A necessary and sufficient condition for constrictive Markov operators
(マルコフ作用素が constrictive であるための必要十分条件について)

岩田　友紀子
東北学院大学教養学部情報科学科

1　はじめに

ある力学系 $S:\Omega\to\Omega$ が生成する軌道に下記のようにランダムな確率過程 $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ を摂動として加えた軌道、

$$X_{n+1}=S(X_n)+Y_n,$$

は、$\{Y_n\}_{n\geq 0}$ が独立同分布な確率過程で、確率変数 X_0 と独立であればマルコフ過程をなす．実際にこの場合、g を $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ の確率密度関数とし、f_n を X_n が従う確率分布の確率密度関数とすると、

$$f_{n+1}(x)=\int_{\mathbb{R}} f_n(y)g(x-S(y))\mu(dy)=:Tf_n,$$

となり、各自然数 n に対して f_{n+1} をマルコフ作用素 $T:L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$ を用いて Tf_n と表すことをができる．本稿ではこのようなマルコフ作用素にによって表される確率密度関数 $\{f_n\}$ における分布の周期性等の性質について調べる．分布の挙動を調べる上で重要となるのが、マルコフ作用素 T を実数値可積分関数の空間 $L^1(\Omega)$ に制限し、T の固有値や固有ベクトルについて調べなくてはいけないということである．1986 年に Lasota と Komorník は、実数値可積分関数の空間 $L^1(\Omega)$ 上で定義された constrictive なマルコフ作用素は必ず原始的測度空間となる部分 σ 加法族を含むことを示唆した [3]．我々は、実数値可積分関数の空間で定義されたマルコフ作用素が原始的測度空間となる部分 σ 加法族を持つならば constrictive となることを意味するのかどうかについて考察した．

2 Constrictive なマルコフ作用素に関する結果

まず、constrictive なマルコフ作用素の定義を与える.

Definition 2.1. σ-有限な測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上で定義された（実数値または複素数値）可積分関数の空間 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において、$D := \{f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) : f \geq 0$ かつ $\|f\| = 1\}$ とする. ここで、$\|\cdot\|$ は L^1 ノルムとする. 線形作用素 $T : L^1(E, \mathcal{F}, \mu) \to L^1(E, \mathcal{F}, \mu)$ が以下の 2 つの条件を満たすとき、T は **constrictive** なマルコフ作用素であるという：

(i) $T(D) \subseteq D$,

(ii) 有限の測度をもつある集合 $C \in \mathcal{F}$ と、ある実定数 $\kappa < 1$ と $\delta > 0$ が存在し、全ての $f \in D$ において、ある自然数 $n_0(f) \in \mathbb{N}$ が存在し、 $\mu(A) < \delta$ を満たす全ての $A \in \mathcal{F}$ と $n \geq n_0(f)$ に対して

$$\int_{(E \setminus C) \cup A} T^n f d\mu \leq \kappa$$

が成り立つ.

Lasota と Komorník はマルコフ作用素が constrictive であるとき次のスペクトル分解定理が成り立つことを示した [3].

Theorem 2.1 (The splitting theorem of Lasota-Komorník)**.** σ-有限な測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における実数値可積分関数の空間上で定義されたマルコフ作用素 T が *constrictive* ならば、ある整数 r と、2 つの非負関数の列 $\{g_i\}_{i=1}^r \subseteq D$ と $\{k_i\}_{i=1}^r \subset L^\infty$, 作用素 $Q : L^1 \to L^1$ が存在し、 各 $f \in L^1$ に対して、

$$Tf(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(f) g_i(x) + Qf(x)$$

が成り立つ. ここで、$\lambda_i(f) = \int_\Omega f(x) k_i(x) \mu(dx)$. また、関数 g_i と作用素 Q は以下の性質を満たす：

1. $g_i(x) g_j(x) = 0 \qquad \forall i \neq j$.
2. 各 i に対して、一意的に整数 $\alpha(i)$ が定まり、 $Tg_i = g_{\alpha(i)}$ を満たす.
3. $\lim_{n\to\infty} \|T^n Q f\| = 0 \qquad \forall f \in L^1$.

1965 年に Jacobs、deLeeuw、Glicksberg らによって示された次の定理 ([1]) は上記のこの Lasota と Komorník の結果を複素化したものであると考えられている.

Theorem 2.2 (The splitting theorem of Jacobs-deLeeuw-Glicksberg)**.** 複素バナッハ空間 E 上で定義された有界線形作用素の可換弱概周期 *1* パラメータ半群 $\mathcal{T}$ と、弱位相の意味で $\mathcal{T}$ の閉包の核 $\mathcal{K}$ における単位球面において、

$$\begin{aligned} E_{rev}(\mathcal{T}) &= E_{uds}(\mathcal{T}) = QE \\ E_{fl}(\mathcal{T}) &= Q^{-1}(0) = (I-Q)E. \end{aligned}$$

特に、E は閉不変部分空間 $E_{rev}(\mathcal{T})$ と $E_{fl}(\mathcal{T})$ との直和となる. すなわち、

$$E = E_{fl}(\mathcal{T}) \oplus E_{rev}(\mathcal{T})$$

が成り立つ.

歴史的には、まずこの Jacobs-deLeeuw-Glicksberg のスペクトル分解定理が導かれ、この定理を基に Lasota と Li や Yorke は L^1 上で定義されたマルコフ作用素に対して以下を示した ([4]).

Proposition 2.1. バナッハ空間 L^1 上で定義された有界線形作用素の可換弱概周期 *1* パラメータ半群 $\mathcal{T}$ に対して以下は同値である：

(i) L^1 においてある直和分解 $L^1 = E_{fl}(\mathcal{T}) \oplus E_{rev}(\mathcal{T})$ が存在し、

$$E_{fl}(\mathcal{T}) = \{x \in L^1 : \lim_{t\to\infty} \|T_t x\| = 0\} \quad \text{かつ} \quad \dim(E_{rev}(\mathcal{T})) < \infty$$

が成り立つ.

(ii) あるコンパクトな部分集合 $A \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が存在し、

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{y\in A} \|T^n x - y\| = 0 \qquad \textit{for each } x \in D,$$

を満たす. このとき、A を **constrictor** と呼ぶ.

更に、1991 年に Sine が上記の結果を一般のバナッハ空間へと拡張し、複素バナッハ空間上で定義された有界線形作用素による 1 パラメータ半群が constrictor を持つための必要十分条件を求め (Theorem 2.3, [6])、実バナッハ空間上で定義された有界線形作用素による 1 パラメータ半群が constrictor ならば、すなわち、constrictived であるならば Jacobs-deLeeuw-Glicksberg のスペクトル分解定理を満たすことを示した (Theorem 2.4, [6]).

Theorem 2.3 (Complex Banach Space: Sine)**.** 任意の複素バナッハ空間 E 上で定義された有界線形作用素による *1* パラメータ半群 $\mathcal{T}$ に対して以下は同値である：

(i) あるコンパクトな部分集合 $A \subset E$ が存在し、各 $x \in B(E)$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{y\in A} \|T_t x - y\| = 0$$

を満たす．ここで、$B(E)$ は E の単位閉球とする．

(ii) ある $\mathcal{T}$ に関する直和分解 $E = E_{fl}(\mathcal{T}) \oplus E_{rev}(\mathcal{T})$ が存在し、

- $E_{fl}(\mathcal{T}) = \{x \in X : \lim_{t\to\infty} \|T_t x\| = 0\}$
- $E_{rev}(\mathcal{T}) = E_{uds}(\mathcal{T}), \quad \dim(E_{rev}(\mathcal{T})) < \infty$

を満たす．

Theorem 2.4 (Real Banach Space: Sine)**.** 実可積分関数の空間 L^1 上で定義されたマルコフ作用素 T が *constrictive* ならば、T は $E_{rev}(\mathcal{T})$ 上で周期的であり、次の意味で漸近周期的となる：

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f - T^n \pi f\| = 0.$$

ここで、π は *Theorem 2.2* で $E = L^1$ としたときの直和分解における $E_{fl}(\mathcal{T})$ への射影とする．

上記のように、Sine や Lasota、Komorník らは実バナッハ空間上で定義されたマルコフ作用素が constrictive であるならばある種のスペクトル分解を満たすことを示した．彼らの結果は、複素固有値ではなく実固有値のみに制限したスペクトル分解定理に関する結果であり、より現実的な分布の漸近周期的な挙動を記述した結果といえる．しかし、複素バナッハ空間上の constrictive なマルコフ作用素が Jacobs-deLeeuw-Glicksberg のスペクトル分解定理を満たすための必要十分条件が導かれた議論と異なり、実バナッハ空間に制限したマルコフ作用素が Jacobs-deLeeuw-Glicksberg のスペクトル分解定理を満たすとき constrictive であるかどうかはわかっていない．

そこで我々は、実可積分関数の空間 L^1 に制限したマルコフ作用素 $T : L^1 \to L^1$ が Jacobs-deLeeuw-Glicksberg のスペクトル分解定理を満たす、すなわち、直和分解 $L^1 = E_{fl}(T) \oplus E_{rev}(T)$ が存在し、

- $E_{fl}(T) = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0\}$
- $E_{rev}(T) = E_{uds}(T), \quad \dim(E_{rev}(T)) < \infty$

を満たすならば、マルコフ作用素 T が constrictive であることを下記のある条件を前提として示した.

Definition 2.2. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値可積分関数の空間 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において、積分作用素 $T : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を次のように定義する：

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) \mu(dy) \qquad \textit{for } f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu). \tag{2.1}$$

ここで、$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ は可測関数で

$$K(x,y) \geq 0 \quad \textit{and} \quad \int_\Omega K(x,y) \mu(dx) = 1 \tag{2.2}$$

を満たすとする．このとき、、積分作用素 T はマルコフ作用素となる．更に、この積分作用素 T は殆ど至る所の点 $x \in \Omega$ に対して、

$$(C) \qquad T\mathbf{1}_\Omega(x) = \mathbf{1}_\Omega(x)$$

を満たすとする.

まず、条件 (2.1)、(2.2)、 (C) を満たす積分作用素 T について以下が成り立つ (cf. [2]).

Proposition 2.2. 条件 *(2.1)*、*(2.2)*、*(C)* を満たす積分作用素 $T : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して、

$$\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} : \ T^n \mathbf{1}_A = \ \textit{characteristic function} \ \forall n \geq 0\}$$

は $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族となり、$(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu)$ は原始的測度空間となる.

この結果から、部分 σ 加法族 $\mathcal{F}_0$ の任意の原子元は周期的であることが分かる．即ち、各原子元 $W \in \mathcal{F}_0$ に対して、最小の整数 $d \geq 1$ が存在し、

$$T^d \mathbf{1}_W = \mathbf{1}_W$$

を満たす．このことは積分作用素 T が制限した集合族上で定義された可積分関数に対して周期的であることを意味し、次の主定理が示される ([2]).

Theorem 2.5. 確率空間 (Ω, Σ, μ) 上の実数値可積分関数の空間上で定義された線形作用素 $T : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が条件 *(2.1)*、*(2.2)*、 *(C)* を満たすとき、以下は同値である：

(i) T は *constrictive* である．

(ii) 部分 σ 加法族

$$\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} :\ T^n \mathbf{1}_A = \ \textit{characteristic function}\ \forall n \geq 0\} \subset \mathcal{F}$$

は μ に関して高々有限個の原子元を持ち、各原子元 W に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus T^{dn}\mathbf{1}_B) = 0,$$

が全ての正の測度を持つ部分集合 $A, B \subset W$ に対して成り立つ．ここで、d は各原子元 W の周期の最小公倍数とする．

上記より、ある種の条件下で、マルコフ作用素が周期的な部分 σ-加法族をもつことと、constrictive であることがわかった．今後の課題としてこの結果をより一般的な測度空間上のバナッハ空間に拡張できると考えられる．

参考文献

[1] K. deLeeuw; I. Glicksberg, The decomposition of certain group representations, J. Analyse Math. 15 (1965), 135 - 192.

[2] Y. Iwata, Constrictive Markov operators induced by Markov processes, Positivity. 20 (2016), 355–367.

[3] J. Komornik; A. Lasota, Asymptotic decomposition of Markov operators, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987), no.5 - 6, 321 - 327.

[4] A. Lasota; T.Y. Li; J.A. Yorke, Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators, Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 751 - 764.

[5] A. Lasota; M.C. Mackey, Chaos, fractals, and noise. Stochastic aspects of dynamics, Second edition. Applied Mathematical Sciences, 97. Springer-Verlag, New York, (1994).

[6] Sine. R, Constricted systems. Rocky Mountain J. Math. **21**, no. 4, 1373–1383(1991)