Local criteria for non embeddability of Levi-flat manifolds

小川 竜 (東海大学)*

概　要

研究集会「Topology of pseudoconvex domains and analysis of reproducing kernels」における講演「Local criteria for non embeddability of Levi-flat manifolds」の内容と関連する話題について概説する. 本講演の主たる内容は小池貴之氏 (大阪市立大学) との共同研究 [KO1] に基づく.

1. 問題と背景

複素多様体 (X, J_X) 内の滑らかな有向実超曲面 M が X の複素超曲面の族 $\mathcal{F}$ で分割されるとき、M を Levi 平坦超曲面、$\mathcal{F}$ を Levi 葉層という. また Levi 平坦超曲面の抽象的なモデルとして、奇数次元の滑らかな有向多様体 M と実余次元 1 の複素多様体族による分割 $\mathcal{F}$ の組 $(M, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ を Levi 平坦 (CR) 多様体と呼ぶ. 局所座標の言葉を使えば、$\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ の開集合による座標近傍系であって、座標変換が

$$(z_j, t_j) = (z_j(z_k, t_k), t_j(t_k)) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

となるもので定義される. ここで z_k について正則、t_k について C^∞ とする. $\{t_j = (\text{一定})\}$ が貼り合って、M のはめ込まれた部分多様体 (葉)L を構成する. 葉は複素多様体となり、その複素構造は葉の横断方向に C^∞ 級に変化する. ここではそれを葉向複素構造と呼び、$J_{\mathcal{F}}$ で表す. Levi 平坦多様体の典型例は、主にファイブレーションや群作用の商空間によって与えられる. 単純な例として、L を複素多様体とし $f \in \mathrm{Aut}(L)$ に対して、$M = L \times \mathbb{R}/(z, t) \sim (f(z), t+1)$ は $L \times \{t\}$ を葉とする Levi 平坦多様体となる.

Levi 平坦多様体に関する以下の一般的な問題を、葉層のトポロジーとの関係から調べたい. 本稿では問題 B について、Barrett によるアプローチとその後の研究および問題について述べることにする.

問題 1.1.

A. 余次元 *1* 葉層多様体 $(M, \mathcal{F})$ がいつ葉向複素構造 $J_{\mathcal{F}}$ を許容するか*?*

B. *Levi*平坦多様体 $(M, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ がいつ複素多様体 (X, J_X) に埋め込めるか [1]*?*

C. 指定したクラスの複素多様体に埋め込めるか*? (Kähler? projective?....)*
埋め込めたとき、どのような近傍系を持つか*? (*強擬凹近傍系*?* 擬平坦近傍系*?...)*

C^ω 級の Levi 平坦多様体の場合、常に複素近傍 $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ を持ち、Levi 葉層 $\mathcal{F}$ はその上の正則葉層として拡張することに注意する. 従って、問題 B については C^∞ 級の Levi 平坦多様体が研究対象となる. Barrett は S^3 の C^∞ 級 Reeb 葉層は複素近傍を持たないことを証明した [B]. これについて次節以降で説明する.

---

* e-mail: nogawa@tsc.u-tokai.ac.jp

[1] 本稿では埋め込みと書いたら、葉に沿って正則となる滑らかな埋め込みを表す. また基本的に実余次元 1 の埋め込みについて扱うが、一般の余次元についても同様の問題を考えることができる.

問題Cについては、これまで関数論を中心とした多方面からの研究がある．目的意識としては次の二つの問題があげられる．一つは正則葉層構造論における例外的極小集合予想、もう一つは関数論におけるLevi問題との関連である．例外的極小集合予想とは、$\mathbb{C}P^2$ 内の正則葉層 $\mathcal{F}$ に対して全ての葉は特異集合 Sing$\mathcal{F}$ に漸近する、という予想である [CLS],[BLM],[C]．この研究の流れから「$\mathbb{C}P^2$ 内には滑らかなコンパクトLevi平坦面は存在しない」と期待されているが未解決である．$\mathbb{C}P^n$ $(n \geqq 3)$ において同種の予想は肯定的に解決されている．この周辺の研究については [LN],[Si],[Br],[Oh3],[De],[AB] などを参照してほしい．一方、Levi問題とは「擬凸領域ならば正則領域であるか」という問題である．$\mathbb{C}^n$ 内の領域などで岡潔らの研究によって肯定的に解決、Grauert らにより一般化された．しかし一般の複素多様体内の領域では Grauert による反例があり、そこにLevi平坦面が現れた．その後、特に内部では強擬凸性があるが境界では退化している領域 (例えばLevi平坦境界を持つ Stein 領域など) が調べられた．擬凸領域における ある種の特異な現象を調べる過程でLevi平坦面が興味を持たれてきたようである．この方面の研究については [Oh1],[Oh2] を参照してほしい．

問題AはいわゆるCR多様体としての実現問題であるが、葉層構造の立場からの研究はあまり進んでいないと思われる．葉向概複素構造を持つかどうかは比較的容易に分かるが、それがいつ可積分となるかは難しい問題である．3次元葉層閉多様体のときは可積分な葉向概複素構造 $J_{\mathcal{F}}$ を許容する．高次元については [MV] などを参照.

本稿は研究集会「Topology of pseudoconvex domains and analysis of reproducing kernels」における講演内容と関連する話題について概説する．より詳しい内容については参考文献を見てほしい．最後に集会を主催され、講演の機会を頂いた足立真訓氏と大沢健夫氏に感謝申し上げます.

2. Reeb葉層の非埋込定理

基本的な定義等は [CC], [KO1] などを参照してほしい．ここでは、余次元1葉層構造論において重要な役割を果たすReeb成分についてのみ紹介する.

例 2.1 (標準的Reeb成分)**.** 半空間から原点を抜いたもの

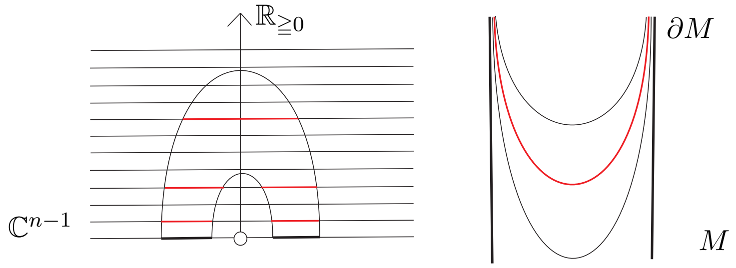
$$\widetilde{M} = \mathbb{C}^{n-1} \times [0,\infty) \backslash \{(\mathbf{0},0)\}$$

の商空間 $M = \widetilde{M}/(z,t) \sim (\lambda z, f(t)) \approx D^{2n-2} \times S^1$ を考える．ここで $\lambda \in \mathbb{C}^*$ は $|\lambda| > 1$ とし、$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は拡大微分同相、つまり $f(t) > t$ $(t \neq 0)$．M には $\widetilde{M}$ の水平葉層から誘導される複素葉層 $\mathcal{F}_{Reeb}$ が定まり *Levi*平坦多様体となる．葉層 $(M, \mathcal{F}_{Reeb})$ は *Reeb*成分と呼ばれる．構成よりコンパクト葉 ∂M は *Hopf*多様体であり、その他は全て $\mathbb{C}^{n-1}$ 葉となる．∂M に沿った $\mathcal{F}$ の *(*片側*)* ホロノミー群 $\mathcal{H}_+(\partial M)$ は f^{-1} で生成される．特に $n = 2$ で $\lambda = \exp(2\pi)$ の場合は $\partial M \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1})$．$M$ のコピーを ∂M に沿って写像 $z \mapsto \sqrt{-1}z$ で貼り合わせれば、S^3 上の *Reeb* 葉層 $(S^3, \mathcal{G}, J_{\mathcal{G}})$ を得る.

*Levi*平坦多様体の各葉に横断的な閉曲線に沿った改変操作により、いつでも *Reeb*成分を含む *Levi* 葉層を手に入れることができる *[HM]*．また、*3*次元 *Reeb*成分については、次の一意化定理が知られている.

命題 2.2 (Meersseman-Verjovsky '09 [MV])**.** *3*次元 *Reeb*成分が境界 ∂M で *tame* [2] であれば、標準的 *Reeb*成分に *CR* 同型.

[2] 境界 ∂M を通して (複素構造まで込めて自明な) 直積葉層に C^∞ 級 Levi 葉層として拡張する.



Reeb成分に対して埋め込み問題を考えてみよう．すぐに分かることとしてReeb成分はKähler多様体には埋め込めない．一方で、あるHopf多様体(non-Kähler)にはReeb成分が埋め込める[Ne]．例えば$f(t)=\mu t, \mu \in \mathbb{R}, \mu > 1$とすればよい．葉$\partial M$に沿ったホロノミーの微係数は$f'(0)=\mu$である．ではホロノミーが$C^r$-flatの場合は埋め込めるであろうか? ここで$C^r$-flatとは$f(t)=t+O(t^{r+1})$ $(r=1,2,\dots,\infty)$のときをいう．

問題 2.3. *C^r-flatな Reeb成分$(M, \mathcal{F}_{Reeb}, J_{\mathcal{F}})$は複素多様体に埋め込めるか?*

Barrettによる以下の定理は、この問題の部分的な解答を与えている．

定理 2.4 (Barrett '90 [B])**.** *3次元C^∞-flat Reeb成分は複素曲面に埋め込めない．特にS^3上のC^∞級Reeb葉層を複素曲面内のLevi平坦超曲面として実現することはできない．*

より正確に述べると、3次元C^∞-flat Reeb成分の境界葉近傍が埋め込めないことを示している．初めに注意したようにC^ω級のLevi平坦多様体であれば常に複素近傍を持つのだが、この定理からC^∞級では一般に成り立たないことが分かる．一方で、S^3の実余次元1の葉層構造はC^ω級にはなれないことに注意しておく([Ha], cf.[No])．Barrett-稲葉は、複素曲面内の3次元C^∞級Levi平坦超曲面には位相的な制約があることを示した．

定理 2.5 (Barrett-Inaba'92 [BI])**.** *複素曲面内のコンパクト有向3次元C^∞級Levi平坦面$(M, \mathcal{F})$に対して次が成り立つ．*
(1) $|\pi_1(M)|=\infty$ かつ
(2) $\pi_2(M)=0$ または $M \approx S^2 \times S^1$

定理 2.4の証明は背理法である．埋め込めたと仮定して、埋め込まれた楕円曲線の複素近傍と近くの葉の振る舞いを調べることで矛盾を導く．鍵となるのが上田による曲線の近傍理論である．これについて次節で説明しよう．

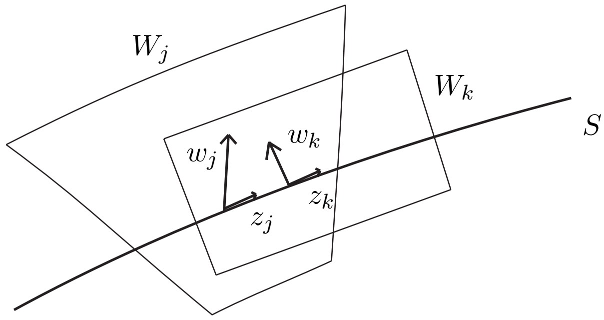
3. 上田の近傍理論とBarrettの結果

簡単のためXを複素曲面、Sをコンパクト複素曲線とする．Xの複素解析的情報は、Sとその近傍に集約されることがある．一般にSの管状近傍の解析的性質は単純ではない．例えば法束$N_{S/X}$の零切断近傍とSの管状近傍は双正則とは限らない．

自己交点数$[S]^2$で場合分けして考える．$[S]^2<0$の場合は強擬凸近傍系が存在する(またそのときに限る)([Gr], cf.[Su])．$[S]^2>0$のとき、強擬凹近傍系が存在し、特に非定数正則関数は存在しない([Su])．$[S]^2=0$のとき、Sは“おおよそ”強擬凹または擬平坦近傍系を持つ([U], cf.[Su])．上田により、多重劣調和関数の増大度制限などの詳しい研究がなされた．

3.1. 上田の障害類と Jet Extension Property

以下XをSの十分小さな近傍とし$[S]^2=0$を仮定する．Xの局所座標系$\{(W_j;(z_j,w_j))\}$としてw_jは$V_j=W_j\cap S$の定義関数であり、$\{(V_j;z_j|_S)\}$はSの局所座標系を定めるものを取る．



$W_{jk}=W_j\cap W_k$上の変換関数が$g_{jk}(z_k,w_k)=w_j/w_k$により与えられるX上の線束$\mathcal{O}_X(S)$を考える．$\mathcal{O}_X(S)|_S\cong N_{S/X}$に注意する．必要なら$\mathcal{O}_S^*$倍して$g_{jk}(z_k,0)=t_{jk}(z_k)$としてよい．ここで$\{t_{jk}\}$は法束$N_{S/X}$の変換関数を表す．$S$のコンパクトKähler性から、条件$[S]^2=0$と法束$N_{S/X}$がU(1)-平坦となることは同値である[U]．つまり$\{t_{jk}\}$はU(1)値定数関数として取ることができる．このとき次の問題を考える．

問題 3.1. 線束$\mathcal{O}_X(S)$上に$U(1)$-平坦構造は拡張するか？即ちSの定義関数系$\{(W_j;w_j)\}$であって

$$t_{jk}w_k=w_j \tag{1}$$

を満たすものが作れるか[3]？

w_kのw_jによる展開を考えれば、一般に高次の項を含む．この問いはSの定義関数系に対する"線型化可能性問題"と捉えることができる．$w_k=w_k(z_j,w_j)$のw_jによる展開を以下で表す．

$$t_{jk}w_k=w_j+\sum_{\ell=2}^{\infty}f_{jk}^{(\ell)}(z_j)\cdot w_j^{\ell}.$$

定義 3.2. 組(S,X)の定義関数系$\{(W_j,w_j)\}$が *type n* とは、$\forall j,k$に対して、

$$t_{jk}w_k=w_j+f_{jk}^{(n+1)}(z_j)\cdot w_j^{n+1}+O(w_j^{n+2})$$

となるとき、即ち、$t_{jk}w_k$とw_jが*n-jet*で貼り合うときをいう．

type n の定義関数系$\{(W_j,w_j)\}$が存在するとき、簡単な計算から$\{(V_{jk},f_{jk}^{(n+1)})\}$は$N_{S/X}^{-n}$値の1-コサイクルを定めることが分かる．コホモロジー類

$$u_n(S,X;\{w_j\}):=[\{(V_{jk},f_{jk}^{(n+1)})\}]\in H^1(S;N_{S/X}^{-n})$$

を組(S,X)のn次上田類と呼ぶ．これはtype $(n+1)$ の定義関数系が存在するための障害類となっている．コホモロジー類$u_n(S,X;\{w_j\})$が消えるとき、δ-方程式の解を使って$\{w_j\}$を補正することで、新たにtype $(n+1)$ の定義関数系を得る．

[3] t_{jk}はW_{jk}上に定数関数として拡張させて考える．

命題 3.3 ([U]). $u_n(S,X;\{w_j\})=0$ となる *type n* の定義関数系 $\{w_j\}$ が存在するならば、*type* $(n+1)$ の定義関数系 $\{\widetilde{w}_j\}$ が存在する.

S のコンパクト性から、上田類の消滅は定義関数系の取り方に寄らないことが分かる. そこで組 (S,X) を上田類によって以下のように分類する.

定義 3.4. *(1)* 組 (S,X) が有限型とは、ある $n\in\mathbb{N}$ が存在して以下が成り立つ: 任意の $m\le n$ に対し、*type m* の定義関数系 $\{w_j\}$ が存在して、$m<n$ のとき $u_m(\{w_j\})=0$ かつ $u_n(\{w_j\})\neq 0$ を満たす.
(2) 組 (S,X) が無限型とは、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、*type n* の定義関数系 $\{w_j\}$ が存在して $u_n(\{w_j\})=0$ を満たす.

障害類が全て消えていても線型化された定義関数系 (1) が得られるとは限らない. 次の定理はそれが存在するための十分条件を与えている.

定理 3.5 (Ueda '83 [U]). 複素曲面 X 内のコンパクト複素曲線 S であって $[S]^2=0$ とする. 組 (S,X) が無限型かつ、法束 $N_{S/X}$ が $Pic^0(S)$ においてトーションまたは *Diophantine* 条件を満たすならば、$t_{jk}w_k=w_j$ となる S の定義関数系 $\{(W_j,w_j)\}$ が存在する.

上田は有限型の場合を type (α)、無限型であり線型化された定義関数系 (1) が存在する場合を type (β)、そうでない場合を type (γ) と名付けた. また type (α) ならば強擬凹近傍系が存在し、S で発散する多重劣調和関数の増大度に制限がかかることを示した. type (β) の場合は、定義より擬平坦近傍系が存在する. つまり、その近傍上に S をコンパクト葉とする U(1) ホロノミーを持つ正則葉層を持つ. type (γ) は良く分かっていない. 具体例によりその存在が確認されている [U]. 複素力学系的に複雑な現象が起こっていると考えられる. 一方で S をコンパクト葉とする正則葉層が与えられた場合、S の type を決定できるかという問題は興味深い [KO2].

ここまでは S をコンパクト複素曲線としてきたが、我々は Barrett の定理の高次元化・局所化という目標から、これらの仮定を緩めたい. 組 (S,X) を余次元 1 のまま次元を上げても、S がコンパクト Kähler 部分多様体であれば同様の結果を得る. しかしコンパクト性を外すとなると議論の様々な部分で支障が出てくる. 特にこのままでは、上田類の消滅が定義関数系の取り方に依存しない、という条件が保証されず、線型化された定義関数系を構成する際に本質的な問題が生じる. そこで上田類の消滅 "$u_n=0$" の well-definedness に注目する. すなわちどのような条件があれば消滅が定義関数系の取り方に依らないのか. [KO] では well-definedness の十分条件について考察した.

定義 3.6 ([KO1]). $\mathcal{O}_X$ で X の構造層、$\mathcal{I}_S$ で S の定義イデアル層とする. 組 (S,X) が *Jet Extension Property (J.E.P.)* を満たすとは、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して制限写像

$$r_*: H^0(X;\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_S^{n+1})\to H^0(X;\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_S)\cong H^0(S;\mathcal{O}_S)$$

が全射となるときをいう.

これは S 上の任意の正則関数が、局所的に n-jet で貼り合う形で近傍上に拡張する、という条件である. S がコンパクトならば明らかに J.E.P. を満たす.

命題 3.7 (J.E.P. $\rightsquigarrow$ well-definedness). 組 (S,X) が *J.E.P.* を満たし法束 $N_{S/X}$ が解析的に自明ならば、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して上田類の消滅 $u_n=0$ は *well-defined.*

実は我々のLevi葉層の設定とJet Extension Propertyは次の意味で相性がよい.

命題 3.8 (C^r-flat holonomy $\rightsquigarrow$ J.E.P.)**.** *X上のLevi平坦超曲面$(M, \mathcal{F})$と埋め込まれた葉Sに対して以下の条件を仮定する.*

(a) Sに沿った$\mathcal{F}$のホロノミーはC^2-flat.

(b) 各葉に沿って正則なC^∞級レトラクション $p : M \to S$が存在する.

このとき、組(S, X)はJ.E.P.を満たす.

特に仮定より法束$N_{S/X}$は解析的に自明となる. 従って**命題 3.8**の仮定のもとで上田類の消滅$u_n = 0$はwell-definedとなる.

3.2. ホロノミーのC^r-flatnessと上田類の消滅

複素多様体X内に埋め込まれたLevi平坦超曲面$(M, \mathcal{F})$とその葉Lを一つ固定し、LはXに埋め込まれていると仮定する[4]. BarrettはLに沿ったホロノミーのC^r-flatnessからLの上田類の消滅を示した. これまで上田類の消滅については、H^1自体が消えているか、もしくは最初から綺麗な定義関数系が手に入っている自明な状況でしか示せていなかったと思われる. その点でBarrettの仕事は重要である.

正確にはC^r-flatnessから次のデータを得る. LのXにおける定義関数系$\{(W_j, w_j)\}$とLのMにおける(葉上定数となる)定義関数系$\{(\mathcal{U}_j, u_j)\}$であって、$\mathcal{U}_j = W_j \cap M$とする. さらに$\forall j, k$に対して以下の条件を満たすものが存在する.

(i) $w_k - w_j = O(w_j^{r+1})$ on W_{jk},

(ii) $u_k - u_j = O(u_j^{r+1})$ on $\mathcal{U}_{jk}$,

(iii) $(\mathrm{Im}\ w_j)|_{\mathcal{U}_j} = o(|w_j|^r)$ on $\mathcal{U}_j$

(iv) $(\mathrm{Re}\ w_j)|_{\mathcal{U}_j} = u_j + o(u_j^r)$ on $\mathcal{U}_j$.

条件(ii)はホロノミーのC^r-flatnessである. 条件(iii)はBarrett-Fornaess[BF]により示された. Lの局所定義関数をMに沿って、その虚部のjetを消すように帰納的に修正していくことで条件を満たすように出来る. (iv)は(iii)にCauchyの評価式とCauchy-Riemannの関係式を使う. (ii),(iii),(iv)を合わせて(i)を得る.

命題 3.9 ([B])**.** *複素多様体X内のLevi平坦超曲面$(M, \mathcal{F})$と埋め込まれた葉Lを取る[5]. Lに沿った$\mathcal{F}$のホロノミーがC^r-flatならば、XにおけるLの定義関数系$\{(W_j, w_j)\}$が存在して以下の条件を満たす.*

$$w_k = w_j + O(w_j^{r+1}) \ \textit{on}\ W_{jk} \quad \text{かつ} \quad d(\mathit{Re}\ w_j|_{\mathcal{U}_j}) \neq 0 \ \textit{on}\ \mathcal{U}_j.$$

特に法束$N_{L/X}$は解析的に自明($t_{jk} \equiv 1$)であり、$r \geqq 2$のとき、組(L, X)の$\{w_j\}$に関する$(r-1)$次上田類は消滅する. またLがコンパクトかつ$r = \infty$のとき、組(L, X)は無限型となる.

これを用いてBarrettは**定理 2.4**を示した. 本質的には次の定理を示している.

定理 3.10 ([B])**.** *3次元Levi平坦多様体$(M, \mathcal{F}, J_\mathcal{F})$に対して$\mathcal{F}$がトーラス葉$L$を持ち、$\mathcal{H}_+(L) \cong \mathbb{Z}\langle f \rangle$を満たすとする. ここで$f$は$L$に沿った$C^\infty$-flat縮小ホロノミーを表す. このとき$(M, \mathcal{F}, J_\mathcal{F})$は複素曲面$(X, J_X)$に埋め込めない.*

[4] 前節のSに相当する.

[5] コンパクト性は仮定しない.

(証明) $(M, \mathcal{F}; L)$ がある複素曲面 X に埋め込めたとする．L に沿ったホロノミーの C^∞-flatness より、**命題 3.9** のような定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が取れて組 (L, X) は無限型となる．**定理 3.5** より定義関数系は貼り合う．特に $d(\mathrm{Re}\, w|_M) \neq 0$ を満たす．ここで、得られた正則関数の実部を L に漸近する他の葉 L' へ制限する．条件から正調和関数としてよい．また L 境界に向かって値は 0 へ近づく．L' は位相的にアニュラスだが Riemann 面として幾つか可能性がある．例えば $L' \cong \mathbb{D}^*$ のとき、そのコンパクト化 $\mathbb{D}$ 上へ非負調和関数として拡張できるが、最小値原理から定数となり矛盾が起きる．他の場合も矛盾が起きる．□

4. 主結果と問題

この節では [KO1] で得られた非埋め込み型定理を紹介する．詳細は [KO1]、[O] を参照してほしい．これは Barrett の定理のある種の高次元化である．また葉に含まれる楕円曲線近傍に局所化した結果であり、葉自身にコンパクト性は仮定しない．ここでは 5 次元 Levi 平坦多様体に限って説明する．多少設定が複雑になるが、より高い次元でも同様の定理が成り立つ．

定理 4.1 (Koike-O '17 [KO1])**.**
5 次元 Levi 平坦多様体 $(M, \mathcal{F}, J_\mathcal{F})$ *が楕円曲線* C *を複素部分多様体として含む葉* L *を持つとしよう．さらに* C *の近傍* $\mathcal{U}$ *が存在して、以下を満たすと仮定する．*

(i) $\mathcal{H}_+(L \cap \mathcal{U}) \cong \mathbb{Z}\langle f \rangle$*．ここで* f *は* C *に沿った* C^∞*-flat な縮小ホロノミーを表す．*
(ii) 各葉上で正則被覆写像となる C^∞ *級レトラクション* $p\colon \mathcal{U} \to L \cap \mathcal{U}$ *が存在する．*
(iii) $C = f^{-1}(0)$ *なる正則関数* $f : L \cap \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *が存在する．*

このとき $(M, \mathcal{F}, J_\mathcal{F})$ *は複素 3 次元多様体* (X, J_X) *に埋め込めない．*

例えば $(M, \mathcal{F}, J_\mathcal{F})$ が、(3 次元 C^∞-flat Reeb 成分の境界葉近傍)$\times \mathbb{D}$ と CR 同型な部分集合を含めば、複素 3 次元多様体には埋め込めないことが分かる．

例 4.2. *(cf. [D])* **例 *2.1*** *で構成した* C^∞*-flat な 5 次元 Reeb 成分* $(M, \mathcal{F}_{Reeb}, J_\mathcal{F})$ *を考える．境界葉* ∂M *は Hopf 曲面であり、その中に楕円曲線*

$$C = (\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\}) \backslash \{(\mathbf{0}, 0)\} / z_1 \sim \lambda z_1.$$

を含む．これは定理より複素 3 次元多様体 (X, J_X) *に埋め込めない．*

系 4.3. *次を満たす 5 次元 Levi 平坦多様体* $(M, \mathcal{F}_i, J_{\mathcal{F}_i})$ *(*$i = 1, 2$*) が存在する．*
(i) $(M, \mathcal{F}_1, J_{\mathcal{F}_1})$ *は複素 3 次元多様体* (X, J_X) *に埋め込めない．*
(ii) $(M, \mathcal{F}_2, J_{\mathcal{F}_2})$ *は* $\mathbb{C}^3$ *へ埋め込める．*

可微分多様体としては $M = (T^2 \times \mathbb{R}^2) \times_\rho [0, \infty)$ で与えられる．ここで $\times_\rho$ は表現

$$\rho\colon \pi_1(T^2 \times \mathbb{R}^2, *) \cong \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Diff}([0, \infty)) \ ; \ \rho(\alpha) = \mathrm{id}, \ \rho(\beta) = f$$

による懸垂を表す．f は原点で C^∞-flat となる拡大微分同相．$L = T^2 \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ が一つの葉で、$C = T^2 \times \{\mathbf{0}\} \times \{0\}$ が部分集合として含まれている．(i) の Levi 葉層は $L =$ (楕円曲線) $\times \mathbb{D}$ に上の懸垂をすることで得られる．これは定理より埋め込めないことが分かる．一方で、(ii) の Levi 葉層は $L = \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$ に対して上の構成をする．埋め込み方は、Barrett-稲葉による $\mathbb{C}^2$ への Levi 平坦埋め込みの例 [BI] を参考にした．$J_{\mathcal{F}_1}$ に対

してCはLの複素部分多様体、$J_{\mathcal{F}_2}$に対してCはLの totally real な部分多様体となることに注意する．この結果から**定理4.1**の「CがLの複素部分多様体」という仮定は落とせないことが分かる．このような現象が3次元で起きるかどうかは分かっていない．

最後に幾つか問題を述べて本稿を終わることにする．**問題2.3**に含まれるが、Barrettの結果の一般化として次の問題を考えてみる．

問題 4.4. *C^∞-flat Reeb成分は複素多様体に埋め込めるか?*

ここで次元の仮定はしていない．不満足ではあるが[KO1]から次のことは分かる．

系 4.5. *(3次元C^∞-flat Reeb成分)$\times\mathbb{C}$は複素3次元多様体に埋め込めない．*

一方で有限flatなホロノミーを持つReeb成分の埋め込み可能性についても当然考えるべきである．堀内-三松によるReeb成分の自己同型についての結果[HM]からも示唆されるように、以下が成り立つことが期待できる．

予想 4.6. *3次元C^1-flat Reeb成分は複素曲面に埋め込めない．*

またReeb成分とは限らずトーラス葉のホロノミーに対する条件のみを仮定した場合は、少し弱く以下の命題が予想される．

予想 4.7. *3次元Levi平坦多様体がC^2-flat Reeb成分の境界葉近傍を含むならば、複素曲面に埋め込めない．*

Neemannによる分類定理[N]を用いて次の状況証拠を得ている．

命題 4.8. *3次元Levi平坦多様体がC^2-flat Reeb成分の境界葉近傍を含むならば、射影曲面には埋め込めない．*

参考文献

[AB] M. Adachi, J. Brinkschulte, Curvature restrictions for Levi-flat real hypersurfaces in complex projective planes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (2015), no. 6, 2547–2569.

[B] D. E. Barrett, Complex analytic realization of Reeb's foliation of S^3, Math. Z., **203** (1990), 355–361.

[BF] D. E. Barrett, J. -E. Fornæss, On the smoothness of Levi-foliations. Publ. Mat., **32** (1988), 171–177.

[BI] D. E. Barrett, T. Inaba, On the Topology of Compact Smooth Three-Dimensional Levi-Flat Hypersurfaces, J. Geom. Anal., **2** (1992), no. 6, 489–497.

[Br] M. Brunella, On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle, Indiana. Univ. Math. J. **57** (2008), 3101–3113.

[BLM] C. Bonatti, R. Langevin, R. Moussu, Feuilletages de CP(n): de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **75** (1992), 123–134.

[C] D. Cerveau, Minimaux des feuilletages algébriques de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, Ann. Inst. Fourier **43**, 1535–1543 (1993).

[CC] A. Candel, L. Conlon, Foliations I and II, American Mathematical Society, 2003.

[CLS] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad, Minimal sets of foliations on complex projective spaces, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **68** (1988), 187–203.

[D] G. Della Sala, Non-embeddability of certain classes of Levi flat manifolds, Osaka J. Math. **51** (2014), 161–169.

[De] B. Deroin, Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337** (2003), no.12, 777–780.

[Gr] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann., **146** (1962), 331–368.

[Ha] A. Haefliger, Variétés feuilletés, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **16** (1962), 367–397.

[HM] T. Horiuchi, Y. Mitsumatsu, Reeb components with complex leaves and their symmetries I : The automorphism groups and Schröder's equation on the half line, arXiv:1605.08977.

[K] T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, Math. Z., Volume 281, Issue 3 (2015), 967–991.

[KO1] T. Koike, N.Ogawa, Local Criteria for Non-Embeddability of Levi-Flat Manifolds, to appear in J. Geom. Anal.

[KO2] T. Koike, N.Ogawa, in preparation.

[LN] A. Lins-Neto, A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), 1369–1385.

[MV] L. Meersseman, A. Verjovsky, On the moduli space of certain smooth codimension-one foliations of the 5-sphere by complex surfaces, J.Reine Angew. Math. **632**, (2009), 143–202.

[N] A. Neeman, Ueda theory: theorems and problems., Mem. Amer. Math. Soc. **81** (1989), no. 415.

[Ne] S. Nemirovski, Stein domains with Levi-flat boundaries in compact complex surfaces, Math. Notes **66** (1999), 522–525.

[No] S. P. Novikov, Topology of foliations, Trans. Moscow Math. Soc. **14** (1965), 268–305.

[O] 小川 竜, Levi 平坦葉層構造とその埋め込み問題について, 第64回トポロジーシンポジウム予稿集.

[Oh1] T. Ohsawa, Levi flat hypersurfaces in complex manifolds, Complex analysis and digital geometry, Acta Univ. Upsaliensis Skr. Uppsala Univ. C Organ. Hist., **86**, Uppsala Universitet, Uppsala, (2009), 223–231

[Oh2] T. Ohsawa, A survey on Levi flat hypersurfaces, Complex Geometry and Dynamics Volume 10 of the series Abel Symposia, 211–225.

[Oh3] T. Ohsawa, Nonexistence of certain Levi flat hypersurfaces in Kähler manifolds from the viewpoint of positive normal bundles, Publ. RIMS Kyoto Univ. **49** (2013), 229–239.

[Si] Y. Siu, Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 3, 1217–1243.

[Su] O. Suzuki, Neighborhoods of a compact non-singular algebraic curve imbedded in a 2-dimensional complex manifold, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **11** (1975), 185–199.

[U] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.