r)}(x|a, -a, c, d|q, t) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \widehat{c_o}^{new}(0, j; t^{n-r+1}) P_{(1^{r-j})}(x|a, -a, c, -c|q, t), \quad (5.2b)
$$

$$
P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t) = \sum_{k \geq 0} \widehat{c'_e}(k, 0; t^{n-r+1}) P_{(1^{r-2k})}(x|t^{1/2}c, -t^{1/2}c, c, -c|q, t), \quad (5.2c)
$$

$$
P_{(1^r)}(x|\sqrt{t}c, -\sqrt{t}c, c, -c|q, t) = \sum_{l \geq 0} \widehat{c'_e}(0, l; t^{n-r+1}) E_{r-2l}(x). \quad (5.2d)
$$

以上より，次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t)\\
&= \sum_{i,j,k,l \geq 0} (-1)^{i+j} \widehat{c_o}^{new}(i, 0; t^{n-r+1}) \widehat{c_o}^{new}(0, j; t^{n-r+i+1}) \widehat{c'_e}(k, 0; t^{n-r+i+j+1})\\
&\quad \times \widehat{c'_e}(0, l; t^{n-r+i+j+2k+1}) E_{r-i-j-2k-2l}(x). \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

特に (5.3) より，一列型 Koornwinder 多項式の四重級数表示は，パラメタを一つ特殊化するごとに和の数が一つ減ることが分かる．

6 行列 $\mathcal{N}$ に関する五項間関係式

先行研究 [HS1] の結果より，行列 $\mathcal{M}$ に付随する q-超幾何級数 ${}_4\phi_3$ は，ある四項間関係式を満たすことが分かっている．この節では，行列 $\mathcal{M}$ に関する結果を復習しつつ，行列 $\mathcal{N}$ に付随する q-超幾何級数 ${}_4\phi_3$ が満たす五項間関係式を紹介する．

Definition 6.1. 下三角行列 M, N の各成分を次で定める:

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_{i,j} &= \sum_{l=0}^{\lfloor (i-j)/2 \rfloor} \widetilde{\mathcal{M}}_{i,i-2l}(t^{-2n+2}/c^4, t^{-2n-4}, c^2/ta^2, 1/t^2; t)\mathcal{M}_{i-2l,j}(t^{-n}, t, 1/c^2, 1; t) \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor (i-j)/2 \rfloor} \widehat{c'_e}(l, 0; t^{n-i+1})\widehat{c'_e}(0, \lfloor (i-j)/2 \rfloor - l; t^{n-i+2l+1}) \quad (i \geq j), \\ \mathsf{N}_{i,j} &= \sum_{l=0}^{i-j} \mathcal{N}_{i,i-l}(t^{-n}, t^{-n+1}/ac, t^{-n+1}/ad, t^{-n+1}/cd, -t^{-2n}/acd, -t/b, t/a; t) \\ &\quad \times \mathcal{N}_{i-l,j}(t^{-n}, -t^{-n+1}/a^2, t^{-n+1}/ac, -t^{-n+1}/ac, t^{-2n}/a^2c, -t/d, t/c; t) \\ &= \sum_{l=0}^{i-j} (-1)^{i-j} \widehat{c_o}^{new}(l, 0; t^{n-i+1})\widehat{c_o}^{new}(0, i-j-l; t^{n-i+l+1}) \quad (i \geq j).\end{aligned}$$

行列 M は論文 [HS1] では $\mathcal{B}$ と書かれていることに注意する．

Definition 6.2. q-超幾何級数 $\mathsf{M}(s, l)$ を次のように定める:

$$\mathsf{M}(s, l) := (-1)^l s^{-l} \frac{(s^2/t^2; t^2)_l}{(t^2; t^2)_l} \frac{1 - s^2t^{4l-2}}{1 - s^2t^{-2}} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} -sa^2, -sc^2, s^2t^{2l-2}, t^{-2l} \\ -s, -st, s^2a^2c^2/t \end{matrix} ; t^2, t^2 \right].$$

Proposition 6.3. $s = t^{n-r+1}$ とすると，次を得る．

$$\mathsf{M}_{r,r-2l} = \mathsf{M}(s, l).$$

ここで，M は次の四項間関係式を満たす．

Theorem 6.4 ([HS1], Theorem 6.1 (6.1a))**.** 一般の s について，次が成り立つ．

$$\mathsf{M}(st, l) + \mathsf{M}(st, l-1) = \mathsf{M}(s, l) + f(s|a, -a, c, -c)\mathsf{M}(st^2, l-1).$$

Definition 6.5. q-超幾何級数 $\mathsf{N}(s, j)$ を次で定める:

$$\begin{aligned}\mathsf{N}(s, j) := &\frac{(-c/d, s, s^2a^2c^2/t^3, sab/t; t)_j}{(t, sac/t^{3/2}, -sac/t^{3/2}, s^2abcd/t^2; t)_j}(-d)^j \\ &\times {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} t^{-j}, -a/b, scd/t, -t^{-j+2}/sac \\ -t^{-j+1}d/c, -sac/t, t^{-j+2}/sab \end{matrix} ; t, t \right].\end{aligned}$$

Proposition 6.6. $s = t^{n-r+1}$ とすると，次を得る:

$$\mathsf{N}_{r,r-j} = \mathsf{N}(s,j).$$

このとき，$\mathsf{N}(s,j)$ は次の五項間関係式を満たす.

Theorem 6.7. 一般の s について，次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathsf{N}(s,j) + g(s|a,b,c,d)\mathsf{N}(st,j-1) + f(s|a,b,c,d)\mathsf{N}(st^2,j-2)\\ = \mathsf{N}(st,j) + f(st^{j-2}|a,-a,c,-c)\mathsf{N}(st,j-2).\end{aligned}$$

7 Theorem 3.2 の証明

この節では Theorem 3.2 を証明する．はじめに，遷移行列 $\mathcal{C}$ の各成分を前節までで得られた matrix inversion を用いて表す.

Definition 7.1. $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，級数 $B(n,r,p)$ を次で定める:

$$\begin{aligned}B(n,r,2p) &= \sum_{k=0}^{p} \mathsf{M}_{r-2k,r-2p}\mathsf{N}_{r,r-2k}\\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{p-k}\sum_{j=0}^{2k} \widehat{c'_e}(i,0;t^{n-r+2k+1})\widehat{c'_e}(0,p-k-i;t^{n-r+2k+2i+1})\\ &\quad \times (-1)^{2k}\widehat{c_o}^{new}(j,0;t^{n-r+1})\widehat{c_o}^{new}(0,2k-j;t^{n-r+j+1}),\\ B(n,r,2p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} \mathsf{M}_{r-2k+1,r-2p-1}\mathsf{N}_{r,r-2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{p+1}\sum_{i=0}^{p-k+1}\sum_{j=0}^{2k-1} \widehat{c'_e}(i,0;t^{n-r+2k})\widehat{c'_e}(0,p-k+1-i;t^{n-r+2k+2i})\\ &\quad \times (-1)^{2k-1}\widehat{c_o}^{new}(j,0;t^{n-r+1})\widehat{c_o}^{new}(0,2k-1-j;t^{n-r+j+1}).\end{aligned}$$

まとめると，次のように表される.

$$\begin{aligned}&B(n,r,p)\\ &= \sum_{i+2k+2l\leq p} \mathcal{N}_{r,r+2l+2k+i-p}(t^{-n},t^{-n+1}/ac,t^{-n+1}/ad,t^{-n+1}/cd,-t^{-2n}/acd,-t/b,t/a;t)\\ &\quad \times \mathcal{N}_{r+2l+2k+i-p,r+2l+2k-p}(t^{-n},-t^{-n+1}/a^2,t^{-n+1}/ac,-t^{-n+1}/ac,t^{-2n}/a^2c,-t/d,t/c;t)\\ &\quad \times \widetilde{\mathcal{M}}_{r+2l+2k-p,r+2l-p}(t^{-2n+2}/c^4,t^{-2n-4},c^2/ta^2,1/t^2;t)\\ &\quad \times \mathcal{M}_{r+2l-p,r-p}(t^{-n},t,1/c^2,1;t)\\ &= \sum_{i+2k+2l\leq p} (-1)^p\widehat{c_o}^{new}(p-2l-2k-i,0;t^{n-r+1})\widehat{c_o}^{new}(0,i;t^{n-r-2l-2k-i+p+1})\end{aligned}$$

$$\times \widehat{c_e^l}(k,0;t^{n-r-2l-2k+p+1})\widehat{c_e^l}(0,l;t^{n-r-2l+p+1}).$$

ここで，次の lemma に注意する．

Lemma 7.2 ([HS1], Lemma 3.3)**.**

$$E_r(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \binom{n-r+2k}{k} m_{(1^{r-2k})}(x),$$

ここに $\binom{m}{j}$ は二項係数．

Definition 7.1 と Lemma 7.2 より，一列型 BC_n 型 Koornwinder 多項式 $P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)$ と一列型 BC_n 型単項対称多項式 $m_{(1^r)}(x)$ との間の遷移行列 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ の成分は次のように表される．

Proposition 7.3.

$$\mathcal{C}_{n-r,n-r+2h} = \sum_{p=0}^{h} B(n,r,2p)\binom{n-r+2h}{h-p} \quad (0 \le h \le \lfloor r/2 \rfloor), \tag{7.1}$$

$$\mathcal{C}_{n-r,n-r+2h+1} = \sum_{p=0}^{h} B(n,r,2p+1)\binom{n-r+2h+1}{h-p} \quad (0 \le h \le \lfloor (r-1)/2 \rfloor). \tag{7.2}$$

ここで，$B(n,r,p)$ に関する関係式を紹介する．

Theorem 7.4.

$$\begin{aligned} &B(n,r,p) + B(n,r,p-2) \\ &\quad = B(n,r+1,p) + f(t^{n-r}|a,b,c,d)B(n,r-1,p-2) + g(t^{n-r}|a,b,c,d)B(n,r,p-1). \end{aligned}$$

証明は数学的帰納法による (途中，Theorem 6.4 と Theorem 6.7 を用いる)．

Thoerem 3.2 (3.2c) の証明:

遷移行列 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{i,j})$ について，$i = n-r$，$j = n-r+2h$ $(h \ge 0)$ として証明する．簡単のため $f(s) = f(s|a,b,c,d)$，$g(s) = g(s|a,b,c,d)$ と略記する．Proposition 7.3 を用いると，Theorem 3.2 (3.2c) の右辺は次のように書ける:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_{n-r-1,n-r+2h-1} + g(t^{n-r})\mathcal{C}_{n-r,n-r+2h-1} + f(t^{n-r})\mathcal{C}_{n-r+1,n-r+2h-1} \\ &= \sum_{p=0}^{h} B(n,r+1,2p)\binom{n-r-1+2h}{h-p} + g(t^{n-r})\sum_{p=0}^{h-1} B(n,r,2p+1)\binom{n-r+2h-1}{h-1-p} \\ &\quad + f(t^{n-r})\sum_{p=0}^{h-1} B(n,r-1,2p)\binom{n-r+2h-1}{h-1-p}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

ここで，(7.3) の最初の項は次のように変形できる:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{h} B(n,r+1,2p)\binom{n-r-1+2h}{h-p} \\
&= \binom{n-r-1+2h}{h} + \sum_{p=1}^{h} B(n,r+1,2p)\binom{n-r-1+2h}{h-p} \\
&= \binom{n-r-1+2h}{h} + \sum_{p=0}^{h-1} B(n,r+1,2p+2)\binom{n-r-1+2h}{h-p-1}.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

また，Theorem 7.4 より (7.3) の右辺の第二，三項は次のように変形できる:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{h-1}\binom{n-r+2h-1}{h-1-p}\Big(g(t^{n-r})B(n,r,2p+1)+f(t^{n-r})B(n,r-1,2p)\Big) \\
&= \sum_{p=0}^{h-1}\binom{n-r+2h-1}{h-1-p}\Big(B(n,r,2p+2)+B(n,r,2p)-B(n,r+1,2p+2)\Big) \\
&= \sum_{p=0}^{h-1}\binom{n-r+2h-1}{h-1-p}\Big(B(n,r,2p+2)-B(n,r+1,2p+2)\Big) \\
&\quad + \sum_{p=0}^{h-1}\left(\binom{n-r+2h}{h-p}-\binom{n-r+2h-1}{h-p}\right)B(n,r,2p) \\
&= \sum_{p=0}^{h-1}\binom{n-r+2h-1}{h-1-p}\Big(B(n,r,2p+2)-B(n,r+1,2p+2)\Big) \\
&\quad + \sum_{p=0}^{h}\left(\binom{n-r+2h}{h-p}-\binom{n-r+2h-1}{h-p}\right)B(n,r,2p).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

よって (7.4)，(7.5) より，(7.3) の右辺は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\binom{n-r-1+2h}{h} + \sum_{p=0}^{h}\binom{n-r+2h}{h-p}B(n,r,2p) \\
&+ \sum_{p=0}^{h-1}\binom{n-r+2h-1}{h-1-p}B(n,r,2p+2) - \sum_{p=0}^{h}\binom{n-r+2h-1}{h-p}B(n,r,2p).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

ここに，(7.6) の最後の項は次のように変形できる:

$$\begin{aligned}
&\binom{n-r+2h-1}{h} + \sum_{p=1}^{h}\binom{n-r+2h-1}{h-p}B(n,r,2p) \\
&= \binom{n-r+2h-1}{h} + \sum_{p=0}^{h-1}\binom{n-r+2h-1}{h-p-1}B(n,r,2p+2).
\end{aligned} \tag{7.7}$$

これより (7.3) の右辺は次のようになる:

$$\sum_{p=0}^{h}\binom{n-r+2h}{h-p}B(n,r,2p)=\mathcal{C}_{n-r,n-r+2h}.$$

以上より，$i=n-r$，$j=n-r+2h$ のとき Thoerem 3.2 (3.2c) は証明された．$i=n-r$，$j=n-r+2h+1$ の場合についても同様に証明される．

8　Theorem 3.3 の証明

この節では Theorem 3.3 を証明する．Theorem 3.2 より次を得る:

$$P_{(1^r)}^{BC_n}=\sum_{k=0}^{r}\mathcal{C}_{n-r,n-r+k}m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{8.1}$$

ここで

$$\begin{aligned}&m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\&=m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})+\Big(x_n+1/x_n\Big)m_{(1^{r-k-1})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\end{aligned}$$

に注意すると，次を得る:

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_{n-r,n-r+k}m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\&=\mathcal{C}_{n-r,n-r+k}m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\\&\qquad\qquad+\mathcal{C}_{n-r,n-r+k}(x_n+1/x_n)m_{(1^{r-k-1})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).\end{aligned} \tag{8.2}$$

ここで Theorem 3.2 (3.2c) より，(8.2) の最初の項は次のように書ける:

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_{n-r,n-r+k}m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\\&=\Big(\mathcal{C}_{n-r-1,n-r+k-1}+g(t^{n-r})\mathcal{C}_{n-r,n-r+k-1}\\&\qquad\qquad+f(t^{n-r})\mathcal{C}_{n-r+1,n-r+k-1}\Big)m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}P_{(1^r)}^{BC_n}&=\sum_{k=0}^{r}\mathcal{C}_{n-r-1,n-r-1+k}m_{(1^{r-k})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\\&\quad+\sum_{k=0}^{r-1}\Big((x_n+1/x_n)+g(t^{n-r})\Big)\mathcal{C}_{n-r,n-r+k}m_{(1^{r-k-1})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\\&\quad+\sum_{k=0}^{r-2}f(t^{n-r})\mathcal{C}_{n-r+1,n-r+1+k}m_{(1^{r-k-2})}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).\end{aligned}$$

以上より，Theorem 3.3 が証明された．

9 応用

A_n 型 Schur 多項式の A_n 型 Hall–Littlewood 多項式による展開係数は非負係数多項式となることが知られており，Kostka 多項式と呼ばれる．この節では Koornwinder 多項式のパラメタを特殊化して得られる (B_n, B_n) 型 Macdonald 多項式 $P^{(B_n,B_n)}_{(1^r)}(x|a;q,t)$ を扱い，一列型 B_n 型 Kostka 多項式の具体形を与える．

Koornwinder 多項式のパラメタを $(a,b,c,d) \to (q^{1/2}, -q^{1/2}, -1, a)$ とすると (B_n, B_n) 型 Macdonald 多項式 $P^{(B_n,B_n)}_{\lambda}(x|a;q,t)$ が得られる:

$$P^{(B_n,B_n)}_{\lambda}(x|a;q,t) = P_\lambda(x|q^{1/2}, -q^{1/2}, -1, a|q,t).$$

Theorem 9.1. $P^{(B_n,B_n)}_{\lambda}(x|a;q,t)$ のパラメタを $a = t$ とする．

$$\begin{aligned}
&P^{(B_n,B_n)}_{(1^r)}(x|t;q,t)\\
&= \sum_{j=0}^{r} \frac{(1/t, t^{n-r+1}, -t^{n-r}q, t^{2n-2r}q/t;t)_j}{(t, t^{2n-2r+1}q;t)_j (t^{2n-2r}q/t;t^2)_j}(-t)^j\\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{r-j}{2} \rfloor} \frac{(t/q, t^{n-r+2+j}, t^{2n-2r+2j};t^2)_k}{(t^2, t^{n-r+j}, t^{2n-2r+1+2j}q;t^2)_k} \frac{(t^{n-r+j};t)_{2k}}{(t^{n-r+1+j};t)_{2k}} \frac{1-t^{n-r+2k+j}}{1-t^{n-r+j}} q^k E_{r-2k-j}(x),\\
&E_r(x)\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{(t^{n-r+1};t)_{2k}}{(t^{n-r};t)_{2k}} \frac{(q/t;t^2)_k}{(t^2, t^{2n-2r+2};t^2)_k} \frac{(t^{2n-2r};t^2)_{2k}(t^{2n-2r-1}q;t^2)_k}{(t^{2n-2r-1}q;t^2)_{2k}} t^k\\
&\quad \times \sum_{j=0}^{r-2k} (-1)^j \frac{(t^{n-r+2k+1}, -t^{n-r+2k}q, -t^{n-r+2k}q^{1/2}, t^{n-r+2k}q^{1/2};t)_j}{(t^{2n-2r+4k}q;t)_{2j}} P^{(B_n,B_n)}_{(1^{r-2k-j})}(t;q,t).
\end{aligned}$$

Corollary 9.2. $P^{(B_n,B_n)}_{(1^r)}(x|t;q,t)$ において $t = q$ とすると，B_n 型 Schur 多項式 $s^{B_n}_{(1^r)}(x) = P^{(B_n,B_n)}_{(1^r)}(x|q;q,q)$ が得られる:

$$s^{B_n}_{(1^r)}(x) = E_r(x) + E_{r-1}(x),$$
$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j s^{B_n}_{(1^{r-j})}(x).$$

Corollary 9.3. $P^{(B_n,B_n)}_{(1^r)}(x|t;q,t)$ において $q = 0$ とすると，(B_n, B_n) 型 Hall–Littlewood 多項式 $P^{(B_n,B_n)}_{(1^r)}(x|t;0,t)$ が得られる:

$$P^{(B_n,B_n)}_{(1^r)}(x|t;0,t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (-1)^k t^{k^2} \frac{[n-r+2k]_t}{[n-r]_t} \begin{bmatrix} n-r+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{t^2} E_{r-2k}(x)$$

$$+(1-t^{n-r+1})\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}(-1)^k t^{k^2}\frac{[n-r+2k+1]_t}{[n-r+1]_t}\begin{bmatrix}n-r+k\\k\end{bmatrix}_{t^2}E_{r-1-2k}(x),$$

$$E_r(x)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\frac{(t^{n-r+1};t)_{2k}}{(t^{n-r};t)_{2k}}\frac{(t^{2n-2r};t^2)_{2k}}{(t^2,t^{2n-2r+2};t^2)_k}t^k\sum_{j=0}^{r-2k}(-1)^j(t^{n-r+2k+1};t)_jP^{(B_n,B_n)}_{(1^{r-2k-j})}(t;0,t)$$

$$=\sum_{l=0}^{r}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}\frac{(t^{2n-2r};t^2)_{2k}}{(t^2;t^2)_k(t^{n-r};t)_{2k}(t^{2n-2r+2};t^2)_k}t^k(-1)^l(t^{n-r+1};t)_lP^{(B_n,B_n)}_{(1^{r-l})}(t;0,t).$$

Definition 9.4. $K^{B_n}_{(1^r)(1^{r-l})}(t)$ を次のように定める:

$$s^{B_n}_{(1^r)}(x)=\sum_{l=0}^{r}K^{B_n}_{(1^r)(1^{r-l})}(t)P^{(B_n,B_n)}_{(1^{r-l})}(t;0,t).$$

このとき，Corollary 9.2，Corollary 9.3 より次を得る．

Corollary 9.5. $K^{B_n}_{(1^r)(1^{r-l})}(t)$ は次で表される:

$$K^{B_n}_{(1^r)(1^{r-l})}(t)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}\frac{(t^{2n-2r};t^2)_{2k}(t^{n-r+1};t)_l}{(t^2;t^2)_k(t^{n-r};t)_{2k}(t^{2n-2r+2};t^2)_k}t^k(-1)^l$$
$$+\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l-1}{2}\rfloor}\frac{(t^{2n-2r+2};t^2)_{2k}(t^{n-r+2};t)_{l-1}}{(t^2;t^2)_k(t^{n-r+1};t)_{2k}(t^{2n-2r+4};t^2)_k}t^k(-1)^{l-1}.$$

Corollary 9.5 を変形すると，次が得られる．

Theorem 9.6 (一列型 B_n 型 Kostka 多項式)**.**

$$K^{(B_n)}_{(1^r)(1^{r-l})}(t)=\begin{cases}t^L\begin{bmatrix}n-r+2L\\L\end{bmatrix}_{t^2} & (l=2L),\\[2ex] t^{L+n-r+1}\begin{bmatrix}n-r+2L+1\\L\end{bmatrix}_{t^2} & (l=2L+1).\end{cases}$$

特に，$K^{B_n}_{(1^r)(1^{r-l})}(t)$ は t の非負係数多項式である．

10　最後に

講演の機会を与えたくださった石川雅雄先生に，この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[B] D. M. Bressoud, A matrix inverse, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 446–448.

[Mac] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Lothar. Combin.* **45** (2000), Art. B45a.

[L] M. Lassalle, Some conjectures for Macdonald polynomials of type B, C, D. Sem. Lothar. Combin. **52** (2004), Art. B52h, 24 pp. (electronic).

[HNS] A. Hoshino, M. Noumi and J. Shiraishi, Some transformation formulas associated with Askey–Wilson polynomials and Lassalle's formulas for Macdonald-Koornwinder polynomials, Mosc. Math. J. **15** (2015), no. 2, 293–318, 404–405.

[HS1] A. Hoshino and J. Shiraishi, Macdonald polynomials of type C_n and deformed Catalan numbers, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **14** (2018), Paper No. 101, 33 pp.

[HS2] A. Hoshino and J. Shiraishi, Branching rules for Koornwinder polynomials with one column diagrams and matrix inversions, preprint.

[K] Koornwinder T. H., Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC, in Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications (Tampa, FL, 1991), *Contemp. Math.*, Vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 189–204.

[Mi] K. Mimachi, A duality of Macdonald–Koornwinder polynomials and its application to integral representations, Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 265–281.