Characterizations of Oka manifolds by holomorphic flexibilities

大阪大学大学院理学研究科数学専攻　日下部　佑太
Yuta Kusakabe
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University
e-mail: y-kusakabe@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

概要

本稿では RIMS 共同研究「擬凸領域のトポロジーと再生核」における講演の内容に加え, その後得られたある種の楕円性による岡多様体の新たな特徴付けについて概説する．講演の内容は [6] を元にしたものであり, 写像空間の正則柔軟性による岡多様体の特徴付けに関するものであった．新たに得られた特徴付けもその流れを汲むものであるが, Gromov の楕円性と関わるという点がこれまでとは異なる．これから, Gromov や Forstnerič らによって得られた subelliptic ならば岡であるという事実の別証明や, [5] における Gromov の予想に対する肯定的な解答が従う．

1　岡多様体と正則柔軟性

まず初めに, 本稿における用語の説明をしておく．本稿では複素多様体は連結かつ第二可算公理を満たすものとし, 多様体の位相としては Euclid 位相, 写像空間の位相としてはコンパクト開位相のみを考える．また複素多様体 X, Y, Z, コンパクト集合 $K \subset X$ に対して, $f : Z \times K \to Y$ が正則写像であるとは, K の開近傍 $U \subset X$ が存在し f が正則写像 $Z \times U \to Y$ に拡張されることとする．

以上の準備のもと, 本稿において主な興味の対象となる岡多様体を導入する．岡多様体は次のように, 正則写像の Runge 型近似定理が成り立つ多様体として定義される．

定義 1. 複素多様体 Y が**岡多様体**であるとは, 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ および任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ に対して制限写像の集合 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, Y)|_K \subset \mathcal{O}(K, Y)$ が稠密となることである．

岡多様体は Gromov [5] の結果を Forstnerič や Lárusson らが整理および洗練する過程で生まれた概念である．岡多様体という名前は, Stein 多様体から岡多様体への写像が次のように岡の原理 (関数論におけるホモトピー原理) を満たすことによる．

定理 1 (cf. [3, Theorem 5.4.4])**.** *X を Stein 多様体, Y を岡多様体, $K \subset X$ をコンパクト $\mathcal{O}(X)$ 凸*[*1]*集合, $X' \subset X$ を閉解析的部分集合とし, 連続写像 $f_0 : X \to Y$ は K の近傍と X' の上で正則*

*1 正則凸とも言われる．$\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)} = \{p \in X : |f(p)| \le \max_{x \in K} |f(x)|, \ \forall f \in \mathcal{O}(X)\}$ が K に等しいということである．

であるとする．このとき，f_0 を始点とし $f_1 \in \mathcal{O}(X,Y)$ となるホモトピー $f_t : X \to Y,\ t \in [0,1]$ で，全ての $t \in [0,1]$ に対し次が成り立つようなものが存在する: f_t は K の近傍と X' の上で正則であり，$f_t|_K \approx f_0|_K$*2 かつ $f_t|_{X'} = f_0|_{X'}$.

この岡の原理の他にも, ジェット拡張に関する岡の原理やパラメータ版の岡の原理なども証明されており, 多くの岡性が互いに同値であることが知られている (cf. [3, §5.15]).

ある複素多様体が岡であるかどうか判別することを考えたい．定義 1 における正則写像の近似問題を直接解くのは一般にとても難しく，ここで Gromov が導入した楕円性が登場する．Gromov [4, 5] によって岡性と関連する概念として導入された楕円性は, 後述の正則柔軟性と同じ意味を持つ言葉として使われていた．しかし現代的に楕円性という言葉では, 以下で挙げる subelliptic, elliptic, Ell_1 のような dominability と関連する正則柔軟性を指すのが適当である．Gromov [4, 5] での楕円性と, Forstnerič [2] で導入された楕円性である subelliptic という概念の定義を以下に述べる:

- 複素多様体 Y が *subelliptic* であるとは, Y 上の有限個の正則ベクトル束 $\pi_j : E_j \to Y$ と零切断に制限すると恒等写像になる正則写像 $s_j : E_j \to Y,\ j = 1, \ldots, m$ で, 任意の $y \in Y$ に対して $\sum_{j=1}^{m} (\mathrm{d}s_j)_{0_y}(E_{j,y}) = \mathrm{T}_y Y$*3 となるものが存在することである.
- 複素多様体 Y が *elliptic* であるとは, 上で $m = 1$ としたものが成り立つことである.
- 複素多様体 Y が *Ell_1* であるとは, 任意の Stein 多様体 X と任意の正則写像 $f_0 \in \mathcal{O}(X,Y)$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ と正則写像 $f : \mathbb{C}^N \times X \to Y$ で, 各 $x \in X$ に対して $f(0,x) = f_0(x)$ かつ $\partial_z|_{z=0} f(z,x) : \mathrm{T}_0\mathbb{C}^N \to \mathrm{T}_{f_0(x)}Y$ が全射になるものが存在することである.
- 複素多様体 Y が *Ell_2* であるとは, Stein 多様体の閉解析的部分集合の近傍から Y への正則写像に対して, ジェット拡張に関する岡の原理が成り立つことである.
- 複素多様体 Y が *Ell_∞* であるとは, 定理 1 における拡張の部分をジェット拡張にした岡の原理の多面体パラメータ版が成立することである (cf. [5, §3.1]).

Gromov は [5] において elliptic な複素多様体が Ell_∞ (従って岡) であることを示し, Forstnerič [2] はそれを subelliptic なものに一般化した．これから例えば複素 Lie 群やそれが正則推移的に作用する複素多様体が岡であることが, 指数写像を考えることで簡単に従う．現在岡多様体として知られている複素多様体の多くは, subelliptic であることを示されることで岡性を確かめられている.

Gromov が楕円性という言葉で意味したものは, 複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ から多くの正則写像を許容するという性質である．現代では, このようなことを様々な視点から捉えた性質は**正則柔軟性** (*holomorphic flexibility*) と呼ばれる．岡多様体は岡の原理の成立から様々な正則柔軟性を持つことが分かる．以下では, その中でも代表的な正則柔軟性を挙げる:

- 複素多様体 Y が *dominable* であるとは, ある $y \in Y$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ と $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N, Y)$ で $f(0) = y$ かつ $\mathrm{d}f_0(\mathrm{T}_0\mathbb{C}^N) = \mathrm{T}_y Y$ となるものが存在することである.

*2 $\approx$ は写像空間の位相で十分近いという意味である.

*3 $E_{j,y}$ は E_j の y 上のファイバーを表し, 0_y はその原点を表す.

- 複素多様体 Y が *strongly dominable* であるとは, 上が各 $y \in Y$ に対し成り立つことである.
- 複素多様体 Y が $\mathbb{C}$-*connected* であるとは, 任意の $a, b \in Y$ に対し, 有限個の $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, Y)$, $j = 1, \ldots, m$ で $a \in f_1(\mathbb{C})$, $b \in f_m(\mathbb{C})$, $f_j(\mathbb{C}) \cap f_{j+1}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$, $j = 1, \ldots, m-1$ となるものが存在することである.
- 複素多様体 Y が *strongly* $\mathbb{C}$-*connected* であるとは, 上で $m = 1$ としたものが成り立つことである.
- 複素多様体 Y が $\mathbb{C}$-*dominated* であるとは, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, Y)$ で $\overline{f(\mathbb{C})} = Y$ となるものが存在することである.

岡多様体が以上の正則柔軟性を全て満たすことは定理 1 から明らかである. ここで, これまでに導入された概念の間の関係を整理しておく ($\mathrm{Ell}_\infty \Leftarrow \mathrm{Ell}_2$ は Oka を経由することで証明される):

$$
\begin{tikzcd}
\text{elliptic} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Ell}_\infty \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \mathrm{Ell}_2 \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{Ell}_1 \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{subelliptic} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Oka} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{strongly dominable} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{dominable} \\
 & \mathbb{C}\text{-dominated} & \text{strongly } \mathbb{C}\text{-connected} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{C}\text{-connected} &
\end{tikzcd}
$$

岡多様体論においては, 岡多様体の幾何学的特徴付けを得ること, 特に subelliptic $\Rightarrow$ Oka の逆が成立するかどうかが最も重要な問題の一つである. これに関して subelliptic $\Rightarrow$ Oka $\Rightarrow$ strongly dominable の二つの矢印のうち, 少なくとも一つの逆は成立しないことが知られている [1]. 上で導入した正則柔軟性が岡多様体の幾何学的特徴付けを与えてくれたらよいのだが, 岡でない複素多様体でも strongly $\mathbb{C}$-connected かつ $\mathbb{C}$-dominated となる場合があることが次の例から分かる.

例 (Rosay-Rudin [7]). $\mathbb{C}^2$ 内の閉離散部分集合 $D \subset \mathbb{C}^2$ であって, 原点で局所双正則であるような任意の $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ に対して $f(\mathbb{C}^2) \cap D \neq \emptyset$ となるものが存在する. このような D に対して $Y = \mathbb{C}^2 \setminus D$ を考える. すると上の性質から Y は dominable でないので岡でないが, 次元的な理由 (cf. [3, §8.8]) により Y は strongly $\mathbb{C}$-connected かつ $\mathbb{C}$-dominated である.

[6] ではこのような背景のもと, 複素多様体の正則柔軟性だけでなく正則写像の空間の正則柔軟性まで考えることで岡多様体の幾何学的特徴付けを得た. 次章では [6] で得られた結果およびその証明について概説する.

2 写像空間の正則柔軟性による岡多様体の特徴付け

複素多様体 (もしくはそのコンパクト部分集合) X, Y, Z に対し写像 $f : Z \to \mathcal{O}(X, Y)$ が**正則**であるとは, 自然に付随する写像 $Z \times X \to Y$, $(z, x) \mapsto f(z)(x)$ が正則であることとする. このように写像空間を値域とする正則写像を定義することで, 前章で導入した正則柔軟性を写像空間に対しても同様に考えることができる. dominable, strongly dominable 以外の定義の仕方は明白である. $\mathcal{O}(X, Y)$ が *strongly dominable* であるとは, 任意の $\varphi \in \mathcal{O}(X, Y)$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ と正則写像

$f:\mathbb{C}^N \to \mathcal{O}(X,Y)$ で $f(0)=\varphi$ かつ任意の $x\in X$ に対し $\mathrm{d}(\mathrm{ev}_x \circ f)_0(\mathrm{T}_0\mathbb{C}^N)=\mathrm{T}_{\varphi(x)}Y$ [*4] となるものが存在することである. 同様に写像空間 $\mathcal{O}(X,Y)$ が dominable であるということを定義しようとすると, 値域 Y が dominable であることと明らかに同値になってしまうため, 写像空間に対して dominable であるかどうかは考えないことにする.

次の定理が [6] における主定理であり, 写像空間の開集合の整曲線による連結性によって岡多様体を幾何学的に特徴付けている.

定理 2 ([6, Theorem 3.2])**.** 複素多様体 Y に対し, 以下の条件は同値である*:*

1. Y は岡多様体である.
2. 任意の有界凸領域 Ω と任意の空でない開集合の組 $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset\mathcal{O}(\Omega,Y)$ に対し, 正則写像 $f:\mathbb{C}\to\mathcal{O}(\Omega,Y)$ で $f(0)\in\mathcal{U}$, $f(1)\in\mathcal{V}$ となるものが存在する.

この特徴付けと岡の原理から, 写像空間の正則柔軟性による以下の特徴付けが簡単に従う.

系 1. 複素多様体 Y に対し, 以下の条件は同値である*:*

1. Y は岡多様体である.
2. 任意の Stein 多様体 X に対し, $\mathcal{O}(X,Y)$ の任意の弧状連結成分は $\mathbb{C}$-*dominated* である.
3. 任意の有界凸領域 Ω に対し, $\mathcal{O}(\Omega,Y)$ は $\mathbb{C}$-*dominated* である.
4. 任意の Stein 多様体 X に対し, $\mathcal{O}(X,Y)$ の任意の弧状連結成分は *strongly* $\mathbb{C}$-*connected* である.
5. 任意の有界凸領域 Ω に対し, $\mathcal{O}(\Omega,Y)$ は *strongly* $\mathbb{C}$-*connected* である.

以下では定理 2 の証明を概説する. 初めの重要なステップは, 岡多様体の定義における近似問題 (cf. 定義 1) をなるべく単純な近似問題に帰着させることである. コンパクト凸部分集合 $K\subset\mathbb{C}^n$ と線形汎関数 $\lambda:\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, 実数 $a\in\mathbb{R}$ に対し, $K_a^\lambda=\{z\in K:\lambda(z)\le a\}$ と書くことにする.

補題 1. Y を複素多様体とする. 任意のコンパクト凸集合 $K\subset\mathbb{C}^n$ と任意の線形汎関数 $\lambda:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$ に対し, $\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}\subset\mathcal{O}(K_0^\lambda,Y)$ が稠密であるとする. このとき Y は岡である.

この補題はコンパクト凸集合を凸多面体で近似することで簡単に従う. 証明の詳細は省略する.

もう一つの重要なステップは, 補題 1 の近似問題の解となる正則写像を貼り合わせによって構成するところである. Forstnerič による貼り合わせ補題を本稿に合った形にした次の定理を用いることになる. 原点の開近傍 $U\subset\mathbb{C}^N$ に対し正則写像 $f:U\to\mathcal{O}(X,Y)$ が *dominating* であるとは, 任意の $x\in X$ に対して $\mathrm{d}(\mathrm{ev}_x\circ f)_0:\mathrm{T}_0U\to\mathrm{T}_{f(0)(x)}Y$ が全射であることとする. また res_K のように書いたら制限写像 $\varphi\mapsto\varphi|_K$ を表す.

定理 3 (cf. [3, Proposition 5.9.2])**.** X を *Stein* 多様体*,* Y を複素多様体*,* (A,B) を X 内の *Cartan pair (cf. [3, Definition 5.7.1])* とする. 正則写像 $f:\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(A,Y)$ で $\mathrm{res}_{A\cap B}\circ f:\mathbb{D}^N\to$

[*4] ev_x で点 x を代入する写像 $\varphi\mapsto\varphi(x)$ を表す.

$\mathcal{O}(A\cap B,Y)$ が *dominating* であるものに対し, 次を満たす $0<r<1$ が存在する: 正則写像 $g:\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(B,Y)$ で $\mathrm{res}_{A\cap B}\circ g\approx\mathrm{res}_{A\cap B}\circ f$ となるものに対して, 正則写像 $h:r\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(A\cup B,Y)$ で $\mathrm{res}_A\circ h\approx f|_{r\mathbb{D}^N}$, $\mathrm{res}_B\circ h\approx g|_{r\mathbb{D}^N}$ となるものが存在する (これらの近似の精度は, $\mathrm{res}_{A\cap B}\circ f$ と $\mathrm{res}_{A\cap B}\circ g$ の近さに依存する).

定理 *2* の証明. 条件 1 が条件 2 を導くことは岡の原理から明らかである. 従って以下では条件 2 を仮定して Y が岡多様体であることを示す.

任意のコンパクト凸集合 $K\subset\mathbb{C}^n$ と線形汎関数 $\lambda:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$ に対し, 補題 1 の条件を確かめる. 任意に $F\in\mathcal{O}(K_0^\lambda,Y)$ をとる. 定義より F はある有界凸領域 $\Omega\supset K_0^\lambda$ まで正則に拡張される. $\varepsilon>0$ を $K_\varepsilon^\lambda\subset\Omega$ となるようにとる. このとき $(K_\varepsilon^\lambda,\overline{K\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda})$ は Cartan pair になっている. また $K_\varepsilon^\lambda\cap\overline{K\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}=\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}$, $K_\varepsilon^\lambda\cup\overline{K\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}=K$ である. 正則写像 $G:\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(K,Y)$ で $\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ G$ が dominating なものをとる (このようなものは局所座標を用いて容易に構成できる). 必要なら $\Omega\supset K_\varepsilon^\lambda$ を縮めることで, 仮定より正則写像 $f:\mathbb{C}\to\mathcal{O}(\mathbb{D}^N,\mathcal{O}(\Omega,Y))$ $(\cong\mathcal{O}(\mathbb{D}^N\times\Omega,Y))$ で $\mathrm{res}_{K_0^\lambda}\circ(f(0))\approx F$, $\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ(f(1))\approx\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ G$ となるものが存在する. K_0^λ と $\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}$ は共通部分を持たないコンパクト凸集合であるので, $K_0^\lambda\cup\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}$ は多項式凸である. 従って, 正則関数 $\varphi\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ で $\varphi|_{K_0^\lambda}\approx 0$, $\varphi|_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\approx 1$ となるものを岡-Weil の近似定理より構成することができる. 正則写像 $F':\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(K_\varepsilon^\lambda,Y)$ を $F'(z)(x)=(f\circ\varphi(x))(z)(x)$ と定義すると, $\mathrm{res}_{K_0^\lambda}\circ F'\approx F$, $\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ F'\approx\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ G$ となる. 定理 3 より F' と G を貼り合わせて正則写像 $H:r\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(K,Y)$, $0<r<1$ を構成でき, $\mathrm{res}_{K_0^\lambda}\circ H\approx\mathrm{res}_{K_0^\lambda}\circ F'|_{r\mathbb{D}^N}\approx F$ となることから $H(0)\in\mathcal{O}(K,Y)$ は K_0^λ 上 F を近似する. □

この証明の要点を簡単にまとめると, $\mathbb{C}$ から写像空間への正則写像を経由することで, 多様体値写像の近似問題を簡単に解くことができる古典的な複素数値関数の近似問題に一旦移しておいてから, Forstnerič の貼り合わせ補題を用いて再び多様体値の世界に戻ってくるというものである. 最近同様のアイデアを用いることで, 写像空間が strongly dominable であるという性質も岡多様体を特徴付けることが分かった. 次の章ではその特徴付けとそれから従う重要な系, 証明の概要について説明する.

3 楕円性による岡多様体の特徴付け

前章では $\mathbb{C}$-dominated, strongly $\mathbb{C}$-connected という正則柔軟性を写像空間に対して考えることで, 岡多様体が特徴付けられることを見た. 残った写像空間の正則柔軟性として, $\mathbb{C}$-connected と strongly dominable がある. 写像空間が $\mathbb{C}$-connected である場合は, 貼り合わせ補題を洗練 (定理 3 における $\mathbb{D}^N$ のところを $\{0\}$ に) することで岡であることを証明できると思うが, この洗練がとても難しいため未解決である. 一方で, 写像空間が strongly dominable ならば岡であるという次の定理を最近になって証明することができた.

定理 4. 複素多様体 Y に対し, 以下の条件は同値である:

1. Y は岡多様体である．

2. 任意の Stein 多様体 X に対し，$\mathcal{O}(X,Y)$ は *strongly dominable* である．

3. 任意の有界凸領域 Ω に対し，$\mathcal{O}(\Omega,Y)$ は *strongly dominable* である．

この定理における条件 2 は，Y が Ell_1 多様体であることの簡単な言い換えであることに注意する．これから自明な系として，楕円性による岡多様体の特徴付けが従う．

系 2. 複素多様体に対し，岡多様体であることと Ell_1 多様体であることは同値である．

subelliptic ならば Ell_1 であることは簡単に分かる (cf. [3, Proposition 8.8.11]) ので，系 2 から Forstnerič [2] による subelliptic ならば岡であるという事実の別証明が得られる．

Gromov は [5, §1.4.E"] において，[4, p. 72] における Exercises (d), (e), (e') を解くことができなく Conjectures と呼びたいと述べている．これらの問題は Ell_1 多様体に対して岡の原理が成り立つかを問うようなものである．しかし系 2 より Ell_1 多様体は岡の原理を満たすことが分かるので，次の系が従う．

系 3. *Gromov の予想 [5, §1.4.E"] ([4, p. 72] の Exercises (d), (e), (e')) は全て正しい．*

また [4, p. 73] では Ell_1 から Ell_2 が従うかどうか不明であると述べられているが，その問題も解決できたことになる．

以下では定理 4 の証明について概説する．条件 3 を仮定して Y が岡であることを示せば十分である．次の補題が証明のキーポイントである．正則写像 $f:\mathbb{C}^N\to\mathcal{O}(K,Y)$ に対して $f^K:\mathcal{O}(K,\mathbb{C}^N)\to\mathcal{O}(K,Y)$ を $f^K(\varphi)(x)=(f\circ\varphi(x))(x)$ と定める．

補題 2. *$K\subset\mathbb{C}^n$ をコンパクト凸集合，$\lambda:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$ を線形汎関数，$f:\mathbb{C}^N\to\mathcal{O}(K_0^\lambda,Y)$ を dominating な正則写像とする．このとき $f(0)\in\overline{\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}}$ ならば，$f^{K_0^\lambda}(\mathcal{O}(K_0^\lambda,\mathbb{C}^N))\subset\overline{\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}}$ が成り立つ．*

証明． まず $\varepsilon>0$ で $f:\mathbb{C}^N\to\mathcal{O}(K_\varepsilon^\lambda,Y)$ が定義されて dominating になるものをとる．仮定より $g_0\in\mathcal{O}(K,Y)$ で $g_0|_{K_0^\lambda}\approx f(0)|_{K_0^\lambda}$ となるものが存在する．必要ならば $\varepsilon>0$ を取り替えることで，g_0 は K_ε^λ の上でも $f(0)$ に十分近いとしてよい．このとき陰関数定理より，0 に近い $\varphi\in\mathcal{O}(K_\varepsilon^\lambda,\mathbb{C}^N)$ で $f^{K_\varepsilon^\lambda}(\varphi)=g_0|_{K_\varepsilon^\lambda}$ となるものが存在する．準大域拡張定理 ([3, Theorem 3.4.1]) を $\Phi:\mathbb{C}^N\to\mathcal{O}(K_\varepsilon^\lambda,Y)$, $\Phi(z)=f^{K_\varepsilon^\lambda}(\varphi+z)$ に用いることで，$\delta>0$ と正則写像 $g:\delta\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(K,Y)$ で，$\mathrm{res}_{K_\varepsilon^\lambda}\circ g$ が dominating かつ $g(0)=g_0$, $\mathrm{res}_{K_\varepsilon^\lambda}\circ g\approx\Phi|_{\delta\mathbb{D}^N}$ となるものを構成することができる．再び陰関数定理より，$0<\delta'<\delta$ と 0 に近い正則写像 $g':\delta'\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(K_\varepsilon^\lambda,\mathbb{C}^N)$ で $\Phi^{K_\varepsilon^\lambda}\circ g'=\mathrm{res}_{K_\varepsilon^\lambda}\circ g|_{\delta'\mathbb{D}^N}$ となるものが存在する．任意に $f^{K_0^\lambda}(\psi)\in f^{K_0^\lambda}(\mathcal{O}(K_0^\lambda,\mathbb{C}^N))$, $\psi\in\mathcal{O}(K_0^\lambda,\mathbb{C}^N)$ をとる．$K_0^\lambda\cup\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}$ が多項式凸であるので，岡-Weil の近似定理より正則写像 $\psi':\delta'\mathbb{D}^N\to\mathcal{O}(K_\varepsilon^\lambda,\mathbb{C}^N)$ で $\mathrm{res}_{K_0^\lambda}\circ\psi'\approx\psi$, $\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ\psi'\approx\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ(\varphi+g')$ となるものが存在する．構成の仕方から $\mathrm{res}_{K_0^\lambda}\circ(f^{K_\varepsilon^\lambda}\circ\psi')\approx f^{K_0^\lambda}(\psi)$ かつ $\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ(f^{K_\varepsilon^\lambda}\circ\psi')\approx\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ(\Phi^{K_\varepsilon^\lambda}\circ g')=\mathrm{res}_{\overline{K_\varepsilon^\lambda\setminus K_{\varepsilon/2}^\lambda}}\circ g|_{\delta'\mathbb{D}^N}$ となる．従って定理 3 より $f^{K_\varepsilon^\lambda}\circ\psi'$ と $g|_{\delta'\mathbb{D}^N}$ を正

則写像 $h : r\delta'\mathbb{D}^N \to \mathcal{O}(K,Y)$, $0<r<1$ に貼り合わせることができ, $h(0) \in \mathcal{O}(K,Y)$ は K_0^λ 上 $f^{K_0^\lambda}(\psi) = f^{K_\varepsilon^\lambda} \circ \psi'(0)|_{K_0^\lambda}$ を近似する. $\square$

定理 *4* の証明. $K \subset \mathbb{C}^n$ をコンパクト凸集合, $\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ を線形汎関数とする. 補題 1 より $\overline{\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}} = \mathcal{O}(K_0^\lambda, Y)$ となることを示せばよいが, $\mathcal{O}(K_0^\lambda, Y)$ は連結なので $\overline{\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}}$ が開であることを示せば十分である. 任意に $\varphi \in \overline{\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}}$ をとる. 仮定より, dominating な正則写像 $f : \mathbb{C}^N \to \mathcal{O}(K_0^\lambda, Y)$ で $f(0) = \varphi$ となるものが存在する. $f^{K_0^\lambda}(\mathcal{O}(K_0^\lambda, \mathbb{C}^N))$ の内部を $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(K_0^\lambda, Y)$ とすると, f が dominating であることと陰関数定理より $\varphi = f(0) \in \mathcal{U}$ となる. 一方で補題 2 より $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}}$ であるので, φ が $\overline{\mathcal{O}(K,Y)|_{K_0^\lambda}}$ の内点であることが分かった. $\square$

参考文献

[1] R. B. Andrist, N. V. Shcherbina and E. F. Wold, *The Hartogs extension theorem for holomorphic vector bundles and sprays*, Ark. Mat. **54** (2016), no. 2, 299–319.

[2] F. Forstnerič, *The Oka principle for sections of subelliptic submersions*, Math. Z. **241** (2002) no. 3, 527–551.

[3] F. Forstnerič, *Stein Manifolds and Holomorphic Mappings*, Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 56. Springer, Cham, 2017.

[4] M. Gromov, *Partial Differential Relations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 9. Springer, Berlin, 1986.

[5] M. Gromov, *Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles*, J. Am. Math. Soc. **2** (1989) no. 4, 851–897.

[6] Y. Kusakabe, *Dense holomorphic curves in spaces of holomorphic maps and applications to universal maps*, Internat. J. Math. **28** (2017), no. 4, 1750028, 15 pp.

[7] J.-P. Rosay and W. Rudin, *Holomorphic maps from* $\mathbb{C}^n$ *to* $\mathbb{C}^n$, Trans. Am. Math. Soc. **310** (1988), no. 1, 47–86.