UPPER TAIL LARGE DEVIATIONS FOR A CLASS OF DISTRIBUTIONS IN FIRST-PASSAGE PERCOLATION

Clément Cosco and Shuta Nakajima

Abstract. 本稿では, 2020 年 12 月 21 日から 24 日に行われた研究集会 「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに, First-pssage percolation における上尾大偏差原理について, 概要を述べる.

1. Introduction

First-passage percolation は Hammersley と Welsh により 1965 年に導入されたランダム媒質中の流体の流れを記述するモデルである. モデルは次のように定義される. 隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す. 各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には, その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする. また, $\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $\mathrm{T}(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する. さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を次で定義する:

$$\mathrm{T}(x,y) := \inf\{\mathrm{T}(\pi) : \ \pi \text{は } x \text{ から } y \text{ への路}\}.$$

また, $x, y \in \mathbb{R}^d$ については, $\mathrm{T}(x,y) = \mathrm{T}(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$ により定義する. ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数である.

Kingman の劣加法エルゴード定理より, $\mathbb{E}\tau_e < \infty$ であれば, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ について, ある $\mu(x) \geq 0$ が存在し, 次が成り立つ:

$$\mu(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathrm{T}(0, nx) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbb{E}[\mathrm{T}(0,nx)] \quad a.s. \tag{1.1}$$

この $\mu(x)$ は time constant と呼ばれる [3]. 上記の定理は最小移動時間 T に関する大数の法則に対応するものである. 従って, 次の問題として中心極限定理及び大偏差原理を調べるのが自然である. この講究録では大偏差原理について扱う.

2. 背景と先行研究

最初の First-passage percolation における大偏差原理の研究は, Kesten [3] によって始まった. 通常の劣加法性を用いて, Kesten は下尾の大偏差について, 次のような結果を得た: 任意の $\xi > 0$ にいて, 次の極限が存在する.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\mathrm{T}(0, n\mathbf{e}_1) < n(\mu(\mathbf{e}_1) - \xi)).$$

一方で, τ_e の有界性の下で, 上尾の大偏差について, Kesten は次を示した:

$$\begin{aligned} -\infty &< \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \log \mathbb{P}(\mathrm{T}(0, n\mathbf{e}_1) > n(\mu(\mathbf{e}_1) + \xi)) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \log \mathbb{P}(\mathrm{T}(0, n\mathbf{e}_1) > n(\mu(\mathbf{e}_1) + \xi)) < 0. \end{aligned}$$

Date: December 25, 2020.
2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K37; secondary 60K35; 82A51; 82D30.
Key words and phrases. random environment, First-passage percolation.

上記の２つの極限が一致するときまとめてレート関数と呼ぶ. 上尾の大偏差のレート関数の存在は長年の未解決問題であったが, 最近, 連続性を仮定した有界分布に対して, [1] で示された. 一方で非有界分布では, 上尾の大偏差のスケーリングが一般に異なる. 異なるスケーリングは, 上尾の大偏差に関するイベントの異なる描像のために現れる. 例えば，有界分布では，上尾の大偏差に関するイベントは全体のランダム環境に依存して決まる．対照的に, 指数分布などの減衰が比較的遅い分布では, 上尾の大偏差に関するイベントは, 始点と終点周辺の配置に大きく依存する．この講究録では, 指数分布を含む一般の Weibull 分布を考える．これらの場合, 始点及び終点の近傍を注意深く調べることで, より詳細な解析が可能となり, レート関数の正確な値を得ることができる.

3. 主結果

ここからは次を仮定する： ある $c_1, c_2, \alpha > 0$ と $r \in (0, \infty]$ が存在して

$$c_1 \exp(-\alpha t^r) \leq \mathbb{P}(\tau_e > t) \leq c_2 \exp(-\alpha t^r).$$

Theorem 1. *Suppose $r \leq 1$. Then for all $\xi > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} \log \mathbb{P}(\mathrm{T}(0, nx) > n(\mu(x) + \xi)) = -2d\alpha\xi^r.$$

次の結果に行く前に, いくつか記号を準備する．サイズ M のボックスを $\mathrm{D}_M = [-M, M]^d$ と書く．次の関数の集合を定義する:

$$\mathcal{C}(M) = \{f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} :\ \forall x \in \mathrm{D}_M^c,\ f(x) \geq 1,\ f(0) = 0\}.$$

次の量が重要な役割を果たす：

$$\lambda_{d,r}(M) = \inf_{f \in \mathcal{C}(M)} \sum_{\langle x,y \rangle \in \mathrm{E}^d} |f(x) - f(y)|^r.$$

ここで $M \to \lambda_{d,r}(M)$ は非増加関数であるので次の極限が存在する:

$$\lambda_{d,r} = \lim_{M\to\infty} \lambda_{d,r}(M).$$

Theorem 2. *Assume that $1 < r < d$. For all $\xi > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} \log \mathbb{P}\left(\mathrm{T}(0, nx) \geq (\mu + \xi)n\right) = -\alpha 2^{1-r} \xi^r \lambda_{d,r} < 0.$$

Theorem 3. *Suppose that $r = d$. For all $\xi > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d\, \lambda_{d,d}(n)} \log \mathbb{P}\left(\mathrm{T}(0, nx) \geq (\mu + \xi)n\right) = -\alpha 2^{1-d}\, \xi^d.$$

Theorem 4. *For $d \geq 2$,*

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{d-1} \lambda_{d,d}(n) = \mathrm{Vol}_{\mathrm{d-1}}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\|_{\frac{d}{d-1}} = 1\right\}\right),$$

where $\mathrm{Vol}_{\mathrm{d-1}}$ is the $d-1$ dimensional volume and $\|x\|_s = (\sum_{i=1}^d |x_i|^s)^{\frac{1}{s}}$.

4. 証明の概略

この節では証明の概略を述べる． 簡単のため $d = 2$ 及び τ_e は指数分布に従う ($\mathbb{P}(\tau_e > t) = e^{-t}$) と仮定する. さらに $x = \mathbf{e}_1$ のときのみを考える．このとき主張は次のようになる:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\mathrm{T}(0, n\mathbf{e}_1) > n(\mu(\mathbf{e}_1) + \xi)) = -4\xi.$$

記法の簡略化のため, $\mathrm{T}(0, n\mathbf{e}_1) = \mathrm{T}_n$ 及び $\mu(\mathbf{e}_1) = \mu$ と書く．さらに $\mathrm{D}_M(x) = x+\mathrm{D}_M$ と書く.

4.1. Lower bound.

次の辺の集合を用意する:

$$E_1 = \{e \in E(\mathbb{Z}^d) :\ 0 \in e\}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > (\mu + \xi)n) \\
&= \mathbb{P}(\forall \eta \in E_1,\, \tau_\eta \geq (\xi + \epsilon)n)\, \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > (\mu + \xi)n |\ \forall \eta \in E_1,\, \tau_\eta \geq (\xi + \epsilon)n) \\
&= e^{-4(\xi+\epsilon)n}\, \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > (\mu + \xi)n |\ \forall \eta \in E_1,\, \tau_\eta \geq (\xi + \epsilon)n).
\end{aligned}$$

ここで右辺の第二項は (1.1) と簡単な計算から 1 に収束することがわかる．従って

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\mathrm{T}(0, n\mathbf{e}_1) > n(\mu(\mathbf{e}_1) + \xi)) \geq -4(\xi + \epsilon),$$

を得る．最後に ϵ を 0 に飛ばすと下の評価が得られる.

4.2. Upper bound.

次の補題が重要な役割を果たす:

Lemma 1 ([2])**.** *For any $\epsilon > 0$, there exist $K \in \mathbb{N}$ and $c > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_{\mathbb{R}\times[-K,K]}(0, n\mathbf{e}_1) \geq (\mu + \epsilon)n\right) \leq \exp\left(-cn\right),$$

where $\mathrm{T}_A(x, y) = \inf_{\gamma\subset A} \mathrm{T}(\gamma)$ and the infimum is taken over all paths from x to y inside $A \subset \mathbb{Z}^d$.

まず, $\epsilon \in (0, \xi)$ を固定し, Lemma 1 が成り立つように $K \in \mathbb{N}$ と $c > 0$ をとる．さらに $M \in \mathbb{N}$ を十分大きくとり固定する．与えられた $v \in \mathbb{Z}$ について, 次のようなスラブとその中の点を考える:

$$\mathbb{S}_v = \mathbb{S}_v(K) = \mathbb{Z} \times (v + [-K, K]),$$

$$v_n^{[1]} = (0, v) \text{ and } v_n^{[2]} = (n, v).$$

ここで点の集合を $\mathrm{B}_{K,M} = 3K\mathbb{Z} \cap [-M, M]$ で定義する．今 $v \in \mathrm{B}_{K,M}$ である限り, $v_n^{[1]} \in \mathrm{D}_M(0)$ 及び $v_n^{[2]} \in \mathrm{D}_M(n\mathbf{e}_1)$ であることに注意する．任意の $v \neq w \in \mathrm{B}_{K,M}$ について, $\mathbb{S}_v$ と $\mathbb{S}_w$ は互いに素であるので, $\mathrm{T}_{\mathbb{S}_v}\left(v_n^{[1]}, v_n^{[2]}\right)$ と $\mathrm{T}_{\mathbb{S}_w}\left(w_n^{[1]}, w_n^{[2]}\right)$ は互いに独立である． さらに任意の $v \in \mathrm{B}_{K,M}$ について, $\mathbb{S}_v$ は適当に平行移動すれば $\mathbb{R} \times [-K, K]$ と一致する．従って, $\sharp\mathrm{B}_{K,M} \geq M/3K$ を用いると, もし M を十分大きく取れば, Lemma 1 より,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\forall v \in \mathrm{B}_{K,M},\ \mathrm{T}_{\mathbb{S}_v}\left(v_n^{[1]}, v_n^{[2]}\right) \geq (\mu + \epsilon)n\right) &\leq \exp\left(-cn^r \sharp\mathrm{B}_{K,M}\right) \\
&\leq \exp\left(-8\xi n\right).
\end{aligned}$$

それ故,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > (\mu+\xi)n) \\
&\le \mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n > (\mu+\xi)n,\ \exists v \in \mathrm{B}_{K,M} \text{ s.t. } \mathrm{T}_{\mathbb{S}_v}\left(v_n^{[1]}, v_n^{[2]}\right) < (\mu+\epsilon)n\right) + \exp\left(-8\xi n\right).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

次の補題は $0 \to v_n^{[1]} \to v_n^{[2]} \to n\mathbf{e}_1$ に沿って T_n の三角不等式を用いると簡単に証明できる.

Lemma 2. *Suppose that* $\mathrm{T}_n > (\mu+\xi)n$ *and that there exists* $v \in \mathrm{B}_{K,M}$ *such that*

$$\mathrm{T}_{\mathbb{S}_v}\left(v_n^{[1]}, v_n^{[2]}\right) < (\mu+\epsilon)n.$$

Then, there exist $x \in \mathrm{D}_M(0)$ *and* $y \in \mathrm{D}_M(n\mathbf{e}_1)$ *such that*

$$\mathrm{T}(0,x) + \mathrm{T}(y, n\mathbf{e}_1) \ge (\xi - \epsilon)n.$$

上の補題を用いると

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n > (\mu+\xi)n,\ \exists v \in \mathrm{B}_{K,M} \text{ s.t. } \mathrm{T}_{\mathbb{S}_v}\left(v_n^{[1]}, v_n^{[2]}\right) < (\mu+\epsilon)n\right) \\
&\le \mathbb{P}(\exists x \in \mathrm{D}_M(0),\ \exists y \in \mathrm{D}_M(n\mathbf{e}_1) \text{ s.t. } \mathrm{T}(0,x) + \mathrm{T}(y, n\mathbf{e}_1) \ge (\xi-\epsilon)n) \\
&\le \sum_{x \in \mathrm{D}_M(0)} \sum_{y \in \mathrm{D}_M(n\mathbf{e}_1)} \mathbb{P}(\mathrm{T}(0,x) + \mathrm{T}(y, n\mathbf{e}_1) \ge (\xi-\epsilon)n).
\end{aligned}$$

右辺の確率を評価するために [3, p 135] にあるような, 0 から x への互いに素な路 $\{r_i^x\}_{i=1}^4 \subset \mathrm{D}_{2M}(0)$ と y から $n\mathbf{e}_1$ への互いに素な路 $\{r_i^y\}_{i=1}^4 \subset \mathrm{D}_{2M}(n\mathbf{e}_1)$ で次を満たすものを考える:

$$\max\{\sharp r_i^z :\ i \in \{1, \cdots, 4\},\ z \in \{x, y\}\} \le 8M.$$

ここで, $\sharp r$ は路 γ の中の辺の数を表す. この時,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\mathrm{T}(0,x) + \mathrm{T}(y, n\mathbf{e}_1) \ge (\xi-\epsilon)n) \\
&\le \mathbb{P}(\forall i \in \{1, \cdots, 4\},\ \mathrm{T}(r_i^x) + \mathrm{T}(r_i^y) \ge (\xi-\epsilon)n) \\
&= \prod_{i=1}^4 \mathbb{P}\left(\sum_{e \in r_i^x \cup r_i^y} \tau_e \ge (\xi-\epsilon)n\right) \\
&\le \exp\left(-4(1-\epsilon)(\xi-\epsilon)n\right),
\end{aligned}$$

ここで, 最後の行は指数マルコフ不等式を使った.

以上をすべて合わせると,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > (\mu+\xi)n) \\
&\le (4M)^4 \exp\left(-4(1-\epsilon)(\xi-\epsilon)n\right) + \exp\left(-8\xi\right) \\
&\le \exp\left(-(4\xi - o_\epsilon(1))n\right),
\end{aligned}$$

ここで $o_\epsilon(1)$ は ϵ と n に依存する正の定数で, $n \to \infty$ の後 $\epsilon \to 0$ としたとき 0 に収束するものである. 従って次を得る:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > (\mu+\xi)n) \le -4\xi.$$

Acknowledgments

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University

References

[1] R. Basu, S. Ganguly, A. Sly, Upper Tail Large Deviations in First Passage Percolation. ArXiv e-print 1712.01255.

[2] Y. Chow, Y. Zhang. Large deviations in first-passage percolation. *Ann. Appl. Probab.* Volume 13, Number 4, pp 1601-1614, 2003. MR 2023891

[3] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In Lecture Notes in Mathematics. vol. 1180, pp 125-264, 1986. MR 0876084

(Shuta Nakajima) University of Basel, Basel, Switzerland
Email address: shuta.nakajima@unibas.ch

(Clément Cosco) Weizmann Institute of Science, Israel
Email address: clement.cosco@gmail.com