ラグランジュキャップによるラグランジュ部分多様体の構成
A construction of Lagrangian submanifolds via Lagrangian caps

北海道大学高等教育推進機構　吉安 徹
Toru Yoshiyasu
Institute for the Advancement of Higher Education,
Hokkaido University

概要

本稿は論文 [18] の予報である. 任意の 3 次元向き付け可能閉多様体 L と非負整数 g に対し, 連結和 $L\#(S^1 \times N_{2g})$ から標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュ埋め込みが存在することを報告する. ここに, N_{2g} はオイラー標数 $-2g$ の向き付け不可能閉曲面である.

1　序

ラグランジュ部分多様体は, シンプレクティック多様体の中間次元部分多様体である. 一般に, n 次元多様体は $2n$ 次元ユークリッド空間への滑らかな埋め込みを持つ [16]. 一方, ラグランジュ埋め込みについて同様の主張は成り立たず, ラグランジュ部分多様体のトポロジーは制限を受ける. このことを最初に見出したのは, M. Gromov である.

定理 1.1 (Gromov [9])**.** 標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ の閉ラグラン

ジュ部分多様体 L に対し, $H^1(L;\mathbb{R}) \neq 0$ が成り立つ.

M. Gromov は擬正則曲線の理論を創始し, 定理 1.1 を証明した. その後, この理論に基づく多くの研究が行われ, 様々なシンプレクティック多様体におけるラグランジュ部分多様体の必要条件が得られた. 代表例としては, K. Fukaya による次の結果が挙げられる.

定理 1.2 (Fukaya [6])**.** 標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ の向き付け可能で素な閉ラグランジュ部分多様体は $S^1 \times \Sigma_g$ に限られる. ここに, g は非負整数, Σ_g は種数 g の向き付け可能閉曲面である.

他方, ラグランジュ部分多様体の存在や構成に関する結果は少なく, 限られた十分条件しか知られていなかった. しかし, Y. Eliashberg と E. Murphy によって確立されたラグランジュ交叉の解消理論 [5] により, 近年は多くの進展が見られる [4, 5, 13, 17, 18]. 本稿では, 著者の論文 [18] の主定理について報告する.

定理 1.3 ([18])**.** L を 3 次元向き付け可能閉多様体, g を非負整数, N_{2g} をオイラー標数 $-2g$ の向き付け不可能閉曲面とする. この時, 連結和 $L\#(S^1 \times N_{2g})$ から標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュ埋め込みが存在する.

2 ラグランジュ部分多様体

この章では, 標準シンプレクティック空間のラグランジュ部分多様体の構成に関する先行研究を振り返り, 定理 1.3 の証明の準備を行う. まず, シンプレクティック多様体とラグランジュ部分多様体を定義する.

定義 2.1. シンプレクティック多様体とは, 偶数次元多様体 X とその上の非退化かつ閉な微分 2 形式 ω の組 (X, ω) のことである. 微分 2 形式 ω をシンプレクティック形式またはシンプレクティック構造と呼ぶ. また, シンプレクティック構造を保つ微分同相写像を, シンプレクティック同相写像と呼

ぶ．$2n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の標準的な座標 $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ のもと, 微分 2 形式 ω_{st} を

$$\omega_{\mathrm{st}} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

と定めると, 組 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathrm{st}})$ はシンプレクティック多様体となる．これを標準シンプレクティック空間と呼び, 以後 $\mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ で表す.

定義 2.2. $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (X, ω) とその n 次元部分多様体 L を考える．L がラグランジュ部分多様体であるとは, 制限 $\omega\,|_L$ が微分 2 形式として恒等的に 0 となっていることである．像がラグランジュ部分多様体となる埋め込み写像をラグランジュ埋め込みと呼ぶ．部分多様体をはめ込まれた部分多様体に, 埋め込みをはめ込みに取り換えることで, はめ込まれたラグランジュ部分多様体とラグランジュはめ込みを同様に定義する.

ラグランジュはめ込みはホモトピー原理と呼ばれる性質を満たす．つまり, ラグランジュはめ込みの存在はホモトピー論の問題に帰着される．ここでは, 値域が標準シンプレクティック空間の場合の主張を述べる．一般のシンプレクティック多様体に対する主張は [10, 11] を参照されたい.

定理 2.3 (Gromov [8, 10], Lees [11])**.** n 次元多様体 L が標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュはめ込みを持つことと, 複素化された接束 $TL \otimes \mathbb{C} \to L$ が自明な複素ベクトル束となることは同値である.

例 2.4. 3 次元向き付け可能閉多様体は平行化可能であるため, 複素化された接束は自明である．向き付け可能閉曲面は安定平行化可能であるため, 複素化された接束は自明である．向き付け不可能閉曲面に対しては, オイラー標数が偶数であることと複素化された接束の自明性が同値となる.

一方で, 定理 1.1 より, ラグランジュ埋め込みに対して定理 2.3 と同様の主張は成り立たない．実際, 定理 2.3 と定理 1.1 を併用することにより, 標準シンプレクティック空間への自己交叉数 0 のラグランジュはめ込みを持つが, ラグランジュ埋め込みは持たない多様体の例を構成することができる．特に,

一般のラグランジュ交叉を正則ホモトピーで解消することはできない.

ラグランジュはめ込みからラグランジュ埋め込みを構成する方法としては, 次の命題がよく知られている.

命題 2.5. n 次元多様体 L に対し, 次の二条件は同値である.

(1) ラグランジュはめ込み $L \to \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ が存在する.
(2) ラグランジュ埋め込み $S^1 \times L \to \mathbb{R}^{2n+2}_{\mathrm{st}}$ が存在する.

命題 2.5 の証明は, 複素化された接束の自明性に関する議論と埋め込み写像の一般の位置に関する議論によってなされる. 詳細は教科書 [2] を参照されたい. 定理 2.3, 例 2.4, 命題 2.5 から, よく知られた 3 次元ラグランジュ部分多様体の例が構成できる.

系 2.6. 非負整数 g に対し, 3 次元多様体 $S^1 \times \Sigma_g$ と $S^1 \times N_{2g}$ は標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュ埋め込みを持つ.

自己横断的なラグランジュはめ込みに対し, 二重点を 0-手術で解消してラグランジュ埋め込みを作ることもできる.

定理 2.7 (Polterovich [14])**.** n を 2 以上の整数, L を連結な n 次元閉多様体, $f\colon L \to \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ を自己横断的なラグランジュはめ込み, $p \in \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ をはめ込み f の二重点, $U \subset \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ を点 p の近傍とする. この時, U 上で定義された 0-手術で二重点 p を解消して, 次のようなラグランジュはめ込みを構成できる:

(1) $\mathrm{ind}_f(p) = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)+1}$ または n が奇数なら

$$f_+\colon L\#(S^1 \times S^{n-1}) \to \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}},$$

(2) $\mathrm{ind}_f(p) = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}$ または n が奇数なら

$$f_-\colon L\#(S^1 \tilde{\times} S^{n-1}) \to \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}.$$

ここに, $\mathrm{ind}_f(p)$ ははめ込み f の点 p における自己交叉数, $S^1 \tilde{\times} S^{n-1}$ は球面 S^{n-1} の大円についての鏡映写像による写像トーラスである.

定理 2.3 と定理 2.7 より, 3 次元向き付け可能閉多様体 L に対し非負整数 k が存在して, 連結和 $L\#k(S^1 \times S^2)$ は標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュ埋め込みを持つ [14]. しかし, ごく一部の例を除き, 整数 k の最小値を求める方法は近年まで知られていなかった. T. Ekholm ら [4] は Y. Eliashberg と E. Murphy によるラグランジュ交叉の解消理論 [5] を応用し, 全ての 3 次元向き付け可能閉多様体に対して整数 k の最小値が 1 以下であることを示した.

定理 2.8 (Ekholm–Eliashberg–Murphy–Smith [4]). 3 次元向き付け可能閉多様体 L に対し, 連結和 $L\#(S^1 \times S^2)$ は標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュ埋め込みを持つ.

3 ラグランジュキャップとラグランジュ交叉の解消

この章では, Y. Eliashberg と E. Murphy によるラグランジュ交叉の解消理論 [5] について概説する. この理論は定理 2.8 の証明で中心的な役割を果たした. また, 定理 1.3 の証明においても同様の役割を担っている.

まず, ラグランジュフィリングとラグランジュキャップを定義する.

定義 3.1. 境界を持つシンプレクティック多様体 (X, ω) と, その上のベクトル場 Z で $\mathcal{L}_Z\omega = \omega$ かつ境界 ∂X に横断的なものを考える. 組 (X, ω, Z) をリウヴィル多様体, Z をリウヴィルベクトル場と呼ぶ. リウヴィルベクトル場 Z が外向きに横断的な X の境界成分の和集合 $\partial_+ X$ を凸境界, 内向きに横断的な X の境界成分の和集合 $\partial_- X$ を凹境界と呼ぶ.

例 3.2. 標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ 上で定義されたベクトル場

$$Z_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

を考える. 標準シンプレクティック空間の原点を中心とする単位球 B^{2n} に対し, 組 $(B^{2n}, \omega_{\mathrm{st}}, Z_{\mathrm{st}})$ は球面 ∂B^{2n} を凸境界に持つリウヴィル多様体, 組

$(\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathrm{Int}\, B^{2n}, \omega_{\mathrm{st}}, Z_{\mathrm{st}})$ は球面 ∂B^{2n} を凹境界に持つリウヴィル多様体となる．この時, 微分 1 形式 λ_{st} を

$$\lambda_{\mathrm{st}} = \iota_{Z_{\mathrm{st}}} \omega_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (-y_j\, dx_j + x_j\, dy_j)$$

と定めると, 組 $(\partial B^{2n}, \ker(\lambda_{\mathrm{st}} \mid_{\partial B^{2n}}))$ は接触多様体となる．これを標準接触球面と呼び, 以後 S^{2n-1}_{st} で表す.

定義 3.3. 境界を持つリウヴィル多様体 (X, ω, Z) に対し, はめ込まれたラグランジュ部分多様体 L で境界が空でないものを考える．境界 ∂L が凸境界 $\partial_+ X$ に埋め込まれている時, L を ∂L のラグランジュフィリングと呼ぶ．境界 ∂L が凹境界 $\partial_- X$ に埋め込まれている時, L を ∂L のラグランジュキャップと呼ぶ.

例 3.4. リウヴィル多様体 $(B^{2n}, \omega_{\mathrm{st}}, Z_{\mathrm{st}})$ に対し,

$$D^n = \{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1,\ y_1 = \cdots = y_n = 0\}$$

はルジャンドル球面 ∂D^n のラグランジュフィリングとなる．リウヴィル多様体 $(\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathrm{Int}\, B^{2n}, \omega_{\mathrm{st}}, Z_{\mathrm{st}})$ に対し,

$$\{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 1,\ y_1 = \cdots = y_n = 0\}$$

はルジャンドル球面 ∂D^n のラグランジュキャップとなる.

任意のラグランジュはめ込み $f\colon L \to \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ に対し, L に埋め込まれた n 次元閉円板 D_L とシンプレクティック同相写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}} \to \mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}}$ であって, 条件

(1) $\varphi(f(L \setminus D_L)) \cap B^{2n} = \emptyset$,
(2) $\varphi(f(D_L)) = D^n$ かつ $\varphi \circ f \mid_{D_L}$ は B^{2n} への埋め込み

を満たすものが存在する [15]．つまり, はめ込まれたラグランジュ部分多様体 $\varphi(f(L))$ は, ルジャンドル球面 ∂D^n を境界として, はめ込まれたラグランジュキャップ $\varphi(f(L \setminus \mathrm{Int} D_L))$ と埋め込まれたラグランジュフィリング D^n に分解することができる.

定理 1.1 より, ラグランジュはめ込み f はラグランジュ埋め込みに変形できるとは限らない. 特に, はめ込まれたラグランジュキャップ $\varphi(f(L \setminus \mathrm{Int}\, D_L))$ から埋め込まれたラグランジュキャップへの正則ホモトピーであって, 境界を止めるものが存在するとは限らない. しかし, 次のような仮定の下では, ラグランジュキャップの自己交叉を解消することができる.

定理 3.5 (Eliashberg–Murphy [5])**.** n を 3 以上の整数とする. 滑らかな境界を持ち連結な n 次元多様体 L とラグランジュはめ込み

$$f\colon (L, \partial L) \to (\mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}} \setminus \mathrm{Int}\, B^{2n}, S^{2n-1}_{\mathrm{st}})$$

が次の二条件を満たすと仮定する.

(1) はめ込み f の自己交叉数は 0.
(2) 制限 $f\,|_{\partial L}\colon \partial L \to S^{2n-1}_{\mathrm{st}}$ はルースなルジャンドル埋め込み.

この時, ラグランジュはめ込み f からラグランジュ埋め込みへの正則ホモトピーであって, 境界 ∂L の近傍を止めるものが存在する.

注意 3.6. T. Ekholm ら [4] は標準接触球面 S^5_{st} 内のルースなルジャンドル球面 S^2 のラグランジュフィリング $S^1 \times S^2 \setminus \mathrm{Int}\, D_S$ を構成し, 3 次元多様体 $L \setminus \mathrm{Int}\, D_L$ に定理 3.5 を適用したものと貼り合わせて, $L\#(S^1 \times S^2)$ のラグランジュ埋め込みを構成した. ここに, D_S は $S^1 \times S^2$ に埋め込まれた 3 次元閉円板, D_L は L に埋め込まれた 3 次元閉円板である.

注意 3.7. 定理 3.5 はリウヴィル多様体 $\mathbb{R}^{2n}_{\mathrm{st}} \setminus \mathrm{Int}\, B^{2n}$ に対してだけでなく, 凹境界を持つ 6 次元以上のシンプレクティック多様体に対して成り立つ. 主張と定義の詳細については論文 [5] を参照されたい. また, 論文 [5] のグロモフ幅に関する仮定は論文 [17] で取り除かれた.

ルースなルジャンドル部分多様体は, E. Murphy によって定義された [12]. ここでは, 論文 [4] で用いられた同値な定義を述べる.

定義 3.8. n を 3 以上の整数とする. $2n-1$ 次元接触多様体 (Y, ξ) のルジャ

ンドル部分多様体 Λ がルースとは, 別のルジャンドル部分多様体 Λ' が存在して, Λ は Λ' の安定化となっていることである.

ルースなルジャンドル埋め込みはホモトピー原理を満たす. つまり, ルースなルジャンドル部分多様体のルジャンドルイソトピーによる分類問題は, ホモトピー論とイソトピーの問題に帰着される.

定理 3.9 (Murphy [12])**.** n を 3 以上の整数とする. $2n-1$ 次元接触多様体 (Y,ξ) のルースなルジャンドル部分多様体 Λ_1, Λ_2 に対し, 次の二条件は同値である.

(1) Λ_1 から Λ_2 へのルジャンドルイソトピーが存在する.
(2) Λ_1 から Λ_2 へのイソトピーとルジャンドル正則ホモトピーであって, 正則ホモトピーとしてホモトピックなものが存在する.

注意 3.10. ルジャンドルはめ込みはホモトピー原理を満たし, ルジャンドル正則ホモトピーの存在はホモトピー論の問題に帰着される [3, 10].

はめ込みの自己交叉に対するホイットニートリック [16] は, $2n$ 次元球体 B^{2n} へ適切に埋め込まれた二つの n 次元円板 $(D_1, \partial D_1) \subset (B^{2n}, \partial B^{2n})$ と $(D_2, \partial D_2) \subset (B^{2n}, \partial B^{2n})$ の交叉の解消可能性を, 境界球面 ∂B^{2n} の絡み目 $\partial D_1 \coprod \partial D_2$ の自明性に帰着するものであった. ラグランジュ交叉についても, 境界のルジャンドル部分多様体が同様の役割を果たす. ただし, 一般のラグランジュ交叉に対して, この議論が有用とは限らない. なぜなら, ルジャンドル部分多様体が自明なルジャンドル絡み目になっているかどうかは難しい問題で, 自明な絡み目であっても自明なルジャンドル絡み目になるとは限らないためである. しかし, ルースなルジャンドル境界を持つラグランジュキャップに対しては, これを利用することでルジャンドル絡み目の自明性を滑らかな絡み目としての自明性とホモトピー論の問題に帰着できる. したがって, ラグランジュ交叉の解消もこの問題に帰着される. 定理 3.5 の証明には多くのテクニックが使われているが, この議論が最も大事なポイントの一つとなっている.

4　定理 1.3 の証明の概略

標準接触空間

$$\mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} = (\mathbb{R}^3, \ker(dz - y\,dx)), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

の自明なルジャンドル結び目

$$l_0 \colon S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} : \theta \mapsto \left(\sin\theta, -\sin 2\theta, \frac{2}{3}\cos^3\theta\right)$$

とその安定化

$$l_1 \colon S^1 \to \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} : \theta \mapsto \left(\sin\theta, \sin 4\theta, \frac{4}{3}\cos^3\theta - \frac{8}{5}\cos^5\theta\right)$$

を考える．標準接触空間 $\mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}$ から xz-平面への射影を $\pi\colon \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} \to \mathbb{R}^2$ と書き, $\pi(\mathbb{R}^3_{\mathrm{st}})$ をフロントと呼ぶ．ルジャンドル結び目の y 座標は方程式

$$y = \frac{dz}{dx}$$

を満たすため, ルジャンドル結び目とそのフロントは等価である．特に, ルジャンドル結び目 l_0 のフロントから l_1 のフロントへの線型ホモトピーは, ルジャンドル結び目 l_0 から l_1 へのルジャンドル正則ホモトピーにリフトする．区間 $[0,N]$ 上で定義された時間パラメータを持つ線型ホモトピーを時刻 0 と N の近くでカットオフしたものに対しても, 同様にルジャンドル正則ホモトピーへのリフトを行うことができる．こうして作ったルジャンドル正則ホモトピーのトレース

$$F\colon [0,N] \times S^1 \to [0,N] \times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} : (t,\theta) \mapsto (t, x(t,\theta), y(t,\theta), z(t,\theta))$$

を考えると, これは横断的な自己交叉をただ一つ持つはめ込みとなっている．ここに, $[0,N] \times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}$ は標準接触空間 $\mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}$ のシンプレクティック化

$$\big([0,N] \times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}, d(e^t(dz - y\,dx))\big), \quad (t,x,y,z) \in [0,N] \times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}},$$

である．はめ込み F の自己交叉は, l_0 のフロントから l_1 のフロントへの線型ホモトピー内に現れる非横断的な交叉に対応している．一般に, ルジャンドル正則ホモトピーのトレースはラグランジュはめ込みにならないが, 次のように摂動することでラグランジュはめ込みに修正できる:

$$\tilde{F}(t,\theta) = \left(t, x(t,\theta), y(t,\theta), z(t,\theta) + \frac{\partial z}{\partial t}(t,\theta) - y(t,\theta)\frac{\partial x}{\partial t}(t,\theta)\right).$$

正整数 N を大きく取り直せば, 摂動項

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,\theta) - y(t,\theta)\frac{\partial x}{\partial t}(t,\theta)$$

は小さくなる．つまり, 十分大きな N を選ぶことで, はめ込み $\tilde{F}$ と F の自己交叉の個数が各々の自己交叉数まで含めて一致するようにできる．こうして, ルジャンドル結び目 l_0 とその安定化 l_1 を境界とし, 横断的な自己交叉をただ一つ持つラグランジュはめ込み $\tilde{F}$ が得られた．

次に, $\tilde{F}$ と逆向きのラグランジュはめ込みを構成する．ルジャンドル結び目 l_1 のフロントから l_0 のフロントへの時間 N の線型ホモトピーをカットオフし, $\tilde{F}$ と同様の構成を行う．ただし, 時間パラメータは閉区間 $[N, 2N]$ 上で定義する．こうして得られたラグランジュはめ込みを

$$\tilde{F}^{-1}\colon [N,2N]\times S^1 \to [N,2N]\times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}$$

と書く．構成より, ラグランジュはめ込み $\tilde{F}$ と $\tilde{F}^{-1}$ を滑らかに貼り合わせて, ラグランジュはめ込み $\tilde{F}\cup\tilde{F}^{-1}\colon [0,2N]\times S^1 \to [0,2N]\times\mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}$ を定義することができる．

次のようにして, $\tilde{F}\cup\tilde{F}^{-1}$ を標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^4_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュはめ込みと見なす．接触埋め込み $\mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} \to S^3_{\mathrm{st}}$ がシンプレクティック化に誘導するシンプレクティック埋め込み $[0,2N]\times\mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} \to [0,2N]\times S^3_{\mathrm{st}}$ と自然なシンプレクティック埋め込み $[0,2N]\times S^3_{\mathrm{st}} \subset \mathbb{R}^4_{\mathrm{st}}$ を $\tilde{F}\cup\tilde{F}^{-1}$ に合成すれば, シリンダー $[0,2N]\times S^1$ から標準シンプレクティック空間 $\mathbb{R}^4_{\mathrm{st}}$ へのラグランジュはめ込み $f\colon [0,2N]\times S^1 \to \mathbb{R}^4_{\mathrm{st}}$ が定義される．境界の連結成分 $f(\{0\}\times S^1)$ は接触球面 S^3_{st} 内の自明なルジャンドル結び目であるから, 例

3.4 直後の議論を用いることで, 球体 B^4 に埋め込まれた 2 次元円板 D^2 によるラグランジュフィリングを持つことがわかる. また, ラグランジュはめ込み f は自己横断的であり, ちょうど二つの自己交叉を持つ. ルジャンドル結び目 l_0 と l_1 の表示から, ラグランジュはめ込み $\tilde{F}$ に由来する自己交叉は自己交叉数 -1 を持つことが計算できる. ラグランジュはめ込み f にラグランジュフィリング D^2 を貼り合わせ, ラグランジュはめ込み $\tilde{F}$ に由来する自己交叉を定理 2.7 で解消することにより, 自己横断的でちょうど一つの自己交叉を持つ新たなラグランジュはめ込み $\tilde{f}\colon N_0 \setminus \operatorname{Int} D_N \to \mathbb{R}^4_{\mathrm{st}}$ が得られる. ここに, D_N はクラインボトル N_0 に埋め込まれた 2 次元閉円板である. さらに, 例 3.4 直後の議論と定理 2.3 より, ラグランジュはめ込み $\tilde{f}$ は向き付け不可能閉曲面 N_{2g} からのラグランジュはめ込みにのびる. これを同じ記号 $\tilde{f}\colon N_{2g} \to \mathbb{R}^4_{\mathrm{st}}$ で表す.

この時, 像 $\tilde{f}(N_{2g})$ は $\mathbb{R}^4_{\mathrm{st}}$ 内の領域 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}$ に含まれているとしてよい. ここに,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}} \subset \mathbb{R} \times S^3_{\mathrm{st}} = \mathbb{R}^4_{\mathrm{st}} \setminus \{\mathbf{0}\}$$

である. さらに, リウヴィルベクトル場 Z_{st} の負方向のフローを合成することにより, $\tilde{f}$ の像に含まれる安定化されたルジャンドル結び目 $f(\{N\} \times S^1)$ が標準接触空間 $\{0\} \times \mathbb{R}^3_{\mathrm{st}}$ に含まれているようにできる. こうして作り直したラグランジュはめ込み $\tilde{f}$ に S^1-スピニング構成 [7] を適用すれば, 新たなラグランジュはめ込み

$$g\colon S^1 \times N_{2g} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^5_{\mathrm{st}} \subset \mathbb{R} \times S^5_{\mathrm{st}} = \mathbb{R}^6_{\mathrm{st}} \setminus \{\mathbf{0}\}$$

が得られる. 像 $g(S^1 \times N_{2g})$ と標準接触球面 S^5_{st} の共通部分は, 円周 S^1 と安定化されたルジャンドル結び目 $f(\{N\} \times S^1)$ の直積として表されるルジャンドルトーラスになっており, 特にルースである. さらに, 像 $g(S^1 \times N_{2g})$ と単位球 B^6 の共通部分は埋め込まれたラグランジュフィリングとなっていることに注意する.

定理 2.3 より, 3 次元向き付け可能閉多様体 L に対し, ラグランジュはめ込み $h\colon L \to \mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ が存在する. 値域のシンプレクティック多様体が $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ で

あることから, $g(S^1 \times N_{2g})$ と $h(L)$ は横断的かつちょうど二点で交わり, $h(L) \cap B^6 = \emptyset$ と仮定してよい. 片方の交叉に定理 2.7 の 0-手術を適用することで, 新たなラグランジュはめ込み $h \# g \colon L \#(S^1 \times N_{2g}) \to \mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ を得る. この時, はめ込み $h\#g$ の自己交叉数は 0 であると仮定してよい [1]. ラグランジュはめ込み h に関する仮定から,

$$(h\#g)(L\#(S^1 \times N_{2g})) \cap B^6 = g(S^1 \times N_{2g}) \cap B^6$$

が成り立つ. したがって, $\mathbb{R}^6_{\mathrm{st}} \setminus \mathrm{Int}\, B^6$ 上で $h\#g$ に定理 3.5 が適用できて, ラグランジュ埋め込み $L\#(S^1 \times N_{2g}) \to \mathbb{R}^6_{\mathrm{st}}$ を得る. □

参考文献

[1] M. Audin. *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels.* Comment. Math. Helv. **63** (1988), no. 4, 593–623.

[2] M. Audin, F. Lalonde, and L. Polterovich. *Symplectic rigidity: Lagrangian submanifolds.* Chapter X of *Holomorphic curves in symplectic geometry.* Progress in Mathematics **117**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[3] T. Duchamp. *The classification of Legendre immersions.* Preprint, 1984.

[4] T. Ekholm, Y. Eliashberg, E. Murphy, and I. Smith. *Constructing exact Lagrangian immersions with few double points.* Geom. Funct. Anal. **23** (2013), 1772–1803.

[5] Y. Eliashberg and E. Murphy. *Lagrangian caps.* Geom. Funct. Anal. **23** (2013), 1483–1514.

[6] K. Fukaya. *Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology.* NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. **217** (2006), 231–276.

[7] R. Golovko. *A note on the front spinning construction.* Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), 258–268.

[8] M. Gromov. *A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities.* Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, 221–225.

[9] M. Gromov. *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds.* Invent. Math. **82** (1985), no. 2, 307–347.

[10] M. Gromov. *Partial Differential Relations.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **9**. Springer Verlag, Berlin (1986).

[11] J. A. Lees. *On the classification of Lagrange immersions.* Duke Math. J., **43** (1976), No. 2, 217–224.

[12] E. Murphy. *Loose Legendrian Embeddings in High Dimensional Contact Manifolds.* Preprint, arXiv:1201.2245.

[13] E. Murphy. *Closed exact Lagrangians in the symplectization of contact manifolds.* Preprint, arXiv:1304.6620.

[14] L. Polterovich. *The surgery of Lagrange submanifolds.* Geom. Funct. Anal. **1** (1991), 198–210.

[15] A. Weinstein. *Contact surgery and symplectic handlebodies.* Hokkaido Math. J., **20** (1991), 241–251.

[16] H. Whitney. *The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space.* Ann. of Math. **(2)45** (1944), 220–246.

[17] T. Yoshiyasu. *On Lagrangian embeddings into the complex projective spaces.* Internat. J. Math. **27**, No. 5 (2016), 1650044, 1–12.

[18] T. Yoshiyasu. *On Lagrangian embeddings of closed 3-manifolds having $S^1 \times N_{2g}$ as a connected summand.* Submitted.