A bridge between elliptic and parabolic Harnack inequalities*

梶野　直孝 [†] （神戸大学理学研究科）
Naotaka Kajino (Graduate School of Science, Kobe University)
Mathav Murugan 氏 [‡] (University of British Columbia) との共同研究

1　結果の概要および研究の背景と経緯

本稿の目的は [12] の主結果を手短に紹介することである．[12] の主題は，**Dirichlet 測度距離空間** *(metric measure Dirichlet (MMD) space)* $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, すなわち強局所的な正則対称 Dirichlet 形式 $(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$（で X が少なくとも 2 つの元を有するもの）と X の位相に適合した X 上の距離 d で任意の $(x, r) \in X \times (0, \infty)$ に対し $B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ が X において相対コンパクト（閉包がコンパクト）であるものの組，に対して定義される次の値である．

定義 1.1 (等角 walk 次元，[12, Definition 1.2])**.** $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ の**等角 walk 次元** *(conformal walk dimension)* $d_{\mathrm{cw}}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in [1, \infty]$ を次で定める（ただし $\inf \emptyset := \infty$）：

$$d_{\mathrm{cw}}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) := \inf\left\{\beta \;\middle|\; \begin{array}{l} \beta \in (1, \infty),\ \theta \in \mathcal{J}(X, d) \text{ と } \mu \in \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \\ \text{が存在して } (X, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu}) \text{ は } \mathrm{PHI}(\beta) \text{ を満たす} \end{array}\right\}. \tag{1.1}$$

ここで $\mathrm{PHI}(\beta)$ は **walk 次元** *(walk dimension)* β の**放物型 Harnack 不等式** *(parabolic Harnack inequality)*（定義 2.6-(2)）を意味し，$\mathcal{J}(X, d)$ は d に**擬対称** *(quasisymmetric)*（定義 2.1）な X 上の距離全体の集合を，$\mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$（定義 2.4-(3)）は $\mathcal{E}$-容量 0 の任意の Borel 集合の測度が 0 かつ X を $\mathcal{E}$-quasi-support に持つ X 上の Radon 測度全体の集合を表す．$\mathcal{J}(X, d)$ は d から各 $\theta \in \mathcal{J}(X, d)$ への距離の変更が**楕円型 Harnack 不等式** *(elliptic Harnack inequality)* EHI（定義 2.6-(1)）の成立を保存するという点で重要であり，$\mu \in \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ とは μ が「$\mathcal{E}$ が $\mathcal{F} \cap C_{\mathrm{c}}(X)$ を core に持つ $L^2(X, \mu)$ 上の正則対称 Dirichlet 形式になる」[1] ような X 上の Radon 測度であることを意味する（(1.1) の

*This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
†Naotaka Kajino was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number JP17H02849.
‡Mathav Murugan was supported in part by NSERC and the Canada research chairs program.
[1] ただし $C_{\mathrm{c}}(X) := \{u : X \to \mathbb{R} \mid u \text{ は連続，} u^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ の } X \text{ における閉包はコンパクト}\}$.

$\mathcal{F}^{\mu}$ はこの $L^2(X,\mu)$ 上の正則対称 Dirichlet 形式の定義域を表す）．従って (1.1) は「距離を $\theta \in \mathcal{J}(X,d)$ の，参照測度を $\mu \in \mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ の範疇で適切に変更することにより，できるだけ小さい $\beta \in (1,\infty)$ に対する PHI(β) を $(X,\mathcal{E},\mathcal{F})$ に満たさせようとしている」と解釈することができる．なお (1.1) では PHI(β) の成立を通して等角 walk 次元を定義したが，次の定理 1.2 に述べるように PHI(β) の成立は体積倍化条件 VD および walk 次元 β の熱核評価 HKE(β) の成立と同値であるので，(1.1) の右辺の β の集合は「PHI(β)」を「VD と HKE(β)」で置き換えても同じ集合になることを注意しておく．

定理 1.2 ([4, Theorem 3.1]; [12, Proof of Theorem 4.5] も参照)**.** $\beta \in (1,\infty)$ とする．このとき $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ が PHI(β) を満たすことは $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ が次の**体積倍化条件** VD および walk 次元 β の**熱核評価** HKE(β) を満たすことと同値である：$c_{\mathrm{v}} \in (0,\infty)$ が存在して任意の $(x,r) \in X \times (0,\infty)$ に対し

$$m(B_d(x,2r)) \leq c_{\mathrm{v}} m(B_d(x,r)), \tag{VD}$$

かつ $(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ の連続な熱核 $p = p_t(x,y) : (0,\infty)\times X\times X \to \mathbb{R}$ と $c_6, c_7, c_8, c_9 \in (0,\infty)$ が存在して任意の $(t,x,y) \in (0,\infty) \times X \times X$ に対し

$$\frac{c_6 \mathbb{1}_{[0,c_7]}\bigl(d(x,y)^{\beta}/t\bigr)}{m(B_d(x,t^{1/\beta}))} \leq p_t(x,y) \leq \frac{c_8 \exp\bigl(-c_9\bigl(d(x,y)^{\beta}/t\bigr)^{\frac{1}{\beta-1}}\bigr)}{m(B_d(x,t^{1/\beta}))}. \tag{HKE(β)}$$

また $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が強局所的な対称 Dirichlet 形式と仮定していることの帰結として，$\beta \in (1,\infty)$ で $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ が VD および HKE(β) を満たすならば $\beta \geq 2$ でなければならないことがよく知られており（例えば [1, Theorem 2.7 and Proposition 5.1], もしくは [9, Theorem 1.2] と [12, Theorem 1.6] より分かる），従って

$$d_{\mathrm{cw}}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F}) \in [2,\infty]. \tag{1.2}$$

(1.1) で定義される $d_{\mathrm{cw}}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ を調べるという問題意識は，木上 [13, 15] による**調和 Sierpiński gasket** $K_{\mathcal{H}}$（図 1 右）の導入とその上での解析学の研究に端を発する．これは $V_0 = \{q_1,q_2,q_3\} \subset \mathbb{R}^2$ を 3 頂点とする Sierpiński gasket K（図 1 左）とその上の標準 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を考え，$K \setminus V_0$ 上で $\mathcal{E}$-調和な写像 $\Phi = (h_1,h_2) : K \to \mathbb{R}^2$, すなわち $K \setminus V_0$ 上で $\mathcal{E}$-調和（定義 2.5-(1) 参照）な $h_1,h_2 \in \mathcal{F}$（で $\mathcal{E}(h_1,h_1) = \mathcal{E}(h_2,h_2) = 1$, $\mathcal{E}(h_1,h_2) = 0$ を満たすもの）を成分に持つ K から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 Φ により K を写すことで得られるフラクタルである．木上はまず [13, Theorem 3.6] において Φ が単射，従って K から像 $K_{\mathcal{H}} = \Phi(K)$ への同相写像であることを示し，さらに [15] において

$$\rho(x,y) := \inf\{\mathrm{Length}_{\mathbb{R}^2}(\Phi\circ\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to K,\ \gamma \text{ は連続，} \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}, \tag{1.3}$$
$$\nu := \mu_{\langle h_1\rangle} + \mu_{\langle h_2\rangle} \tag{1.4}$$

により Dirichlet 測度距離空間 $(K,\rho,\nu,\mathcal{E},\mathcal{F})$ が定義でき VD と HKE(2) が成り立つことを示した．ここで $\mathrm{Length}_{\mathbb{R}^2}(\Phi\circ\gamma)$ は連続写像 $\Phi\circ\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ の Euclid 距離に

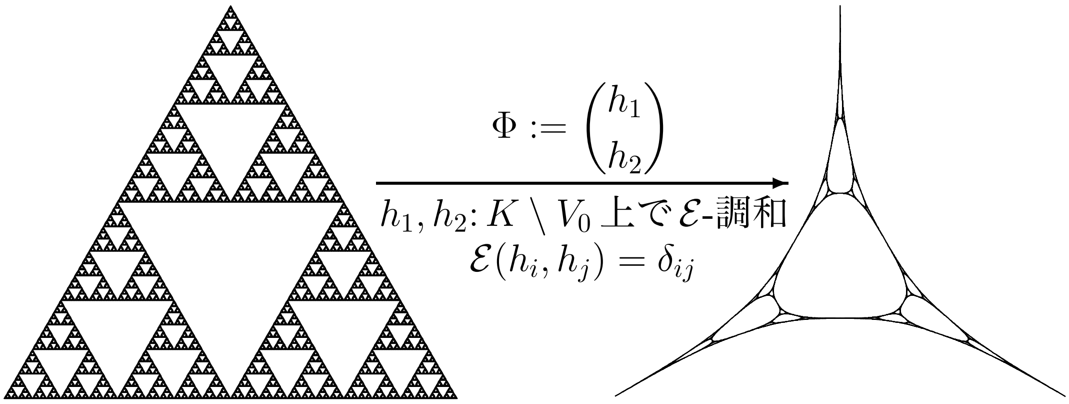

図 1: Sierpiński gasket と調和 Sierpiński gasket

関する長さを表し，$\mu_{\langle u \rangle}$ は Riemann 多様体における $|\nabla u|^2\, d\,\mathrm{vol}$ に相当する役割を果たす K 上の（非負）有限 Borel 測度であり $u \in \mathcal{F}$ の $\mathcal{E}$-エネルギー測度 (energy measure)（[8, (3.2.13), (3.2.14) and (3.2.15)] 参照）と呼ばれる．[15] では (1.1) との関連は明示されていないが，d_{Euc} を K 上の Euclid 距離，m_{unif} を K 上の一様分布（(K, d_{Euc}) 上の $(\log_2 3)$ 次元 Hausdorff 測度を確率測度に規格化したもの）とするとき，[15, Lemma 3.5, Proof of Theorem 3.2, and Theorem 5.11] を距離の擬対称性に関する一般論である [16, Proposition 6.8 and Theorem 13.6] と組み合わせることで $\rho \in \mathcal{J}(K, d_{\mathrm{Euc}})$ が分かる．またこの場合，$\mathcal{F} \subset C(K)$ かつ $c \in (0, \infty)$ が存在して任意の $u \in \mathcal{F}$ と任意の $x, y \in K$ に対し $|u(x) - u(y)|^2 \leq c\mathcal{E}(u, u)$ であることもよく知られており（例えば [14, Theorem 3.3.4] を参照），このことから容易に

$$\mathcal{A}(K, m_{\mathrm{unif}}, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \{\mu \mid \mu \text{ は } K \text{ を台とする } K \text{ 上の Radon 測度}\}, \tag{1.5}$$

従って $\nu \in \mathcal{A}(K, m_{\mathrm{unif}}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ であることも分かる．すなわち，Sierpiński gasket K 上の Brown 運動に対応する Dirichlet 測度距離空間 $(K, d_{\mathrm{Euc}}, m_{\mathrm{unif}}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ の等角 walk 次元は 2 であり，かつ $(K, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ が PHI(2) を満たすような $(\theta, \mu) \in \mathcal{J}(K, d_{\mathrm{Euc}}) \times \mathcal{A}(K, m_{\mathrm{unif}}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ として (ρ, ν) が取れる．

上述したように d から $\theta \in \mathcal{J}(X, d)$ への距離の変更の下で EHI の成立は保存され，また $\beta \in (2, \infty)$ に対する PHI(β) からは得られない様々な良い性質が PHI(2) からは導かれることが知られている（例えば [12, Proposition 2.11], および [11, Section 4] とその引用文献を参照）．従って，上記の Sierpiński gasket の場合のように $(X, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ が PHI(2) を満たすような $(\theta, \mu) \in \mathcal{J}(X, d) \times \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ を取ることがもし EHI を満たす任意の Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対して可能ならば，EHI に関する解析を行う際には PHI(2) の帰結として得られる様々なよい性質を常に仮定してもよいことになり多くの応用があることが期待される．この期待は 2017 年 7 月に筆者が Murugan 氏を訪問した際に氏から伺ったものであるが，筆者の感覚ではそのようなことが一般の Dirichlet 測度距離空間に対して可能とは思えず，その後数日 Murugan 氏と議論を重ねた結果として分かったのが次の事実である：

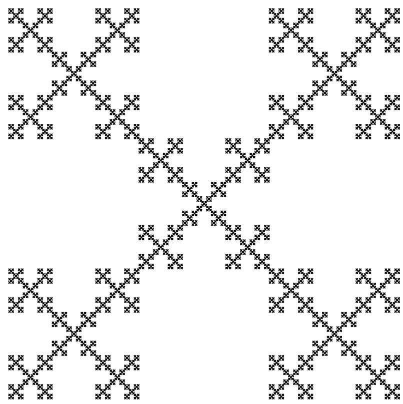

図 2: The Vicsek set

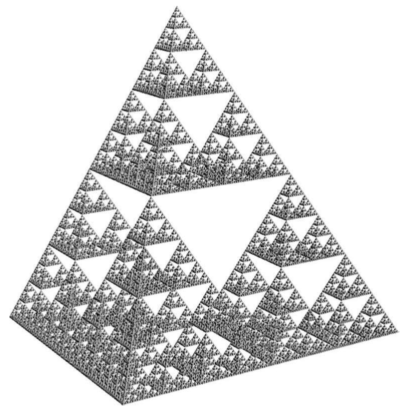

図 3: 3 次元 Sierpiński gasket

命題 1.3 ([12, Subsubsection 6.3.1])**.** $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ を Vicsek set（図 2）に Euclid 距離・一様分布・標準的な自己相似 Dirichlet 形式を備えて得られる Dirichlet 測度距離空間とするとき，どの $(\theta, \mu) \in \mathcal{J}(X, d) \times \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対しても $(X, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ は PHI(2) を満たさない．

上の 2 つの例が示す通り，$(X, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ が PHI(2) を満たすような $(\theta, \mu) \in \mathcal{J}(X, d) \times \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ は存在するとは限らず，存在するかどうかは個々の Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に依存する．この観察を踏まえ，与えられた Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対し「ある $(\theta, \mu) \in \mathcal{J}(X, d) \times \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対し $(X, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ が PHI(β) を満たすような $\beta \in [2, \infty)$ を一般にどこまで小さくできるか」を 1 つの値として定式化したものが定義 1.1 の等角 walk 次元 $d_{\mathrm{cw}}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ である．結論としてはこの値は有限ならば常に 2 であることが証明でき，これが [12] の第 1 の主結果である：

定理 1.4 ([12, Theorem 2.10])**.** 任意の Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対し

$$d_{\mathrm{cw}}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \{2, \infty\}. \tag{1.6}$$

先述の 2 つの例と定理 1.4 からはさらに次の問題が自然に考えられる．

定義 1.5. Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対し $\mathcal{G}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ を次で定める：

$$\mathcal{G}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) := \left\{ (\theta, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta \in \mathcal{J}(X, d),\ \mu \in \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}), \\ (X, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu}) \text{ は PHI(2) を満たす} \end{array} \right\}. \tag{1.7}$$

問題 1.6. 与えられた Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ が $\mathcal{G}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ を満たすための分かりやすい（必要/十分）条件を与えよ．また（フラクタル的な）Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ の具体例に対し $\mathcal{G}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ かどうかを判定せよ．

問題 1.7. $\mathcal{G}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ を満たす Dirichlet 測度距離空間 $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対し，集合 $\mathcal{G}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ の簡明な記述を与えよ，すなわち $(\theta, \mu) \in \mathcal{J}(X, d) \times \mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ が $\mathcal{G}(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に属するための分かりやすい（必要/十分）条件を与えよ．

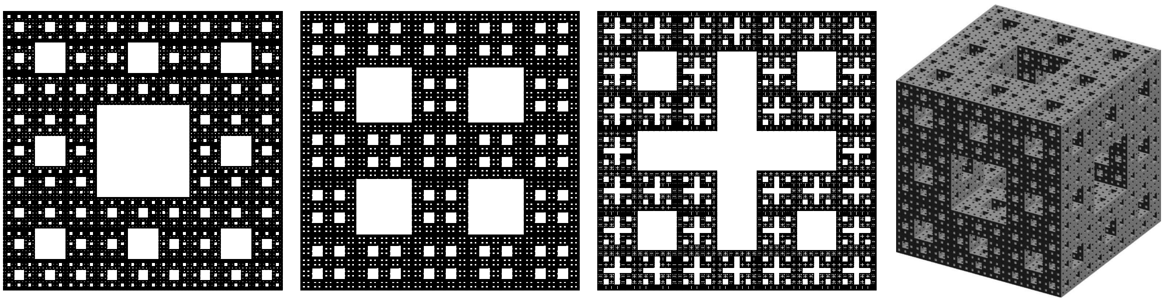

図 4: Sierpiński carpet, 2 次元 generalized Sierpiński carpets および Menger sponge

[12] の後半部の主結果は問題 1.6 と問題 1.7 に対する部分的な解答である．具体的には，まず [12, Section 5] では一般の Dirichlet 測度距離空間 $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ の設定で (θ,μ) が $\mathcal{G}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ に属するための必要条件を与え，N 次元 Brown 運動に対応する Dirichlet 測度距離空間の場合には $N=1$ ならばこれが十分条件でもあること，$N\geq 2$ ならばこれは十分条件ではないこと，などを証明している．続いて [12, Section 6] では，N 次元 Sierpiński gasket（図 1 左，図 3）や Vicsek set（図 2）をはじめとする p.-c.f. 自己相似集合，および generalized Sierpiński carpets（図 4）の上の自己相似 Dirichlet 形式から定まる $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ の場合に，$\mathcal{G}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})\neq\emptyset$ であるためには $\theta\in\mathcal{J}(X,d)$ および $X\setminus V_0(X)$ 上で $\mathcal{E}$-調和な $h\in\mathcal{F}$ が存在して $(\theta,\mu_{\langle h\rangle})\in\mathcal{G}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ となることが必要であることを証明している．(ここで $V_0(X)$ は X の自己相似集合としての細胞分割における細胞同士の共通部分の元のスケールへの引き戻しの和として定義される X の「標準境界」を表し，また上述の通り $\mu_{\langle u\rangle}$ は $u\in\mathcal{F}$ の $\mathcal{E}$-エネルギー測度を表す.）特に X が Vicsek set の場合は，$X\setminus V_0(X)$ 上で $\mathcal{E}$-調和な任意の $h\in\mathcal{F}$ に対し h は X を囲む正方形の対角線の和の補集合上で局所定数であることが X の tree 構造から直ちに分かり，特に $\mu_{\langle h\rangle}$ の台は対角線の和に含まれ X 全体に一致しないため θ をどのように取ろうとも $(\theta,\mu_{\langle h\rangle})\in\mathcal{G}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ は成立せず，ゆえに $\mathcal{G}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})=\emptyset$ となり命題 1.3 が得られる．X が $N\geq 3$ に対する N 次元 Sierpiński gasket（図 3）の場合も，$X\setminus V_0(X)$ 上で $\mathcal{E}$-調和な任意の $h\in\mathcal{F}$ に対し θ をどのように取っても $(\theta,\mu_{\langle h\rangle})\in\mathcal{G}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ が成り立たないことが（その証明は Vicsek set の場合よりもはるかに非自明であるが）やはり証明でき，従ってこの場合も $\mathcal{G}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})=\emptyset$ であることが分かる．

以上が [12] の研究の背景および主結果の概要である．次節では上記の解説に現れた諸概念の定義や関連する基本的事実の正確な記述，および定理 1.4 の証明の方針のごく簡単な説明を与える．問題 1.6 と問題 1.7 に関する結果の正確な記述は紙数の都合で割愛せざるを得ないが，詳細に興味がおありの方は問題 1.7 については [12, Section 5] を，問題 1.6 については [12, Section 6] および拙著 [10, Sections 4 and 5] を参照されたい．

2　諸概念の定義と基本的事実

本節を通して $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ を Dirichlet 測度距離空間とする．本節では，前節で定義するのを保留していた $\mathcal{J}(X,d)$, $\mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathrm{PHI}(\beta)$, EHI の正確な定義を与え，

関連する諸概念や基本的事実を紹介する．まず $\mathcal{J}(X,d)$ の定義から始めよう．

定義 2.1 (擬対称な (quasisymmetric) 距離)．θ を X 上の距離関数とする．$\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が同相写像で $x \neq z$ なる任意の $x,y,z \in X$ に対し

$$\frac{\theta(x,y)}{\theta(x,z)} \leq \eta\left(\frac{d(x,y)}{d(x,z)}\right) \tag{2.1}$$

が成り立つとき，θ は d に η-**擬対称** *(η-quasisymmetric)* であるといい，この関係を $\theta \overset{\eta\text{-qs}}{\sim} d$ と表記する．ある同相写像 $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ に対し $\theta \overset{\eta\text{-qs}}{\sim} d$ であるとき θ は d に**擬対称** *(quasisymmetric)* であるといい，この関係を $\theta \overset{\text{qs}}{\sim} d$ と表記する．さらに $\mathcal{J}(X,d)$ を

$$\mathcal{J}(X,d) := \{\theta \mid \theta \text{ は } X \text{ 上の距離関数，} \theta \overset{\text{qs}}{\sim} d\} \tag{2.2}$$

で定める．

定義 2.1 から容易に，各 $\theta \in \mathcal{J}(X,d)$ が d と同じ位相を定めること，次の命題の成立，従って $\overset{\text{qs}}{\sim}$ が X 上の距離関数全体の集合における同値関係であること，が確認できる．

命題 2.2 (Cf. [18, Lemma 1.2.18], [12, Proposition 3.2-(a)])．$\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を同相写像とし，同相写像 $\widetilde{\eta} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を $\widetilde{\eta}(t) := 1/\eta^{-1}(1/t)$ ($\widetilde{\eta}(0) := 0$) で定める．このとき X 上の距離関数 θ に対し次の 3 条件は互いに同値である：
(1) $\theta \overset{\eta\text{-qs}}{\sim} d$.
(2) $d \overset{\widetilde{\eta}\text{-qs}}{\sim} \theta$.
(3) 任意の $x \in X$ と任意の $r, A \in (0,\infty)$ に対し $s \in (0,\infty)$ が存在して

$$B_\theta(x,s) \subset B_d(x,r) \qquad \text{かつ} \qquad B_d(x,Ar) \subset B_\theta(x,\eta(A)s).$$

次に $\mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ の定義およびその背景にある Dirichlet 形式の一般論を述べる．(1.1) で考えたような「Dirichlet 空間の参照測度の m から μ への変更」は Dirichlet 形式の一般論において**時間変更**として知られているものである[2]が，そのような操作の実行のためにはまず Dirichlet 形式の定義域 $\mathcal{F}$ から 2 乗 m-可積分性の制約を取り除く形で $\mathcal{F}$ を適切に拡張する必要がある．その「拡張」の役割を果たすのが次に定義する拡大 Dirichlet 空間である．

定義 2.3 (拡大 Dirichlet 空間)．$(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**拡大 Dirichlet 空間** *(extended Dirichlet space)* $\mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ を次で定義する：

$$\mathcal{F}_{\mathrm{e}} := \left\{ u \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ は } X \text{ 上の } \mathbb{R}\text{-値 Borel 可測関数の } m\text{-同値類，} \\ \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \text{ で } \lim_{j\wedge k\to\infty} \mathcal{E}(u_j - u_k, u_j - u_k) = 0 \\ \text{を満たすものが存在して } u = \lim_{n\to\infty} u_n \ m\text{-a.e.} \end{array} \right\}. \tag{2.3}$$

[2]「時間」変更という名称は，「参照測度変更後の Dirichlet 空間に対応する確率過程は，μ を Revuz 測度とする正値連続加法汎関数の右連続逆関数による元の確率過程の時間変更で与えられる」という事実 ([8, Theorem 6.2.1], [7, Theorem 5.2.2]) に由来する．

さらに各 $u, v \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ に対し (2.3) のような $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ を取ると $\{\mathcal{E}(u_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は u, v のみに依存して定まり $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方に依存しない値 $\mathcal{E}(u,v) \in \mathbb{R}$ に収束し ([7, Theorem 1.1.5-(i)]), これにより元の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ の拡張であるような非負定値対称双線型形式 $\mathcal{E} : \mathcal{F}_{\mathrm{e}} \times \mathcal{F}_{\mathrm{e}} \to \mathbb{R}$ が定義される．またこのとき任意の $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ に対し $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ かつ $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u,u)$ ([7, Theorem 1.1.5-(ii)]), $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{e}} \cap L^2(X,m)$ ([7, Theorem 1.1.5-(iii)]) が成り立つ．

次に正則対称 Dirichlet 形式のポテンシャル論からの基本概念を必要な範囲で導入する（詳細は [8, Section 2.1], [7, Sections 1.2, 1.3 and 2.3] を参照）．$\mathrm{Cap}_1^{\mathcal{E},m}$ を $(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ から定まる 1-容量とし，“$\mathcal{E}$-q.e.” は「$\mathrm{Cap}_1^{\mathcal{E},m}(N) = 0$ なるある $N \subset X$ の補集合上で」を意味するものとする．さらに各 $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ に対しその任意の $\mathcal{E}$-準連続 ($\mathcal{E}$-quasi-continuous) な m-変形（これは [8, Theorem 2.1.7] により存在し [8, Lemma 2.1.4] により $\mathcal{E}$-q.e. で一意的に定まる）を $\widetilde{u}$ で表す．また X の Borel σ-加法族を $\mathcal{B}(X)$ で表す．

定義 2.4. (1) $U \subset X$ が，任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し X の開集合 V が存在して $U \subset V$ かつ $\mathrm{Cap}_1^{\mathcal{E},m}(V \setminus U) < \varepsilon$ を満たすとき，U は **$\mathcal{E}$-準開** (*$\mathcal{E}$-quasi-open*) であるという．

(2) μ は X 上の Borel 測度で $\mathrm{Cap}_1^{\mathcal{E},m}(N) = 0$ なる任意の $N \in \mathcal{B}(X)$ に対し $\mu(N) = 0$ を満たすとする．$\mu(U) = 0$ なる任意の $\mathcal{E}$-準開な $U \in \mathcal{B}(X)$ に対し $\mathrm{Cap}_1^{\mathcal{E},m}(U) = 0$ が成り立つとき，μ は X **を $\mathcal{E}$-quasi-support に持つ**という．

(3) $\mathcal{A}(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ を

$$\mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F}) := \left\{ \mu \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu \text{ は } X \text{ 上の Radon 測度，} \mathrm{Cap}_1^{\mathcal{E},m}(N) = 0 \text{ なる任意の } N \in \\ \mathcal{B}(X) \text{ に対し } \mu(N) = 0,\ \mu \text{ は } X \text{ を } \mathcal{E}\text{-quasi-support に持つ} \end{array} \right\}$$

で定め，さらに $\mu \in \mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対し $\mathcal{F}^{\mu} := \bigl\{ u \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}} \bigm| \int_X \widetilde{u}^2 \, d\mu < \infty \bigr\}$ とおく．

$\mu \in \mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ とする．このとき [8, Theorem 4.6.2]（もしくは [7, Theorem 3.3.5]）により $u, v \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ で $\widetilde{u} = \widetilde{v}$ μ-a.e. ならば $u = v$ であり，特に $\mathcal{F}^{\mu} \ni u \mapsto \widetilde{u} \in L^2(X,\mu)$ は単射であるのでこの単射を通して $\mathcal{F}^{\mu}$ は自然に $L^2(X,\mu)$ の部分空間とみなされる．さらに [7, Corollary 5.2.10 and (5.2.17)] により $(X, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ は $L^2(X,\mu)$ 上の正則対称 Dirichlet 形式であり，[7, Theorem 5.2.11 and Corollary 5.1.12] により $(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ に関する各 $\mathcal{E}$-quasi-notion（例えば $\mathcal{F}_{\mathrm{e}}$, $\{N \subset X \mid \mathrm{Cap}_1^{\mathcal{E},m}(N) = 0\}$ や関数の $\mathcal{E}$-準連続性，集合の $\mathcal{E}$-準開性の概念など）は $(X, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ に関する対応する $\mathcal{E}$-quasi-notion と一致する．また [8, Exercise 3.1.1] により $(X, m, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ は強局所的であり，ゆえに任意の $\theta \in \mathcal{J}(X,d)$ に対し（命題 2.2 により任意の $(x,r) \in X \times (0,\infty)$ に対し $s \in (0,\infty)$ が存在して $B_{\theta}(x,r) \subset B_d(x,s)$, 従って $B_{\theta}(x,r)$ は X において相対コンパクトであることにも注意すると）$(X, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^{\mu})$ は Dirichlet 測度距離空間になる．

最後に EHI および PHI(β) の定義を述べる．まず関数が調和（Laplace 方程式の解）もしくは caloric（「時空調和」；熱方程式の解）であることの正確な定義を与えよう．

定義 2.5 ($\mathcal{E}$-調和関数，$(m,\mathcal{E})$-caloric な関数)**.** U を X の開集合とする．

(1) $h \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ とする．$v^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ が U の相対コンパクトな部分集合であるような任意の $v \in \mathcal{F} \cap C_{\mathrm{c}}(X)$ に対し $\mathcal{E}(h, v) = 0$ が成り立つとき，h は U 上で **$\mathcal{E}$-調和** *($\mathcal{E}$-harmonic)* であるという．[8, Exercise 1.4.1 and Theorem 2.3.3] により，h が U 上で $\mathcal{E}$-調和であるためには $\widetilde{v}|_{X \setminus U} = 0$ $\mathcal{E}$-q.e. であるような任意の $v \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ に対し $\mathcal{E}(h, v) = 0$ となることが必要十分であることを注意しておく．

(2) ([4, Subsection 2.2]) $a, b \in [-\infty, \infty]$, $a < b$ とし，$u : (a, b) \to \mathcal{F}$ とする．任意の $v \in L^2(U, m)$ に対し $(a, b) \ni t \mapsto \int_X u(t) v \, dm$ は微分可能でありかつ $\widetilde{v}|_{X \setminus U} = 0$ $\mathcal{E}$-q.e. であるような任意の $v \in \mathcal{F}$ と任意の $t \in (a, b)$ に対し $\bigl(\int_X u(\cdot) v \, dm\bigr)'(t) + \mathcal{E}(u(t), v) = 0$ が成り立つとき，u は $(a, b) \times U$ 上で **$(m, \mathcal{E})$-caloric** であるという．

定義 2.6 (楕円型 Harnack 不等式 EHI, 放物型 Harnack 不等式 PHI)．(1) $c_0 \in (1, \infty)$ と $\delta \in (0, 1)$ が存在して次が成り立つとき，$(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ は **楕円型 Harnack 不等式** *(elliptic Harnack inequality)* EHI を満たすという：任意の $(x, r) \in X \times (0, \infty)$ と $B_d(x, r)$ 上で $\mathcal{E}$-調和かつ $h \geq 0$ m-a.e. を満たす任意の $h \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ について

$$m\text{-a.e. } y, z \in B_d(x, \delta r) \text{ に対し} \qquad h(y) \leq c_0 h(z). \tag{2.4}$$

[8, Lemma 2.1.4] により，「$h \geq 0$ m-a.e.」は「$\widetilde{h} \geq 0$ $\mathcal{E}$-q.e.」と，(2.4) は「$\mathcal{E}$-q.e. $y, z \in B_d(x, \delta r)$ に対し $\widetilde{h}(y) \leq c_0 \widetilde{h}(z)$」とそれぞれ同値であることを注意しておく．

(2) $\beta \in (1, \infty)$ とする．$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \delta \in (0, \infty)$ で $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ と $c_5 > 1 > \delta$ を満たすものが存在して次が成り立つとき，$(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ は **walk 次元** *(walk dimension)* β の **放物型 Harnack 不等式** *(parabolic Harnack inequality)* PHI(β) を満たすという：任意の $(x, r) \in X \times (0, \infty)$ と $(0, c_4 r^\beta) \times B_d(x, r)$ 上で $(m, \mathcal{E})$-caloric かつ $dt \times m$-a.e. で非負有界な任意の $u : (0, c_4 r^\beta) \to \mathcal{F}$ に対し

$$dt \times m\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{(c_1 r^\beta, c_2 r^\beta) \times B_d(x, \delta r)} u \leq c_5 \; dt \times m\text{-}\operatorname*{ess\,inf}_{(c_3 r^\beta, c_4 r^\beta) \times B_d(x, \delta r)} u, \tag{2.5}$$

ただし $dt \times m$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度 dt と m の積測度を，$dt \times m$-ess sup, $dt \times m$-ess inf は $dt \times m$ に関する本質的上限および本質的下限をそれぞれ表す．

するとまず，当然成立しているべき（だが実は非自明な）事実として次が成り立つ．

命題 2.7 (Cf. [12, Proof of Theorem 4.5])．$\beta \in (1, \infty)$ とし，$(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ は PHI(β) を満たすとする．このとき $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ は EHI を満たす．

命題 2.7 は一見自明に思えるかもしれないが，PHI(β) では u の有界性があらかじめ仮定されているのに対し EHI では h の有界性は仮定されていないため実際には命題 2.7 は全く非自明であり，その証明には熱核評価や EHI, PHI(β) に関する既知の事実を適切に組み合わせる必要がある；詳細は [12, Proof of Theorem 4.5] を参照のこと．

さらに上記の PHI(β) の定義（定義 2.6-(2)）から次の命題が直ちに従う．

命題 2.8. $\beta \in (1, \infty)$, $\alpha \in (0, 1]$ とする．このとき $(X, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ が PHI(β) を満たすためには $(X, d^\alpha, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ が PHI(β/α) を満たすことが必要十分である．

定義 2.1 より直ちに分かるように，任意の $\alpha \in (0,1]$ に対し $d^{\alpha} \in \mathcal{J}(X,d)$ である．[3] 従って，ある $(\theta,\mu) \in \mathcal{J}(X,d) \times \mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対し $(X,\theta,\mu,\mathcal{E},\mathcal{F}^{\mu})$ が PHI(β) を満たすような β の値を任意に**大きく**することは $(\theta,\mu) = (d^{\alpha},m)$ と取ることにより常に可能である．これに対し，そのような β を**小さく**することができるかどうかは極めて非自明であり，これが等角 walk 次元を (1.1) の右辺の**下限**の値として定義した理由である．

さらに定義 2.6-(1) を命題 2.2（および定義 2.5-(1)）と組み合わせることで次を得る．

命題 2.9.[4] $\theta \in \mathcal{J}(X,d)$, $\mu \in \mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ とする．このとき $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ が EHI を満たすことと $(X,\theta,\mu,\mathcal{E},\mathcal{F}^{\mu})$ が EHI を満たすことは同値である．

証明. $\theta \overset{\eta\text{-qs}}{\sim} d$ であるような同相写像 $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を取り，$\widetilde{\eta}$ を命題 2.2 の通りとする．定義 2.4 の後に注意した通り，“$\mathcal{E}$-q.e.” や $\mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ および各 $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{e}}$ に対する $\widetilde{u}$ はその定義に $(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ を用いても $(X,\mu,\mathcal{E},\mathcal{F}^{\mu})$ を用いても同一のものになる．このことと定義 2.6-(1) の末尾で触れた EHI の同値な言い換え，および $A = \eta^{-1}(\delta)$ に対する命題 2.2-(3) の性質を用いることで，$(X,\theta,\mu,\mathcal{E},\mathcal{F}^{\mu})$ が定数 $c_0 \in (1,\infty)$, $\delta \in (0,1)$ で EHI を満たすならば $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ は定数 $c_0 \in (1,\infty)$, $\delta' := \min\{1/2, \eta^{-1}(\delta)\} \in (0,1)$ で EHI を満たすことが直ちに従い，逆も $d \overset{\widetilde{\eta}\text{-qs}}{\sim} \theta$ を用いることで全く同様に証明できる． □

本稿の最後に，定理 1.4 に密接に関連する先行研究である [5, 3] の結果を紹介する．

定理 2.10 ([5, Theorem 5.15], [3, Theorem 7.9], cf. [2, Theorem 2.16])**.** $(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ が EHI を満たすためには $d_{\mathrm{cw}}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F}) < \infty$ となることが必要十分である．

定理 2.10 は [5, 3] における EHI の空間摂動に関する安定性の証明の最終段階である．実際，PHI(β) の空間摂動に関する安定性は [2, Theorem 2.16] により既知であり，これと定理 2.10 を合わせることで EHI も空間摂動に関し安定であることが従う．[5]

定理 2.10 により，定理 1.4 は

$$\text{「}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F}) \text{ が EHI を満たすことは } d_{\mathrm{cw}}(X,d,m,\mathcal{E},\mathcal{F}) = 2 \text{ と同値である」} \tag{2.6}$$

と言い換えることができ，この意味で定理 1.4 は定理 2.10 の精密化とみなせる．定理 1.4 の証明も [5, 3] における定理 2.10 の証明を精密化することにより，任意の $\beta \in (2,\infty)$ に対し $(X,\theta,\mu,\mathcal{E},\mathcal{F}^{\mu})$ が PHI(β)（の [9, Theorem 1.2] による特徴付けのうちの 1 つ）を満たすように $(\theta,\mu) \in \mathcal{J}(X,d) \times \mathcal{A}(X,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ を構成することでなされ，その達成のために [6, 16] の手法を適切に修正したものを用いる．定理 1.4 の証明の詳細は [12, Sections 3 and 4] を参照のこと．

[3] これに対し $\alpha \in (1,\infty)$ に対しては，d^{α} は 3 角不等式を満たすとは限らず，例えば (X,d) が $\mathbb{R}$ の（1 点集合でない）区間と等長な部分集合を含む場合には d^{α} に対する 3 角不等式は実際に不成立となる．

[4] この命題は木上 淳氏から M. T. Barlow 氏，Murugan 氏と筆者に伝えられ，[5, 3] の主結果の記述に大いに活用された．

[5] [5, 3] のアイデアはこの通りだが，[5, Theorem 5.15], [3, Theorem 7.9] は実際には PHI(β) を示すのではなく，[2, Theorem 2.16] による空間摂動に関し安定な PHI(β) の特徴付けの方を直接証明している．

参考文献

[1] T. Ariyoshi and M. Hino, Small-time asymptotic estimates in local Dirichlet spaces, *Electron. J. Probab.* **10** (2005), no. 37, 1236–1259.

[2] M. T. Barlow, R. F. Bass and T. Kumagai, Stability of parabolic Harnack inequalities on metric measure spaces, *J. Math. Soc. Japan* **58** (2006), no. 2, 485–519.

[3] M. T. Barlow, Z.-Q. Chen and M. Murugan, *Stability of EHI and regularity of MMD spaces*, 2020, preprint. `arXiv:2008.05152`

[4] M. T. Barlow, A. Grigor'yan and T. Kumagai, On the equivalence of parabolic Harnack inequalities and heat kernel estimates, *J. Math. Soc. Japan* **64** (2012), 1091–1146.

[5] M. T. Barlow and M. Murugan, Stability of the elliptic Harnack inequality, *Ann. of Math. (2)* **187** (2018), 777–823.

[6] M. Carrasco Piaggio, On the conformal gauge of a compact metric space, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 3, 495–548.

[7] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[8] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, Second revised and extended edition, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 19, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

[9] A. Grigor'yan, J. Hu and K.-S. Lau, Generalized capacity, Harnack inequality and heat kernels of Dirichlet forms on metric spaces, *J. Math. Soc. Japan* **67** (2015), no. 4, 1485–1549.

[10] N. Kajino, Energy measures for diffusions on fractals: a survey, in: *Analysis and Partial Differential Equations on Manifolds, Fractals and Graphs*, Advances in Analysis and Geometry, vol. 3, Walter de Gruyter, Berlin/Boston, 2021, pp. 119–142.

[11] N. Kajino and M. Murugan, On singularity of energy measures for symmetric diffusions with full off-diagonal heat kernel estimates, *Ann. Probab.* **48** (2020), 2920–2951.

[12] N. Kajino and M. Murugan, *A bridge between elliptic and parabolic Harnack inequalities*, preprint, 2020. `arXiv:2008.12836`

[13] J. Kigami, Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpinski gasket, in: K. D. Elworthy and N. Ikeda (eds.), *Asymptotic Problems in Probability Theory: Stochastic Models and Diffusions on Fractals (Sanda/Kyoto, 1990)*, Pitman Research Notes in Math., vol. 283, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993, pp. 201–218.

[14] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Math., vol. 143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[15] J. Kigami, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.

[16] J. Kigami, *Geometry and Analysis of Metric Spaces via Weighted Partitions*, Lecture Notes in Math., vol. 2265, Springer, Cham, 2020. `arXiv:1806.06558`

[17] T. Kumagai, Estimates of transition densities for Brownian motion on nested fractals, *Probab. Theory Related Fields* **96** (1993), no. 2, 205–224.

[18] J. M. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal dimension: Theory and application*, University Lecture Series, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[19] M. Murugan, On the length of chains in a metric space, *J. Funct. Anal.* **279** (2020), no. 6, 108627.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University

Rokkodai-cho 1-1, Nada-ku, 657-8501 Kobe, Japan

`nkajino@math.kobe-u.ac.jp`