テプリッツ系に対する Baxter 型収束定理

広島大学・大学院先進理工系科学研究科　井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University

1　イントロダクション

これは [5] の中のある結果の紹介である．この結果は，定常時系列の予測係数の強い収束性に関するよく知られた定理を，一般のブロック・テプリッツ系の解に対し拡張したものである．

$\mathbb{C}^{m\times n}$ を $m\times n$ の複素行列の全体とする．$\mathbb{C}^d$ は $\mathbb{C}^{d\times 1}$ を表す．I_n を $n\times n$ の単位行列とする．$\mathbb{T} := \{z\in\mathbb{C} : |z| = 1\}$ を，$\mathbb{C}$ の単位円とする．$a\in\mathbb{C}^{m\times n}$ に対し，a^* は，a のエルミート共役を表す．$a\in\mathbb{C}^{d\times d}$ に対し，a のノルム $\|a\|$ を $\|a\| := \sup_{u\in\mathbb{C}^d,|u|\le 1}|au|$ で定める．ここで，$|u| := (\sum_{i=1}^d |u^i|^2)^{1/2}$ は，$u = (u^1,\ldots,u^d)^\top\in\mathbb{C}^d$ のユークリッド・ノルムである．$\ell_1^{d\times d}(\mathbb{N})$ は，$\sum_{k=1}^\infty\|a_k\| < \infty$ を満たす $\mathbb{C}^{d\times d}$-値数列 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ の全体である．

$d\in\mathbb{N}$ に対し，次の (A1)–(A4) を満たす $w : \mathbb{T}\to\mathbb{C}^{d\times d}$ を考える：

(A1) w は，正定値エルミート行列値関数である．

(A2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\|w(e^{i\theta})\|\frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$

(A3) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\gamma(k)\| < \infty$．ここで，

$$\gamma(k) := \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}w(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\in\mathbb{C}^{d\times d},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

(A4) $\min_{z\in\mathbb{T}}\det w(z) > 0.$

我々が扱う問題の背景を述べるために，(A1)–(A4) を満たす $w : \mathbb{T}\to\mathbb{C}^{d\times d}$ をスペクトル密度として，従って γ を自己共分散関数として持つ $\mathbb{C}^d$-値，平均 0 の弱定常過程 $\{X_k : k\in\mathbb{Z}\}$ を考える．すなわち，

$$\gamma(k) = E[X_kX_0^*] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}w(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

$\{X_k\}$ は，確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上に定義されているとする．上の条件 (A3) と (A4) は，$\{X_k\}$ が**短期記憶過程**であるという仮定である（[4] 参照）．

$n\in\mathbb{N}$ と $\ell = 1,\ldots,n$ に対し，$\{X_k\}$ の**有限予測係数** $\phi_{n,\ell}\in\mathbb{C}^{d\times d}$ は，次により定義される：

$$P_{[-n,-1]}X_0 = \sum_{k=1}^{n}\phi_{n,k}X_{-k}.$$

ここで，有限予測子 $P_{[-n,-1]}X_0$ は，X_0 の各成分を，$X_{-1},\dots,X_{-n}$ の成分たちが張る $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ の線形部分空間へ正射影したものである．同様に，$\ell\in\mathbb{N}$ に対し，$\{X_k\}$ の**無限予測係数** $\phi_\ell\in\mathbb{C}^{d\times d}$ は，次により定義される：

$$P_{(-\infty,-1]}X_0=\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k X_{-k}.$$

ここで，無限予測子 $P_{(-\infty,-1]}X_0$ は，X_0 の各成分を，$X_{-1},X_{-2},\dots$ の成分たちが張る $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ の線形閉部分空間へ正射影したものである．仮定 (A1)–(A4) により，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\phi_k\|<\infty$$

が成り立つことを注意せよ．

次の定理が知られている．

定理 1 (Baxter [1], Hannan–Deistler [3], Cheng–Pourahmadi [2])**.** d-変量定常時系列 $\{X_k\}$ に対し，(A1)–(A4) を仮定する．すると，ある $K\in(0,\infty)$ が存在し，次の不等式が成り立つ：

$$\sum_{j=k}^{n}\|\phi_{n,k}-\phi_k\|\le K\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\phi_k\|,\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.1}$$

特に，次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|\phi_{n,k}-\phi_k\|=0. \tag{1.2}$$

(1.1) の不等式は，**Baxter の不等式**とよばれている．(1.2) の収束の結果は，時系列に対する AR ふるいブートストラップや自己回帰 (AR) モデルのフィッティングおよび対応する AR スペクトル密度の推定等に応用されている．これらについては，[7] やそこに挙げてある文献を参照せよ．尚，(1.1) 従って (1.2) は，長期記憶過程のあるクラスに対しても成り立つことが分かっている．1 変量長期記憶過程の場合は [6] を，多変量長期記憶過程の場合は [7] を，それぞれ見よ．

上の定理 1 を次節で述べる我々の結果と関連付けるために，有限および無限予測係数とテプリッツ系との関係を述べる．$T_n(w)$ は，w をシンボルとする次の有限ブロック・テプリッツ行列とする：

$$T_n(w):=\begin{pmatrix}\gamma(0)&\gamma(-1)&\cdots&\gamma(-n+1)\\ \gamma(1)&\gamma(0)&\cdots&\gamma(-n+2)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \gamma(n-1)&\gamma(n-2)&\cdots&\gamma(0)\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{dn\times dn},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.3}$$

また，$T_\infty(w)$ は，w をシンボルとする次の無限ブロック・テプリッツ行列とする：

$$T_\infty(w):=\begin{pmatrix}\gamma(0)&\gamma(-1)&\gamma(-2)&\cdots\\ \gamma(1)&\gamma(0)&\gamma(-1)&\cdots\\ \gamma(2)&\gamma(1)&\gamma(0)&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

今，d-変量定常時系列 $\{X_k\}$ のスペクトル密度 w に対し，

$$\tilde{w}(e^{\imath\theta}) := w(e^{-i\theta}) \tag{1.5}$$

とおくと，有限予測係数 $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n}$ は，**Yule–Walker 方程式**とよばれる次のブロック・テプリッツ系の解である：

$$T_n(\tilde{w})(\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,n})^* = (\gamma(1), \ldots, \gamma(n))^*. \tag{1.6}$$

ここで，$T_n(w)$ の定義 (1.3) より，

$$T_n(\tilde{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(-1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(-n+1) & \gamma(-n+2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dn\times dn}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

であることを注意せよ．一方，無限予測係数列 $(\phi_1, \phi_2, \ldots)$ は，次の無限ブロック・テプリッツ系の解である：

$$T_\infty(\tilde{w})(\phi_1, \phi_2, \ldots)^* = (\gamma(1), \gamma(2), \ldots)^*. \tag{1.7}$$

ここで，$T_\infty(w)$ の定義 (1.4) より，

$$T_\infty(\tilde{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \cdots \\ \gamma(-1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots \\ \gamma(-2) & \gamma(-1) & \gamma(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

2　結果

次が，ここで紹介する [5] の結果である．

定理 2 ([5]). (A1)–(A4) を仮定し，$n \in \mathbb{N}$ と $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1^{d\times d}(\mathbb{N})$ に対し，$Z_n = (z_{n,1}^\top, \ldots, z_{n,n}^\top)^\top \in \mathbb{C}^{dn\times d}$ を次の有限ブロック・テプリッツ系の解とする：

$$T_n(w)Z_n = R_n.$$

ここで，$R_n := (r_1^\top, \ldots, r_n^\top)^\top \in \mathbb{C}^{dn\times d}$ とおいた．また，

$$Z_\infty = (z_1^\top, z_2^\top, \ldots)^\top \ \text{ with } \ z_k \in \mathbb{C}^{d\times d},\ k \in \{1, \ldots, n\},$$

を，次の対応する無限ブロック・テプリッツ系の解とする：

$$T_\infty(w)Z_\infty = R_\infty.$$

ここで，$R_\infty := (r_1^\top, r_2^\top, \ldots)^\top$ とおいた．すると，次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|z_{n,k} - z_k\| = 0.$$

w が (A1)–(A4) を満たすことと，(1.5) の $\tilde{w}$ が (A1)–(A4) を満たすことは同値であるので，定理 1 の後半の (1.2) は定理 2 の特別な場合と見ることができる．すなわち，定理 2 は，定理 1 の後半の (1.2) を，Yule–Walker 方程式とは限らない一般のブロック・テプリッツ系に拡張したものとなっている．

謝辞　This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] G. Baxter, An asymptotic result for the finite predictor, *Math. Scand.* **10** (1962), 137–144.

[2] R. Cheng and M. Pourahmadi, Baxter's inequality and convergence of finite predictors of multivariate stochastic processes, *Probab. Theory Related Fields* **95** (1993), 115–124.

[3] E. J. Hannan and M. Deistler, *The Statistical Theory of Linear Systems*, Wiley, New York, 1988.

[4] A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with applications, *Probab. Theory Related Fields* **140** (2008), 523–551.

[5] A. Inoue, Explicit formulas for the inverses of block Toeplitz matrices, with applications, preprint.

[6] A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, *Ann. Statist.* **34** (2006), 973–993.

[7] A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes, *Bernoulli* **3** (2018), 1202–1232.