高次元のコンフォリエーションについて

大阪歯科大学・数学教室　森　淳秀
Atsuhide Mori
Department of Mathematics,
Osaka Dental University

1　葉層とコンフォリエーション

実 m 次元多様体 M^m を葉と呼ばれる p 次元多様体の族へ分解したものを余次元 $q = m - p$ の葉層という．詳しくは $U \times V \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ の形の近傍を $U \times \{*\}$ が葉の上の近傍となるように，必要ならば V 方向の可微分性を下げて貼り合わせて M^m を被覆する．一般には V が葉に沿って移動して近くに戻ると非自明なホロノミー写像 $V \supset W \to V$ を生じる．このため葉層に横断的な幾何構造の研究は力学系理論との関係で発展した．未発達のコンフォリエーション理論では，反対に各葉の幾何構造が重要になるらしい．

有向多様体 M^{2n+1} 上に非特異 1-形式 α が定める超平面場 $\ker\alpha$ を取る．$\ker\alpha$ が葉層の接束となるのは完全可積分条件 $\alpha \wedge d\alpha = 0$ が成り立つときであり，$\ker\alpha$ が (正の) 接触構造になるのは最大非可積分性 $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$ (負の場合は < 0) を持つときである．そしてコンフォリエーションとは接触 (contact) 構造と葉層 (foliation) の中間の何かである．Eliashberg-Thurston [6] は $n = 1$ のコンフォリエーションを弱い不等式 $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$ によって定義した (§2)．本稿で議論したいのは $n > 1$ の場合に $\alpha \wedge d\alpha = 0$ と $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$ の中間をどう定義すればよいかである (§3)．

2　$n = 1$ の場合

$n = 1$ の場合は葉層にも接触構造にもトポロジーの結果があった．葉層には Novikov の定理というものがあり，例えば 3 次元球面 S^3 の任意の葉層には 2 次元トーラス T^2 と同相な葉で囲まれた Reeb 成分と呼ばれるソリッドトーラスが含まれる．他方で接触構造には Lutz 管と呼ばれるソリッドトーラスがあり，それを含む過旋 (overtwisted) なものと含まないタイトなものに二分される．コンパクト強擬凸領域の境界などはタイトである．コンフォリエーションは Reeb 成分と Lutz 管を以下のように関連付けてきた．

1. 全ての葉が球面の場合を除く全ての C^2-葉層，及び全ての葉が単連結な場合を除く全ての C^0-葉層について，葉層の接束を C^0-摂動して接触構造を得ることができる (Bowden[4] による [6] の結果の精密化)．葉層が Reeb 成分を持たなければそれを C^0-近似する接触構造は普遍被覆でもタイトである (Bowden[3] による [6] の主張の証明)．

2. 正負の互いに横断的な接触構造は，同じ射影的 Anosov 流に接し，それらを流した極限は同じ不安定葉層である (三松 [11])．安定・不安定葉層が C^2 級の射影的 Anosov 流では，各葉層は Reeb 成分を持たず，各接触構造はタイトである．分類も完成している (浅岡 [2])．

3. 任意のオープンブック分解は接触構造を一意に定める (Giroux [7]) とともに回転可能葉層という Reeb 成分を持つ葉層を，明らかにそれと分かる形で定める．前者の接触構造を適当にイソトピー変形して，後者の回転可能葉層に収束させることができて，接触構造がタイトな場合はその回転可能葉層は相対 Thurston 不等式というものを満たす (森 [14])．逆に回転可能葉層が相対 Thurston 不等式を満たすならば対応するオープンブックの接触構造はタイトである (三松-森 [13])．

相対 Thurston 不等式は Reeb 成分を持たない葉層の場合に Thurston [17] が示したものであるが，接触構造では同じ不等式が Lutz 管を持たないこと，つまりタイト性と同値である (Eliashberg [5])．ところが Reeb 成分を持つ場合でも，他に無駄な成分が無ければ上の 3 の例のように不等式を満たす．また不等式を満たす回転可能葉層に過旋な接触構造のイソトピー変形を収束させることも可能であり，接触構造の葉層への収束自体に善し悪しがある．このように Reeb 成分を持つ葉層にはすっきりしないことが残る．

3　$n > 1$ の場合

高次元では特に葉層側にトポロジーの結果が少ない*1ことが問題である．それどころか Novikov の定理は 4 次元以上の閉多様体の単に滑らかな余次元 1 葉層には一般化しないことが分かっている．実際与えられた葉層を (極めて激しく) 改変して全ての葉が稠密である葉層を得ることができる (Meigniez[10])．他方，高次元でも回転可能葉層には Reeb 成分のように閉葉が囲む部分があり，一定の条件下で各葉にシンプレクティック構造が入る (三松 [12], 森 [15])．シンプレクティック葉層は数理物理学において重要な Poisson 構造の例であるが，トポロジーの題材とは考えられて来なかった．とはいえ 3 次元多様体の有向葉層はシンプレクティック葉層でもあるから，葉層のトポロジーは横断的な幾何構造だけでなく各葉のシンプレクティック構造の研究を既に含んでいたと「妄想」することは可能である．

また狭義のシンプレクティック葉層というものがある．葉層のシンプレクティック構造を多様体の 2-形式 ω で書けば，$\alpha \wedge \omega^n > 0$ が非退化の条件，$\alpha \wedge d\omega = 0$ がシンプレクティック構造の可積分条件である．ここで後者を $d\omega = 0$ に強めたものが狭義のシンプレクティック葉層である．$n = 1$ の場

*1 葉層と接触構造の存在問題は解かれているし，接触構造のタイト性と過旋性の二元論がそのまま高次元化することも分かっているのだが，肝心の葉層の例がほとんどないので，コンフォリエーションを議論しても直ちに得るものは無いかもしれない．

合の狭義のシンプレクティック葉層はトート (taut) 葉層と呼ばれるもので，トポロジカルには全ての葉と横断的に交わるループが存在することによって特徴づけられる．反対に Reeb 成分のように葉層に横断的な流れが出ていくか入るかしかできない dead-end な部分があるものはトートでない．驚くべきことに $n > 2$ の場合の狭義のシンプレクティック葉層 $\mathcal{F}$ には，横断的な 3 次元閉部分多様体 N^3 が存在して，トート葉層を受け継ぎ，$\mathcal{F}$ の各葉と N^3 の交わりは 1 枚の葉である (Martínez Torres[8])．やはりシンプレクティック葉層は 3 次元多様体の葉層と似ていると「妄想」したくなる．

さて Eliashberg-Thurston の見解では，高次元のコンフォリエーションは次のように擬凸性によって定義すべきものである．

定義 3.1 ([6])．M^{2n+1} 上の非特異 1-形式 α が定める超平面分布 $\ker\alpha$ が (ET-) コンフォリエーションであるとは，$\ker\alpha$ をベクトル束と見たときの複素構造 J が存在し，$d\alpha(v, Jv) \geq 0$ ($\forall v \in \ker\alpha$) となることである．

ただし彼らはここから何の結果も得ていない．他方，Altshuler と Wu は擬凸性と異なる観点からコンフォリエーションの結果を得た ([1])．つまり $\alpha \wedge (d\alpha)^n \geq 0$ のときに $\ker\alpha$ を AW-コンフォリエーションと呼ぶとして，彼らは $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ が消えないところで AW-コンフォリエーションの接触構造への変形を考えた．これは有用であるが，残念なのは葉層が完全に排除されたことと基本的なメカニズムが $n = 1$ のときと変わらないことである．そこで Eliashberg と Thurston の定義に顔を立てつつ非自明な結果が得られるような第三のコンフォリエーション概念を導入する．

定義 3.2 ([15])．M^{2n+1} 上の 1-形式 α が，ある 2-形式 τ を捩れの基準とする $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式であるとは，$\alpha \wedge (d\alpha + \varepsilon\tau)^n > 0$ が任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ について成り立つことを言う．

例 3.3. 接触形式は捩れが無い ($\tau = 0$) ときの $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式である．また $\ker\alpha$ が葉層を定義するときの $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション

形式では，τ が各葉に非退化な 2-形式を定める．つまり $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式は概シンプレクティック葉層と接触形式の中間である．

注意. 上の定義では ε の評価を止めて α から τ を慎重に選ぶことを求めているように見えるが，実際には $\alpha \wedge d(e^f\alpha) = \alpha \wedge (e^f d\alpha)$ であるから τ と α に同じ正の関数を掛けても良く，もっと雑に述べても良い．つまり $d\alpha$ を $d\alpha + \varepsilon\tau$ のようにパラメタ $\varepsilon > 0$ 付きで補正して超平面場上非退化にして，$\varepsilon \to 0$ の「古典極限？」における退化だけを許せばよいのである．

実は従来 $\alpha \wedge (d\alpha + \tau)^n > 0$ とする概念があり，捻れ接触構造と呼ばれた (Nunes da Costa-Petalidou [16])．それでは概接触構造と本質的に変わらないので, 捩れ τ のところを無限に小さくしてみると少なくとも $\alpha \wedge (d\alpha)^n \geq 0$ (AW-コンフォリエーション) となった．この経緯で定義した $\varepsilon\tau$-コンフォリエーションであるが，名称は ET-コンフォリエーションとの類似を示唆したものである (§4)．ET-コンフォリエーションには結果が無いが，$\varepsilon\tau$-コンフォリエーションには以下の結果があることが重要である．

命題 3.4 ([15])**.** $2n+1$ 次元閉多様体 M^{2n+1} 上に接触形式 α，非特異閉 1-形式 ν，2-形式 τ があって $\{(1-t)\nu + t\alpha\}_{t\in[0,1]}$ が $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式の族であるとする．すると $n > 0$ のとき $\nu \wedge (d\alpha)^n = 0$ と $\nu \wedge \tau^n > 0$ が成り立つ．また $(1-t)\nu + t\alpha$ は $t = 0$ で S^1 上の曲面束の *Riemann* 葉層として良く知られた葉層を定義するが，$t > 0$ では接触形式になる．

証明. $n > 0$ であることから，$(2n+1)$-形式 $\nu \wedge (d\alpha)^n$ は $\alpha \wedge \nu \wedge (d\alpha)^{n-1}$ の外微分であり，閉多様体上での積分は 0 となる．ところが仮定

$$\{(1-t)\nu + t\alpha\} \wedge (td\alpha + \varepsilon\tau)^n > 0 \quad (0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1)$$

で $\varepsilon \to 0$ とすれば $\{(1-t)\nu + t\alpha\} \wedge (d\alpha)^n \geq 0$ となるから $\nu \wedge (d\alpha)^n \geq 0$ であり, 積分が消えることから恒等的に $\nu \wedge (d\alpha)^n = 0$．仮定で $t = 0$ とすると $\nu \wedge \tau^n > 0$．$t > 0$ のとき $\{(1-t)\nu + t\alpha\} \wedge (td\alpha)^n = t^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$． □

定理 3.5 ([15])．$2n+1$ 次元閉多様体 M^{2n+1} 上に接触形式 α があり，Σ_0 をページとするオープンブック分解に適合しているとする．綴じ $N^{2n-1}=\partial\Sigma$ に非特異 1-形式 ν と 2-形式 τ_N があって，$\eta_1 = \alpha|_{N^{2n-1}}$ としたとき，$\{\eta_t := (1-t)\nu + t\eta_1\}_{t\in[0,1]}$ が N^{2n-1} 上の $\varepsilon\tau_N$-コンフォリエーション形式の族であるとする．するとこの族は，M^{2n+1} 上のある 2-形式 τ を捩れの基準とする $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式の族 $\{\alpha_t\}$ に拡張し，$\alpha_1=\alpha$ で，$\{\alpha_t\}_{t\in(0,1]}$ は上のオープンブックに適合する接触形式の族であり，$\ker\alpha_0$ は回転可能葉層 $\mathcal{F}$ を定義する．更にもし τ_N が閉形式で，ページ Σ_0 上の閉 2-形式に拡張するならば，上の τ を $(d\alpha_0+\varepsilon\tau)|_{T\mathcal{F}} = \varepsilon\tau|_{T\mathcal{F}}$ が各葉のシンプレクティック形式であるように取ることができる．

S^5 や $S^4\times S^1$ 上にはこの定理から標準的な接触構造を出発点として構成されるシンプレクティック葉層がトポロジカルに無限個ある．これらは基本的に三松 [12] の例をコンフォリエーションとして解釈したものである．

4　$\varepsilon\tau = \mathrm{ET}$?

ET-コンフォリエーションを定義する 1-形式 α が，ある 2-形式 τ を捩れの基準とする $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式であることは，偶数次元多様体において与えられた概複素構造を各点で穏やかにする概シンプレクティック形式が存在することと同様，簡単に証明できることである．本節では $n=2$ のとき逆が成り立つことの証明の概略を述べ，$n>2$ では逆が成り立つとしても証明が難しくなることを見る．我々は $\varepsilon\tau$-コンフォリエーションについての結果を得たとはいえ，具体的な例があるのは $n=2$ の場合であり，$n>2$ の場合まで含めた結果が ET-コンフォリエーションについての結果であるとしても，確かめる手立てがない．今後も $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式を定義として研究を進め，具体的な結果が得られた場合に ET-コンフォリエーションについても成り立つかを問うことになるだろう．

定理 4.1. M^5 上の $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式 α は ET-コンフォリエーションを定義する．すなわち $\ker\alpha$ 上に（概）複素構造 J があって，$\alpha(v, Jv) \geq 0$ が任意の $v \in \ker\alpha$ について成り立つ．

この定理は次の命題と本質的に同等である．

命題 4.2. ω と τ を 4 次元多様体 W^4 上の 2-形式とする．任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ 対して $\omega + \varepsilon\tau$ が非退化であるとき，W 上に概複素構造 J が存在して，$\omega(v, Jv) \geq 0$ と $(\omega + \tau)(v, Jv) \geq 0$ が任意の $v \in TW^4$ について成り立つ．

少し用語と技法を準備してからこの命題の証明を述べる．

4.1 弱穏やかな概複素構造

Ω を W^{2n} 上の概シンプレクティック構造とするとき，$\Omega(v, Jv) > 0$ $(\forall v)$ を満たす概複素構造 J は穏やかである (tamed) と言うのであった．条件を緩めて $\Omega(v, Jv) \geq 0$ $(\forall v)$ としたとき弱穏やかであると言うことにしよう．各点 p では T_pW^{2n} に適当な基底を取って $\Omega_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ と表すことにする．ここで 0, 1 は n 次正方の零行列，単位行列である．

補題 4.3. W^{2n} 上の概シンプレクティック構造 Ω を固定したとき，それに関して弱穏やかな概複素構造全体は可縮である．

証明. W^{2n} 上の弱穏やかな概複素構造を，各点 p で弱穏やかな T_pW^{2n} の複素構造全体をファイバーとする局所自明なファイブレーションのセクションと考えて，ファイバーが可縮であることを示す．T_pW^{2n} に任意の穏やかな複素構造 J_0 を取り，適当な基底を取って $\Omega_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ と表し，空間 $\mathcal{J} = \left\{ J : \mathbb{R}^{2n}\text{の概複素構造} \;\middle|\; J + J_0\text{は正則} \right\}$ を定義域とする写像 $\Phi : J \mapsto I - (J + J_0)^{-1}(J - J_0)$ を考える．ここで I は $2n$ 次の単位

行列である．容易に確かめられるように Φ は

$$\Phi(\mathcal{J}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1-Q & P \\ P & 1+Q \end{bmatrix} \;\middle|\; P, Q \text{ は } n \text{ 次正方行列} \right\} \cap GL(2n, \mathbb{R})$$

への微分同相写像である．J を T_pW^{2n} 上の弱穏やかな複素構造とすると $\Omega_p J_0 \geq 0$ より $\Omega_p(J + J_0) > 0$ だから $J \in \mathcal{J}$ である．そこで弱穏やかな概複素構造全体の像を $\mathcal{T} \subset \Phi(\mathcal{J})$ とすれば $T = \begin{bmatrix} 1-Q & P \\ P & 1+Q \end{bmatrix} \in \mathcal{T}$ のとき $\Phi^{-1}(T) = TJ_0T^{-1}$ が弱穏やかなので $\Omega_p TJ_0T^{-1} \geq 0$ であり，従って $T^{\intercal}\Omega_p TJ_0 \geq 0$ である．この条件を満たす T をもう一つ取って T_1 と書き，$T_t = (1-t)T + T'$ とおく．$(T'-T)J_0 = -J_0(T'-T)$ であることに注意すると $T_t^{\intercal}\Omega_p T_t J_0$ の t^2 の係数は非正であることが分かるので，$T_t^{\intercal}\Omega_p T_t J_0 \geq 0$ $(\forall t \in [0,1])$ である．従って $\mathcal{T}(\ni J_0)$ は凸であるから可縮である． □

4.2 命題の証明

補題 4.4. 各点 $p \in W^4$ ごとに $\omega_p + \tau_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ と表す T_pW^4 の基底が存在して，ω_p を次のどれか 1 つの仕方で表すことができる．

(1) ある $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ を用いて $\omega_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) ある $\lambda \geq 0$, 任意の $c > 0$ を用いて $\omega_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda & 2c \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2c & -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) ある $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ を用いて $\omega_p=\begin{bmatrix}0&0&a&b\\0&0&-b&a\\-a&b&0&0\\-b&-a&0&0\end{bmatrix}$.

証明. 基本的には Massot-Niederkruger-Wendle [9] に書かれている. $\omega+\tau$ は非退化だから写像 $B: T_pW^4\to T_pW^4$ を $(\omega_p+\tau_p)(Bv,\cdot)=\omega_p(v,\cdot)$ $(\forall v)$ で定めることができる. B の固有値が実 4 重解 λ であって B がスカラー変換でない場合について考えれば, 残りは容易である. このとき $(\omega_p+\tau_p)(B\cdot,\cdot)=(\omega_p+\tau_p)(\cdot,B\cdot)$ に注意して次のように T_pW^4 の基底 $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ を定める. 先ず $(B-\lambda)v_1\neq 0$ となる v_1 を取る. 次に $(\omega_p+\tau_p)((B-\lambda)v_1,w_2)\neq 0$ となる w_2 を取る. これらから $c>0$ を任意として $2cv_2=(B-\lambda)v_1$, $2cw_1=(B-\lambda)w_2$ とすれば (2) の行列を得る.

B の固有値が異なる 2 つの実数であるときは v_1, w_1 が固有値 λ_1 の固有ベクトルで $(\omega_p+\tau_p)(v_1,w_1)\neq 0$ を満たすといった具合にして (1) の行列を得る. B がスカラー変換のときは $\lambda_1=\lambda_2$ である. 固有値が正または 0 であることは ε を小さくしたときに $\omega+\varepsilon\tau$ が非退化であり続けることから分かる. (3) は固有値が虚数になる場合である (説明は演習問題). □

補題 4.5. 上の (2) で $\lambda=0$ のとき, 条件 $\omega_pJ\geq 0$ かつ $(\omega_p+\tau_p)J\geq 0$ を満たす複素構造 J 全体は可縮である. 更に W^4 上の (2) の点全体 $X\subset W^4$ の閉包 $\overline{X}$ 上に概複素構造 J が存在して, 各点 $p\in\overline{X}$ で上の条件を満たす.

以下この補題を証明する. 残りの部分に同様の条件を満たすように拡張することは [9] と同様にすればできるので, 本節の定理と命題の証明はこれで完成となる. 次節 §5 では [9] の結果と我々が今後何をしたいかを述べる.

注意. $n>2$ の場合に同様のことを証明しようとすると, 線形代数 (補題の前半部分) が複雑になるだけでなく, (2) の「Jordan 細胞」が多種になり, 分岐のところでセクションの構成 (補題の後半部分) が無茶苦茶になる.

証明. §4.1 の書き方で

$$\Phi(J) = T = \begin{bmatrix} 1+P & Q \\ Q & 1-P \end{bmatrix}, \quad \Omega_p = \omega_p + \tau_p$$

として，条件は $\Omega_p J \geq 0$ かつ $\omega_p J \geq 0$，つまり $T^\intercal \Omega_p T J_0 \geq 0$ かつ $T^\intercal \omega_p T J_0 \geq 0$．$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$，$\overline{c} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ を用いて書けば

$$\begin{bmatrix} 1-Q^\intercal & P^\intercal \\ P^\intercal & 1+Q^\intercal \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-Q & P \\ P & 1+Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

かつ

$$\begin{bmatrix} 1-Q^\intercal & P^\intercal \\ P^\intercal & 1+Q^\intercal \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda + 2\overline{c} \\ -\lambda - 2\underline{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-Q & P \\ P & 1+Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

であり，$\lambda = 0$ のときの解が $\lambda > 0$ のときの解を含んでいることが分かる．よって $\lambda = 0$ のとき解空間が可縮であることを示せば良い．対称に書くと両方 $\begin{bmatrix} V & -W \\ W & V \end{bmatrix} \geq 0$ $(V^\intercal = V, W^\intercal = -W)$ の形になり，線形代数により

$$V \geq 0, \quad VV^\dagger W = W, \quad \text{かつ} \quad V + WV^\dagger W \geq 0$$

と変形される．ただし $V^\dagger$ は直交行列で対角化したときの 0 でない固有値を全て逆数に変えて得られる「一般化された逆行列」であり，$VV^\dagger (= V^\dagger V)$ は $\{0, 1\}$ の要素を対角成分とする対角行列になる．さて上の条件の前半では

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V & = & 1 - P^\intercal P - Q^\intercal Q \\ W & = & P^\intercal Q - Q^\intercal P \end{array} \right.$$

とすればよく，後半では

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V & = & \overline{c} + \underline{c} + (\overline{c} - \underline{c})Q - Q^\intercal(\overline{c} - \underline{c}) - P^\intercal(\overline{c} + \underline{c})P - Q^\intercal(\overline{c} + \underline{c})Q \\ W & = & P^\intercal(\overline{c} - \underline{c}) + (\overline{c} - \underline{c})P + P^\intercal(\overline{c} + \underline{c})Q - Q^\intercal(\overline{c} + \underline{c})P \end{array} \right.$$

とすればよいので，P, Q の成分について計算すると次が得られる．

$$P = \begin{bmatrix} -1 - \dfrac{x(z^2+w^2)}{x^2+y^2} & -w \\ \dfrac{(x^2-y^2)w - 2xyz}{x^2+y^2} & x+1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -\dfrac{y(z^2+w^2)}{x^2+y^2} & z \\ \dfrac{(x^2-y^2)z + 2xyw}{x^2+y^2} & y \end{bmatrix}$$

ここで x, y, z, w は実数の媒介変数で，

$$xw - yz > 0, \quad x \neq 0, \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1$$

を満たす．$Y = y/x$, $Z = z/x$, $W = w/x$ とすれば，

$$W > YZ, \quad Y^2 + Z^2 + W^2 \leq \frac{2-x}{x}, \quad 0 < x < 2$$

となり，YZW 空間の曲面 $W = YZ$ は原点を中心とする球面と横断的であることから，上の条件が定める $xyzw$ 空間の図形は可縮である． $\square$

5　充填とタイト性

$\varepsilon\tau$-コンフォリエーションは弱シンプレクティック充填と関係がある．

定義 5.1 ([9])**.** 境界に接触構造 $\ker\alpha$ を持つコンパクトシンプレクティック多様体 (W^{2n+2}, Ω) は，シンプレクティック形式 Ω に対して穏やかな概複素構造 J が存在して，J が $\ker\alpha$ を保ち，強い不等式 $d\alpha(v, Jv) > 0$ $(\forall v \in \ker\alpha \setminus \{0\})$ が成り立つとき，弱シンプレクティック充填と呼ばれる．

更に $d\alpha = \omega|_{\partial W^{2n+2}}$ という条件をつけたものが強シンプレクティック充填である．高次元においても弱シンプレクティック充填の境界の接触構造はタイトである．弱シンプレクティック充填の定義は次の命題によって置き換えることもできる．実際 [9] における定義は下の形である．

命題 5.2 ([9])**.** 境界の接触構造を $\ker\alpha$ とするコンパクトシンプレクティック多様体 (W^{2n+2}, Ω) が弱シンプレクティック充填となる必要十分条件は，境界上で $\alpha \wedge (td\alpha + \Omega|_{\partial W^{2n+2}})^n > 0$ $(\forall t \geq 0)$ となることである．

この定義における境界の $\ker\alpha$ について，それが接触構造であるという条件を外せば，$\tau = \Omega|_{\partial W^{2n+2}} - d\alpha$ として，α は $\varepsilon\tau$-コンフォリエーションである．ただし $\varepsilon = \dfrac{1}{1+t}$ である．このことから次のように弱シンプレクティックフィリングの概念を一般化したものを考えるのは自然である．

定義 5.3. 境界に非特異 1-形式 α が定める超平面場 $\ker\alpha$ を持つコンパクト多様体 W^{2n+2} が閉 2-形式 ω と 2-形式 $\widetilde{\tau}$ を持ち，$\tau = \widetilde{\tau}|_{\partial W^{2n+2}}$ として α は境界 ∂W^{2n+1} 上の $\varepsilon\tau$-コンフォリエーションであり，更に W^{2n+2} 上では $(\omega + \varepsilon\widetilde{\tau})^{n+1} > 0$ $(\forall\varepsilon \in (0, 1])$ が成り立つとする．このとき境界のコンフォリエーションは適切に充填可能であると言う．

上の意味で適切に充填可能な接触構造はタイトなのではないか，ひょっとして逆も，などと妄想は広がるが，先ずは実際に弱シンプレクティック充填可能な場合との違いがあるのかが問題である．

参考文献

[1] Altschuler, S. and Wu, L. “On deforming confoliations.” *J. Differential Geom.* 54 (2000): 75–97.

[2] Asaoka, M. “Regular projectively Anosov flows on three-dimensional manifolds.” *Ann. Inst. Fourier* 60 (2010): 1649–1684.

[3] Bowden, J. “Contact perturbations of Reebless foliations are universally tight.” *J. Differential Geom.* 104 (2016): 219–237.

[4] Bowden, J. “Approximating C^0-foliations by contact structures.” *Geom. Funct. Anal.* 26 (2016): 1255–1296.

[5] Eliashberg, Y. “Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work.” *Ann. Inst. Fourier* 42 (1991): 165–192.

[6] Eliashberg, Y. and Thurston, W. “Confoliations.” A. M. S. University

Lecture Series 13, 1998.

[7] Giroux, E. "Géometrie de contact de la dimension trois vers les dimensions supérieures." Proceedings I. C. M. Beijing 2002 (2): 405–414.

[8] Martínez Torres, D. "Codimension-one foliations calibrated by nondegenerate closed 2-forms." *Pacific J. Math.* 261 (2013): 165–217.

[9] Massot, P., Niederkrüger, K., and Wendl, C. "Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds." *Invent. Math.* 192 (2013): 287–373.

[10] Meigniez, G. "Regularization and minimization of codimension-one Haefliger structures." *J. Differential Geom.* 107 (2017): 157–202.

[11] Mitsumatsu, Y. "Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds." *Ann. Inst. Fourier* 45 (1995): 1407–1421.

[12] Mitsumatsu, Y. "Leafwise symplectic structures on Lawson's foliation." Preprint (2011): arXiv:1101.2319.

[13] Mitsumatsu, Y. and Mori, A. "On Bennequin' s isotopy lemma." Foliations 2005 (ed. Walczak, P.), World Scientific, Singapore 2006: 365–371.

[14] Mori, A. "A note on Thurston-Winkelnkemper's construction of contact forms on 3-manifolds." *Osaka J. Math.* 39 (2002): 1–11.

[15] Mori, A. "A note on Mitsumatsu's construction of a leafwise symplectic foliation." *Int. Math. Res. Notices* (2018) doi:10.1093/imrn/rnx321.

[16] Nunes da Costa, J. M. and Petalidou, F. "Twisted Jacobi manifolds, twisted Dirac-Jaobi structures and quasi-Jaobi bialgebroids." *J. Phys. A* 39 (2006): 10449–10475.

[17] Thurston, W. "Norm on the homology of 3-manifolds." Memoirs of the AMS 339, 1986: 99–130.

[18] Vogel, T. "On the uniqueness of the contact structure approximating a foliation." *Geom. Topol.* 20 (2016): 2439–2573.

mori-a@cc.osaka-dent.ac.jp