A Construction of Quandles associated with Quadratic Algebras II
(カンドルのある構成　II)

by **Noriaki Kamiya** （神谷徳昭）
University of Aizu, Japan （福島県立会津大学）[1]

Abstract This note is a study of quadratic algebras equipped with involution, in particular, it is to give exmaples of quandles (or rack) in knot theory from quadratic algebras with a property, and to consider related topics associated with their quandles. That is, the contents are described to an announce roughly and its results are a new idea. On the other hand, these may be regarded to a generalization of symmetric composition algebras.

概要 共役元をもつ $\mathbf{Z}_p$ 上の 2 次代数よりカンドルを構成する論文です. 例えば標数 p 上の体での 4 元数 $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$ and 8 元数 $\mathbf{Z}_p[e_1 \cdots e_7]$ 等を考察します.

key words; quadratic algebras, nonassociative algebras with involution(conjugation), quandles.

(キーワード; 合成代数, カンドル, $\mathbf{Z}_p$ 上の代数)

§ Introduction（はじめに）

リー代数, ジョルダン代数系の 非結合的代数を研究している筆者が最近考えた quandle の実例を与えることが，この小論の目的です．浅学の為にもしかしたらこの方面の knot theory においては，知られた事実かも知れませんが，少し関連する事柄を含め，代数系の立場から新しい idea として述べさせていただきます．この論文は 2019 年 2 月の RIMS 共同研究（公開型）研究集会（RIMS Kokyuroku [K] ）の続編ですが，内容は独立に予備知識を余り仮定せずに論究していますので，準備の為に §1 は [K] の内容と多々重複しています．また非結合的代数系については [K-O] の文献が 2 次代数，合成代数の一般化について述べてあり，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$, $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$, $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$, $\mathbf{Z}_p[e_1, \cdots, e_7]$ 等の内積 $<\ ,\ >$（又は $\| x \|$, ノルム）を考える上で役に立つかも知れません，しかし直接，それらの結果を使うわけではないですが，合成代数に興味がある人の為に挙げさせていただきます．この小論の応用面に関して特に quandle の応用を研究するのに興味ある人々には，積が standard なものではないのですが，共役元（一般に involution をもつ積）で考えるこの論究が役に立つと思われます．つまり，この小論では quandles の例と，そこでの簡単な自己同型写像とその一般化の三対群 (triality group) を考察します．内容は以下の通りです．

§1. Preliminary.
§2. Definitions of $Z_p[i,j,k]$ and $Z_p[e_1, \cdots, e_7]$
§3. Characterizations and generalizations
§4. Tables

[1] **Current address;** CHIGASAKI CITY, CHIGASAKI 1-2-47-201 JAPAN, 253-0041
e-mail; shigekamiya@outlook.jp

§5. Applications.
§6. Conclusions and References.

§1. Preliminary（準備と定義）

集合 M とそこでの bijective なる乗法 $\circ$ が与えられたとき，次の条件 1 ）と 2）を満たす $(M,\circ)$ を quandle（カンドル）と言います．

1)　$x\circ x=x$

2)　$(x\circ y)\circ z=(x\circ z)\circ(y\circ z)$ for any $x,y,z\in M$.

2) の条件は rack の条件です．これらは knot theory の用語です．正確には，$R_x y=y\circ x$ の R_x が bijective です．

ここで $x*y=y\circ x$ と new product を定義すると，

3)　$x*x=x$

4)　$x*(y*z)=(x*y)*(x*z)$

と書き直すことができます．そして $S_x y=x*y$ と表すと．

⊙　$S_x x=x$

⊙　$S_x S_y=S_{S_x y}S_x$

となり，(M,S_x) は s-mainifold とも関連します (see, [K-S.1])．この条件をもつ $\{S_x\}$ を s-map, M を s-set と呼ぶことにします（すなわちこれは generalized symmetric space の代数的概念とも一脈通じます）．勿論，S_x の多様体としての条件等を付け加えての議論です．ここでは詳しい議論には進みません．S_x の C^∞-写像性を仮定すれば，微分幾何学的な事柄とも関連すると思いますが，別の機会にしたいと考えます．

一方 homogeneous presystem $\eta(x,y,z)$ の概念で $\eta(x,x,y)=S_x y=x*y$ とすると，$\eta(a,b,\eta(x,y,z))=\eta(\eta(a,b,x),\eta(a,b,y),\eta(a,b,z))$ が自己同型写像の概念となり，homogeneous presystem と S_x の理論とが関係します．詳しくは [K-S.1], [K-S.2] を参照して下さい（$\eta(x,x,\eta(y,y,z))=S_x S_y z$ に留意して下さい）．簡単に述べると, これらは M における S_x 又は $\eta(x,y)z:=\eta(x,y,z)$ の概念が自己同型写像であることを意味しています．

この小論では 1) と 2) は 3) と 4) と同値ですので，3) と 4) を満たす乗法 $*$ をもつ代数系で考察します．つまり，乗法をもつある集合の中で，$\lambda*\lambda=\lambda$ の元 λ を見つけることです．以上の事から 3) と 4) を満たす S_x を s-map，M を s-set と呼ぶことの理由です．

$1<q<r<p$, p を素数，q,r を自然数，$qr\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ かつ q と r のいずれも平方数でないとする（従って $p\neq 2$ です）．

例えば $p=5,\ q=2,\ r=3,\ p=7,\ q=3,\ r=5, p=11, q=7, r=8$ 等の対 $(p,\ q,\ r)$ を考えます．そして，有限体 $\mathbf{Z}_p=\mathbf{Z}/(p)$ 上の $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ を考察します（以下この条件で考える）．

積は $xy=(m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r})(m'+n'\sqrt{q}+l'\sqrt{r})$，共役元は $\overline{x}=m-n\sqrt{q}-l\sqrt{r}$ if $x=m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r}$ です（この積を standard product と呼ぶことにします）．

ここで内積（ノルム）を次の様に定義します．

$$\| x \|=\sqrt{<x,x>}, <x,y>=\frac{1}{2}(x\overline{y}+y\overline{x}).$$

勿論 $\mathbf{Z}_p$ 上での 2 次代数です．つまり $1, x, x^2$ が 1 次従属であり，

$$xx-(x+\overline{x})x+\overline{x}x=0$$

を満たします．そして合成代数の性質：

$$\| xy \| = \| x \| \| y \| \quad (< xy, xy > = < x, x > < y, y >)$$

が成立します．ここで $\| x \|^2 = < x, x > = x\overline{x} \in \mathbf{Z}_p$ です．しかし $< x, y >$ は退化する場合があります．

以下の議論の為に次の様な記号を導入する．

$M_2(p,q,r) := \{\begin{pmatrix} m & nq+l \\ n+lr & m \end{pmatrix} | m, n, l \in \mathbf{Z}_p\}$,
$GL(M_2(p,q,r)) := \{A \in M_2(p,q,r) | \det\ A \neq 0\}$,
$SL(M_2(p,q,r)) := \{A \in M_2(p,q,r) | \det\ A = 1\}$,
$N(p,q,r) := \{x \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] | \ \| x \| = 1\}$

定理 1.（行列式とノルムの関係）　上記の記号のもとで次が成り立つ．
$\phi : \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] \to M_2(p,q,r)$ (as an algebra, ϕ is a homomorphisum)
$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]^{\times} \cong GL(M_2(p,q,r))$ (as a group)
$N(p,q,r) \cong SL(M_2(p,q,r))$ (as a group)

Remark.　$\exists (n,l) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$, s.t. $nq+l \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, $n+lr \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ が $Ker\ \phi$ の元を生成します（勿論 $m=0$ です）．

Remark.　簡単なことですが，$SL(M_2(p,q,r)) \triangleleft GL(M_2(p,q,r))$.（正規部分群）です.

$$次に，\tilde{Q}(N(p,q,r)) := \{\lambda \in N(p,q,r) | \lambda\lambda = \overline{\lambda},\ \lambda \text{ is invertible}\},$$

と $\tilde{Q}(N(p,q,r))$ を定義します（weak quandle の原型です)．

$$x * y = \overline{xy}$$

によって new product を導入すると，この積 $*$ で $\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ は $\lambda * \lambda = \lambda$ と表せます.

Remark.　$(\sqrt{< \lambda, \lambda >})^2 = \| \lambda \|^2 = \lambda\overline{\lambda}$ なので，勿論 $x * \overline{x} = \overline{x}x = < x, x >$ です.

$$\tilde{Q}(N(p,q,r)) \ni \lambda が invertible_{\ iff} <=> \| \lambda \| \neq 0.$$

$$\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]) = \{\lambda \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] | \lambda * \lambda = \lambda,\ \lambda \text{ is invertible}\}$$

とおき，weak quandle と呼ぶ．これを $\tilde{Q}$ と表す．この $\tilde{Q}$ を用いて，$Q_\lambda = \{\lambda \in \tilde{Q} | 1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ と置くと次のことが成立する.

定理 2.（カンドルの構成）　Q_λ はカンドルであり，$\tilde{Q} = \cup_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda$（$Q_\lambda$の和集合）が成立し，$\tilde{Q}$ は weak quandle です.

詳しい証明は略しますが，$1 * \lambda = \overline{\lambda} * \overline{\lambda} = \lambda \cdot \lambda = \overline{\lambda}$ 等を用います.

Remark. 積 $*$ で単位元を持たない 2 次代数を変形した代数 $(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}],*)$ を考え，そして特に $\tilde{Q}$ の乗法 $*$ は非結合的 (nonassociative) です．つまり $(x*y)*z \neq x*(y*z)$ となり，standard product の記号で表すと，$\overline{(\overline{xy})z} \neq \overline{x(\overline{yz})}$ を意味するので，非結合的乗法 $*$ を持つ代数系です（ここで $^-$ は共役です）．

以上よりこの様な代数系が weak カンドルの例になると考えます．つまり

ノルム 1 かつ巾等元がカンドルを生成する (勿論積で閉じていることが必要です).

$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ において，特に素数 p が小さい時の weak quandle の例を以下に列挙します（詳しくは [K] を参照）．ここで $N(\tilde{Q})$ は $\tilde{Q}$ の元の個数を表す.

- $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2},\sqrt{3}]$; $\lambda*\lambda=\lambda$ の元を見つけると $N(\tilde{Q})=11$ であり，$\lambda=2+\sqrt{3}$ のとき $\overline{\lambda}=2+4\sqrt{3}$ 等です．標準的な積 (standard product) では $\lambda\lambda=\overline{\lambda}$ を満たします．

$\parallel\lambda\parallel=1$ の元の個数は 30 個．つまり $a^5=1,\ b^6=1$ の元の積が $\parallel\lambda\parallel=1$ を満たします．従って $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ においては，weak quandle $\tilde{Q}$ を具体的に求められます．それは $N(\tilde{Q})=11$ より，

$$\lambda=2+\sqrt{3}, \mu=2+2\sqrt{2}, \nu=2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}, \kappa=2+\sqrt{2}+4\sqrt{3}, \xi=2+3\sqrt{2}+3\sqrt{3},$$

とその共役元達 $\overline{\lambda},\overline{\mu},\overline{\nu},\overline{\kappa},\overline{\xi}$ と 1 が求めるものです．つまり 11 個存在します.

これらから作られる $Q_\lambda, Q_\mu, Q_\nu, Q_\kappa, Q_\xi$ がそれぞれ quandle であり，weak quandle $\tilde{Q}$ は $\tilde{Q}=Q_\lambda\cup Q_\mu\cup Q_\nu\cup Q_\kappa\cup Q_\xi$ （$\tilde{Q}$ は 11 個の要素の集合）です．$Q_\lambda\cdots,Q_\xi$ 達の共通集合は $\{1\}$ のみです．そして $*$ の積で $\tilde{Q}$ は閉じていません．

$$(2+\sqrt{3})*(2+2\sqrt{2})=\overline{1+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{2}+3\sqrt{3}\notin\tilde{Q}\text{です．}$$

- $\mathbf{Z}_{11}[\sqrt{7},\sqrt{8}]$; $\lambda*\lambda=\lambda$ の元を見つけると $N(\tilde{Q})=23$ です．これらは 23 個存在します．$\parallel\lambda\parallel=1$ の元の個数は 132 個．$a^{11}=1,\ b^{12}=1$ の元の積が $\parallel\lambda\parallel=1$ を満たします．$\lambda=5+5\sqrt{8}$ が $\lambda*\lambda=\lambda$ を満たす一例です.

- $\mathbf{Z}_{17}[\sqrt{5},\sqrt{7}]$; $\lambda*\lambda=\lambda$ の元を見つけると $N(\tilde{Q})=35$ です．$\lambda=8+3\sqrt{3}$ が一例です. $\parallel\lambda\parallel=1$ の元の個数は 306 個．$a^{17}=1,\ b^{18}=1$ の元の積が $\parallel\lambda\parallel=1$ を満たします．

Remark. $\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{7},\sqrt{11}]$ について，$\parallel\lambda\parallel=1$ なる元については $a^{18}=1,\ b^{19}=1$ なる元の積が λ の元です．そして $\lambda*\lambda=\lambda$ の個数は 39 です．$\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{3},\sqrt{13}]$ のとき $\lambda*\lambda=\lambda$ を満たすのは $\lambda=1$ のみが invertible な元．$\parallel\lambda\parallel=1$ の元は 19×20 個です．

Remark. $\mathbf{Z}_7[\sqrt{3},\sqrt{5}]$ においては $\parallel\lambda\parallel=1$ の元は 56 個ですが，$\lambda*\lambda=\lambda$ の元は 1 個です．$\lambda=1$ のみです．

Remark. 上記の方法で，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ において $p,\ q,\ r$ の選択により $2p+1$ 個の元をもつ weak カンドルが構成できます. 従って $\lambda*\lambda=\lambda$ を満たす λ の個数は $2p+1$ と予想できます.

Remark. $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ の p,q,r の選び方で $\lambda*\lambda=\lambda$ の元は 1 個の場合もあります．

Remark. $\mathbf{Z}_3[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]$ 等における $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体のとき $\lambda*\lambda=\lambda$ なる元は多くても 3 個です．従って例としてはあまり興味が持てませんので省略します．

しかしながら $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体の時はノルム　1　の元の個数は $p+1$ 個です.

Remark. $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ において $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ と $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ の両方が体でない必要十分条件は $\parallel\lambda\parallel=1$ の元の個数が $p(p-1)$ である．どちらかが　体のときは $p(p+1)$ である，（このような予想が成り立つと考えます）．

この章の最後に何故 $\lambda*\lambda=\lambda$ を考察するのかの理由の一つは次の事柄に由来します．

g を自己同型写像とするとき，$g(1)*g(1)=g(1)$ が成り立ち，$g(1)=\lambda$ とおくと $\lambda*\lambda=\lambda$ を満たします．また involution をもつとき $\overline{\lambda}*\overline{\lambda}=\overline{\lambda}$ も満たします．そして $1*1=1$ なので $Q_\lambda=\{1,\lambda,\ \overline{\lambda}\}$ が考えられます．

§2. Definitions of $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$ and $\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ （乗積表）

8 次元 $\mathbf{Z}_p$ 上の Cayley algebra (and Hamilton number) の乗積表を与えます.[2]

$\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ の Table;

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_3$	e_6	$-e_7$	-1	e_1	$-e_2$	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	e_2
e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_7	e_6	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

(体 $\mathbf{Z}_p$ 上の standard product で考える）

$$x*y=\overline{xy}\ \text{(new product)}$$

$$x=e_0+\sum_{i=1}^{7}e_i,\ \overline{x}=e_0-\sum_{i=1}^{7}e_i\ \text{(standard involution)}$$

$e_1=i,e_2=j,e_3=k$ in $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$(*called a quasi quaternion*), $e_0=1$ は省略 (in table), $\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ を *a quasi octonion* と呼ぶ．内積は $<x,y>=(x\bar{y}+y\bar{x})/2$, 積は例えば $e_3e_1=e_2, e_3*e_1=\overline{e_3e_1}=-e_2, e_6e_7=e_1, e_6*e_7=\overline{e_6e_7}=-e_1$ 等.

§3. Characterizations and Generalizations（ 特徴ずけと一般化について）

前節までに $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ における quandle の例を述べましたが，そこでの idea は，次の様に一般化できると考えます．

(A,xy) を単位元 1 をもつ associative, commutative involutive ($\overline{xy}=\overline{y}\ \overline{x}$) algebra とする．ここで $x*y=\overline{xy}=\overline{y}\ \overline{x}$ で new product を定義する．A はベクトル空間としては同じですが，代数構造が異なる xy と $x*y$ の積が存在します．そして $1*x=\overline{1x}=\overline{x}$ であり，単位元を持たない非結合的代数です．この 1 は para unit と呼ばれるものです．

$$\tilde{Q}(A):=\{x\in A|x*x=x,\ x\text{ is }\textit{invertible}\}$$

[2] 4 元数, 8 元数の定義を Zorn's vector matrix で表記する方法も存在しますがここではこの乗積表で定義させていただきます.

と定義すると，$\tilde{Q}(A)$ は weak quandle の構造を持つ．ただし，$x*y$ は非結合的な乗法 $*$ を持つ代数系です（正確には $x*y \in \tilde{Q}(A)$ とは限りません）．この様な $\tilde{Q}(A)$ を研究するのも，将来への課題です．つまり weak カンドルの実例を与えると考えます.

On the other hand, B を commutative associtative algebra とするとき,
$\tilde{Q}(B) = \{\lambda \in B|\ \lambda\lambda = \lambda, \lambda \text{ is invertivle}\}$,

$$Q(B) = \{\kappa \in \tilde{Q}(B)|\kappa = \mu\nu,\ {}^{\forall}\mu,\nu \in \tilde{Q}(B)\}(\text{乗法で閉じられている為の条件})$$

$$S_x y = xy,\ \forall x, y \in Q(B)$$

と定義する．この時 ${}^{\forall}x, y \in Q(B)$ に対して $S_x x = x,\ S_x S_y = S_{S_x y} S_x$ が成り立つ．つまり $Q(B)$ は s-set，$\{S_x\}$ は s-map．カンドルの例です．ただし $\tilde{Q}(B)$ は一般に閉じていない可能性があります.

別の視座からもう少し述べます．単位元を必ずしも持たない代数系として $x*y$ を乗法とする次のような 3 つの関係式が考えられます.

$\odot$ $(x*y)*x = x*(y*x) =< x, x > y$, $< x, y > \in base\ field$

$\odot$ $\| x*y \| = \| x \| \| y \|$

$\odot$ involution $\overline{x*y} = \overline{y}*\overline{x}$ を持ち，$x*\overline{x}, x+\overline{x} \in base\ field$,

$x, x*x, 1$(para unit) が 1 次従属な代数系，つまり $x*x-(x+\overline{x})*x+x*\overline{x} = 0$ なる関係式を満たす（これを para quadratic algebra と呼ぶ）．ただし para unit とは　$1*x = \bar{x}$ です。

この様な 3 種類の非結合的代数系が考えられると思います（乗法の単位元を持たない代数系）．$< x, y >$ は非退化とは限りません，$\mathbf{Z}_3[i,j,k]$ においては $x = i+j+k$ のとき $< x, x > = \| x \|^2 = 0$ 等です．$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}], \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}], \mathbf{Z}_p[i,j,k], \mathbf{Z}_p[e_1, \cdots, e_7]$ （有限体上の 2 次元，3 次元, 4 次元，8 次元代数）が，2 と 3 番目の関係式を満たす実例です．これらの特徴ずけは将来の研究課題です．更に $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ を除く 2 次元, 4 次元, 8 次元代数は 1 番目の関係式を満たします．究極としては Meson と Baryon の特徴ずけに現れる Gell- Mann (1929-2019, quark 理論のノーベル賞受賞者）の 8 次元代数の $\mathbf{Z}_p$ 上での研究です (数理物理学との関連が期待可能です)．この代数も 1 番目の関係式を満たします.

In future, following [K-O](for a version of characteristic 0), we can consider the Zorn vector matrix algebra and normal triality algebras for $\mathbf{Z}_p$ versions of characteristic p.

§4. Tables (2 次元, 3 次元, 4 次元, 8 次元の代数の例)

この章での例はすべて $\| x*y \| = \| x \| \| y \|$ を満たす，ただし $\| x \| = \sqrt{x*\overline{x}} = \sqrt{< x, x >}$.

	notations（記号）
dim	dim of A (A; some closed set w.r.t $*$)
$N(\lambda; \| \lambda \| = 1)$	${}^{\sharp}\{\lambda|\ \ \| \lambda \| = 1\}$, number of elements satisfying　$\| \lambda \| = 1$
$N(\tilde{Q})$	${}^{\sharp}\{\lambda|\ \lambda*\lambda = \lambda$ and λ is invertible$\}$, number of weak quandles
$N(Q_\lambda)$	$(N(\tilde{Q})-1)/2$, petal number
$Aut_* Q_\lambda$	automorphism group w.r.t $*$
$Trig_* Q_\lambda$	triality group w.r.t $*$
$Trid_* Q_\lambda$	triality derivation w.r.t $*$

$g_j(x*y) = g_{j+1}(x) * g_{j+2}(y),\ j = 0,1,2,\ g_j$ is elements of $Trig_*\ A$.

$d_j(x*y) = (d_{j+1}x) * y + x * (d_{j+2}y),\ d_j \in End\ A$, and d_j is elements of $Trid_* A$.

$Q_\lambda = \{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ においては加法は定義されないが，$0 = (\mu x) * y + x * (\overline{\mu} y)$ は代数系 A においては意味を持つ可能性あり，$0, \mu, \overline{\mu} \in Im\ Q_\lambda$ のときに上の関係式は成り立つ．

つまり Q_λ で定義するのではなく乗法 $*$ をもつ代数系 A の上で考えてそれを制限する．

$\mathbf{Z}_p$ 上の　$e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ なる基底をもつベクトル空間で次の表が考えられます．

$< e_i, e_j >= \delta_{i,j},\ e_i e_j = -e_j e_i,\ i,j \neq 0,\ e_0 = 1$ とおき $e_0 e_i = e_i$ ．これらの記号の下で

$\mathbf{Z}_p$ 上の 2 次元，4 次元，　8 次元代数をもとにしてのカンドルの例を作りたいのです．

	$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}/(3)$	$\mathbf{Z}_3[\sqrt{2}]$	$\mathbf{Z}_3[i,j,k]$	$\mathbf{Z}_3[e_1, \cdots, e_7]$
$dim_{\mathbf{Z}_3}$	1	2	4	8
ノルム 1 の個数	2	4	$3^3 - 3$	$3^7 - 3^3$
$N(\tilde{Q})$	1	1	3×3	3^6
$N(Q_\lambda)$	0	0	4	$(3^6 - 1)/2$
$Aut_* Q_\lambda$	Id	Id	S_3	S_3
$Trig_* Q_\lambda$	Id	Id	$S_3 \times S_3 \times S_3$	$S_3 \times S_3 \times S_3$
$Trid_* Q_\lambda$	0	$(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(0, \lambda - \overline{\lambda}, \overline{\lambda} - \lambda)$	$(0, \lambda - \overline{\lambda}, \overline{\lambda} - \lambda)$

$\mathbf{Z}_3[e_1, \cdots, e_7]$ においては, $\lambda * \lambda = \lambda$ の元は $\lambda = 1 + e_1 + e_2 + 2e_3$ 等, 3^6 個存在します．この λ を用いて $Q_\lambda = \{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ を 1 つ固定しています．$Aut_* \mathbf{Z}_3[\sqrt{2}] \cong \mathbf{Z}_2$, $Trig_* \mathbf{Z}_3[\sqrt{2}] \cong K_4$.

	$\mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}/(5)$	$\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$	$\mathbf{Z}_5[i,j,k]$	$\mathbf{Z}_5[e_1, \cdots, e_7]$
$dim_{\mathbf{Z}_5}$	1	3	4	8
ノルム 1 の個数	2	5×6	$5^3 - 5$	$5^7 - 5^3$
$N(\tilde{Q})$	1	11	3×5	$5^6 - 5^3 + 1$
$N(Q_\lambda)$	0	5	7	$5^3(5^3 - 1)/2$
$Aut_* Q_\lambda$	Id	S_3	S_3	S_3
$Trig_* Q_\lambda$	Id	$S_3 \times S_3 \times S_3$	$S_3 \times S_3 \times S_3$	$S_3 \times S_3 \times S_3$
$Trid_* Q_\lambda$	0	$(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(0, \lambda - \overline{\lambda}, \overline{\lambda} - \lambda)$	$(0, \lambda - \overline{\lambda}, \overline{\lambda} - \lambda)$

$\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]$ については dim が 2，ノルム 1 の元の個数は 6 個，$Q_\lambda = \{1, 2 + 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2}\}$, $N(\tilde{Q}) = 3,\ N(Q_\lambda) = 1,\ Aut_* Q_\lambda = S_3,\ Trig_* Q_\lambda = S_3 \times S_3 \times S_3,\ Trid_* Q_\lambda = \{(0, \lambda - \overline{\lambda}, \overline{\lambda} - \lambda)\}$ です．S_3 は 3 次の対称群, K_4 は Klein's 4 元群. $Aut_* \mathbf{Z}_5[\sqrt{2}] \cong S_3$. $Trig_* \mathbf{Z}_5[\sqrt{2}] \cong S_4$. $\mathbf{Z}_5[e_1, \cdots, e_7]$ においては $\lambda = 2 + e_1 + e_2$ 等, $N(\tilde{Q})$ は $5^6 - 5^3 + 1$ 個存在します．

	$\mathbf{Z}_7 = \mathbf{Z}/(7)$	$\mathbf{Z}_7[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$	$\mathbf{Z}_7[i,j,k]$	$\mathbf{Z}_7[e_1, \cdots, e_7]$
$dim_{\mathbf{Z}_7}$	1	3	4	8
ノルム 1 の個数	2	7×8	$7^3 - 7$	$7^7 - 7^3$
$N(\tilde{Q})$	1	1	3×7	$7^6 + 7^3 + 1$
$N(Q_\lambda)$	0	0	10	$7^3(7^3 + 1)/2$
$Aut_* Q_\lambda$	Id	Id	S_3	S_3
$Trig_* Q_\lambda$	Id	Id	$Z_2 \times S_3 \times S_3$	$Z_2 \times S_3 \times S_3$
$Trid_* Q_\lambda$	0	0	$(0, \lambda - \overline{\lambda}, \overline{\lambda} - \lambda)$	$(0, \lambda - \overline{\lambda}, \overline{\lambda} - \lambda)$

$\mathbf{Z}_7[\sqrt{3}]$ については dim が 2，ノルム 1 の元の個数は 8 個，$Q_\lambda = \{1\},$, $N(Q_\lambda) = 0$, $Aut_* Q_\lambda = Id$, $Trig_* Q_\lambda = Id$, $Trid_* Q_\lambda = 0$ です．$Aut_* \mathbf{Z}_7[\sqrt{3}] \cong \mathbf{Z}_2$. $Trig_* \mathbf{Z}_7[\sqrt{3}] \cong K_4$. $\mathbf{Z}_7[e_1, \cdots, e_7]$ においては $\lambda = 3 + e_1 + 5e_2 + 6e_3$ 等, $N(\tilde{Q})$ は $7^6 + 7^3 + 1$ 個存在します.

Remark. A weak quandle の $\tilde{Q} = \cup_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda$（$Q_\lambda$の和集合）における各 Q_λ （λ を一つ固定）の上に $Aut_* Q_\lambda \simeq S_3$ が Q_λ の自己同形群として作用する．従って $N(Q_\lambda)$ の個数だけ petal Q_λ の自己同型群が存在します.

§5. Applications（応用）

Let (M, S_x) be a s-set with s-map S_x defined in section one (i.e., satisfying (3) and (4)).

We shall now define an endomorphism $g \in Epi(M, S_x)$ as follows;

$$gS_x = S_{gx} g.$$

Then it is said to be a s-automorphism on (M, S_x), because $g(x * y) = (gx) * (gy)$.

Ex. s-map $\{S_x\}$ is a s-automorphism, because $S_x S_y = S_{S_x y} S_x$.

Ex. Let (G, xy) be a group. We set $S_x y = (xy)x^{-1}$, then (G, S_x) is a s-automorphism.

Ex. Let $(G, \eta(x, y, z))$ be a homogeneous presystem. Then by $\eta(a, b)c := \eta(a, b, c)$, and $\eta(a, a) = S_a$, we obtain that S_a is a s-automorphism on G, because

$$\eta(a, a, \eta(x, x, z)) = S_a \eta(x, x, z) = S_a S_x z = \eta(\eta(a, a, x), \eta(a, a, x), \eta(a, a, z)) = S_{S_a x} S_a z,$$

where we denote by $\eta(a, a, z) = S_a z$.

Ex.(counter example) Following ([K-S.1]), we recall a quasi group (Q_5, xy) with the following multible table;

	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0
1	3	1	0	2	4
2	0	2	3	4	1
3	1	0	4	3	2
4	2	4	1	0	3

This means that $01 = 3,\ 10 = 3,\ 23 = 4,\ 32 = 4,\ 04 = 0,\ 40 = 2$, etc., and x^{-1} is an element y satisfying $xy = yx = 1$ for any $x \in Q_5$. Then we can define

$$S_x y = (xy)x^{-1}$$

however, this S_x is not s-map,i.e., (Q_5, S_x) is not s-set.

In final comments, we describe only the results.

$$Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}, \sqrt{3}])) \cong S_3 \text{ (if } \lambda = 2 + \sqrt{3})$$

$$Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_7[\sqrt{3}, \sqrt{5}])) \cong < Id > \text{ (if } \lambda * \lambda = \lambda \text{ is only } \lambda = 1).$$

Indeed, general speaking, these mean that $g(x*y)=(g(x))*(g(y))$ for any element $g\in Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]))$, where $S_x y = x*y,\ {}^\forall x,y\in Q_\lambda(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}])$.

Remark. If $N(Q_\lambda)\neq 0$, then we have $Aut_* Q_\lambda \cong S_3$.

The details will deal in a future paper and so we will induce a concept of triality group as a generalization of automorphisms of these subjects.

以下は我々が何を考えているかの簡単な動機の実例です.

複素数体 $\mathbf{C}$ の場合: （$\lambda*\lambda=\lambda$ の例）-new product の導入-

$x*y=\overline{xy}$, ここで xy は $\mathbf{C}$ の standard product, and $\overline{x}$ なる共役（複素数の）によって定義される new product $*$ を考えます.

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ とするとき，周期 2π で $-\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$ と同一視します、$e^{i\theta}$ の共役元は $e^{-i\theta}$ を用いて，

$$e^{\frac{2}{3}\pi i}=e^{\frac{2}{3}\pi i}*e^{\frac{2}{3}\pi i}(\text{周期 } 2\pi)\ \text{より}$$

$$e^{i\theta}=e^{i\theta}*e^{i\theta},\ e^{i\theta}(x*y)=(e^{i\theta}x)*(e^{i\theta}y),\ \ {}^\forall x,y\in\mathbf{C},\ i=\sqrt{-1}.$$

つまり $e^{i\theta}(=g)$ が $*$ の乗法で自己同型写像です．記号で書くと，$g(x*y)=(gx)*(gy)$ が成り立ちます．又 $\frac{2}{3}\pi i(x*y)=(\frac{2}{3}\pi ix)*y+x*(\frac{2}{3}\pi iy)$ が成り立ちますので，これは $\frac{2}{3}\pi i$ が $(\mathbf{C},*)$ の微分を意味します（周期 2π で考えます）．$\frac{2}{3}\pi i$ の共役は $-\frac{2}{3}\pi i$ を用います.

$$e^{i\theta}\longleftrightarrow i\theta\ (\theta=\frac{2}{3}\pi)$$

なる glogal $\longleftrightarrow$ local 対応を示しています．つまり次の対応が成り立ちます．$*$ の積で，

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C},*)\cong S_3\ \text{(symmetric group of order 3)}$$

$$i.e.,\ g(x*y)=(gx)*(gy),\ g\ is\ the\ automorphism,$$

$$\text{global relation}\longleftrightarrow\text{local relation}(corespondence)$$

$$\mathrm{Der}(\mathbf{C},*)=\{d\in\mathrm{End}\ \mathbf{C}|d=(\frac{2n}{3})\pi i,\ n:integer\}.$$

$$i.e.,\ d(x*y)=(dx)*y+x*(dy),\ d\ is\ the\ derivation.$$

これらの一般化として triality group （自己同型の拡張概念）を考える．つまりコペルニクス的発想ですが，$xy=\overline{x*y}$ によって standard product を考えると，自己同型写像 g が $x*y$ の積で $g(x*y)=g(x)*g(y)$ として成り立つようなことが可能な代数系を探求するのが目標です．そして　$g_j(x*y)=(g_{j+1}x)*(g_{j+2}y),\ j=0,1,2$ なる g_j を決定したいと考えています．”a priori”に $*$ を考え次に $x*y$ から xy を定義する.

複素数の場合の triality group は 2 次元多様体であり次の様になります.

$$Trig_*\mathbf{C}=(e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2},\ e^{i\theta_3}),\ \ and\ Trid_*\mathbf{C}=(i\theta_1,\ i\theta_2,\ i\theta_3),\ where\ \theta_1+\theta_2+\theta_3=0.$$

実数の場合の triality group は $(Id,-Id,-Id),(-Id,Id,-Id),(-Id,-Id,Id),(Id,Id,Id)$ がその元であり

$$Trig_*\mathbf{R}\cong K_4\ (Klein's\ group).$$

これらの理由から $\mathbf{Z}_p$ 版三対原理の研究を考察したいのです

（初等数理代数学の黎明ーーー大袈裟ですが）.

§6. Conclusions and References（あとがきと参考文献そして予想）

この小論では予備知識をほとんど仮定しませんので，引用文献は多くは挙げません．ここで述べた $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}], \mathbf{Z}_p[i,j,k], \mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ 等の 2 次代数は，symmetric composition algebra ($< xy|xy > = < x|x >< y|y >$) の variation (ある種の一般化）です．内積 $<\ ,\ >$ が非退化でない場合で考えています．$\mathbf{Z}_p$ 上，$(xy)x = x(yx) = < x, x > y$ を満たす代数系も考えられます．この algebra の性質，つまり $\parallel xy \parallel = \parallel x \parallel \parallel y \parallel$ ($< x, x > = \parallel x \parallel^2$ の定義のもとで) なる関係式を満たす代数系と，三対原理 (triality of groups and algebras) については，次の文献 [K-O] が役に立つと思います（これは三対原理の local $\leftrightarrow$ global の対応概念が述べられている最初の論文ですです）．

[K-O]; N. Kamiya and S. Okubo, Algebras and groups satisfying triality relations, Monograph (Book), Aizu Univ., (2015) （標数 0 の体上の代数系での三対関係の研究）．

又，次の文献 [K-S.1] and [K-S.2] も quandles の応用として役に立つかも知れません.

[K-S.1]; N. Kamiya and Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous presystems, J. Gen. Lie theory, (2011) Art ID,G110116.

[K-S.2]; N. Kamiya and Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps and weak Hopf algebras associated with quandles, Proc.of the meeting for study of Number theory, Hopf algebras and related topics, 2019, p1-23, (Yokohama Publisher) 収録論文．

これらの上記 2 論文はカンドルとヤング・バクスター方程式に関連した論文です．

[K]; N. Kamiya, A construction of quandles associated with quadratic algebras, RIMS kokyuroku （vol.**2130**, 収録） (2019).

この論文 [K] が数理代数学の基礎的な最初の小論です.

[K-M]; N. Kamiya and D. Mondoc, On a construction of Lie (super) algebras and (ε,δ) Freudenthal-Kantor triple systems defined by bilinear forms. (2020)

doi: 10.1142/S0219498820502230.

最近のこの論文 [K-M] は三項系代数とリー代数、リー超代数の構成を論究した数理物理学（数理代数学）への応用が考えられるものです．この triple system　という概念は 3 つの積で定義された代数系であり, 素粒子におけるクオーク理論とも関連しますので今後の発展が期待される分野だと思います.

一般に $\mathbf{Z_p}$ 上の 2 次代数の理論においても 4 元数代数、8 元数代数を標数 p 上の体で考えるこの小論で述べた具体的な議論 $p = 3, 5, 7$ の場合が適用可能ですがそれはまた別の機会に述べさせていただきます。

数学史的側面の立場から視ますと，非結合的代数系 + 計算機科学 = knot theory, mathematical physics, etc.,（他分野への融合的な応用が考えられます）．

この様な融合的分野が将来いつか芽生える発端になればと思い，将来への布石として更に歴史の一コマとしてここに記述させていただきましたことを御寛容ください．筆者としては初等数理代数学の創世的な論究をこころがけています（大風呂敷を広げています）．又，定義のところ等で，独自の記号等そして英語と日本がミックスした文章になりましたこと，更に各分野の人達にとり，見やすくしたつもりがかえって筆者の未熟の為，混乱させたかもしれません．再度不束な文体，お許しください．

最後に，予想として次のことを述べさせていただきます.

予想

- $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ に関して $0 < q < r < p$, p は素数, $qr \equiv 1 (mod\ p)$，q, r は平方数でないとき，　そして $N(\tilde{Q})$ は weak quandle $\tilde{Q}$ の元の個数とする．

a) ノルム 1 の元の個数が $p(p+1)$．$\Longleftrightarrow_{iff}$ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ 又は $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ が体．

b) ノルム 1 の元の個数が $p(p-1)$．$\Longleftrightarrow_{iff}$ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ かつ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ の両方が体でない．

a) の時 $p+1$ が 3 の倍数又は b) の時 $p-1$ が 3 の倍数 $\Rightarrow$ $N(\tilde{Q}) = 2p+1$，これ以外は $N(\tilde{Q}) = 1$　です．

- $\mathbf{Z}_p[i, j, k]$ のノルム 1 の元の個数は $p^3 - p$, そして $N(\tilde{Q}) = 3p$　です．
- $\mathbf{Z}_p[e_1, \cdots, e_7]$ のノルム 1 の元の個数は $p^7 - p^3$,

そして　$N(\tilde{Q}) = p^6 + (1 - \delta_{p,3})(-1)^{\frac{p+1}{2}}(p^3 + (-1)^{\frac{p+1}{2}})$, ただし記号 $\delta_{p,3}$ はクロネッカーのデルタです．

つまり $\mathbf{Z}_3[i, j, k]$ におけるノルム 1 の元は 24 個,　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元は 9 個存在する．

$\mathbf{Z}_3[e_1, e_2, \cdots, e_7]$ におけるノルム 1 の元は $3^7 - 3^3$ 個,　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元は 3^6 個存在する (例えば $1 + e_1 + e_2 + e_3$ がその元です).

筆者には以上の予想が解決されていて既知の結果なのかわかりませんが述べさせていただきます（非結合的代数系の立場からでの話です).

手計算の結果なので再考・改良しなければならない点多々存在すると思いますが，先駆的な研究としての予想としてお許し下さい．

Remark. $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ に関する研究は RIMS Kokyuroku vol.**2104** ”計算機科学から視た 2 次代数 ”p24-28,(2019) が役に立つ文献と考えますので参照してください．

Acknowledgement. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Science, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.