グラフゼータ函数の定義について
On the definition of graph zeta functions

森田英章（室蘭工業大学・工）
Hideaki Morita
Muroran Institute of Technology

1　概要

本稿は、「グラフゼータ函数」に対してその一般的な定義を試み、その後に続く議論を統一的かつ円滑に行う環境を整備することを目的とする。現在, ひと口に「グラフゼータ函数」という言葉を用いた場合, それはグラフや有向グラフに対して定義された各種のゼータ函数の「総称」として用いられている．以下、文中においては「ゼータ函数」を単に「ゼータ」と表記する。「グラフゼータ」という用語が指し示すところの代表例を挙げれば, 「伊原ゼータ」[4], 「ボーエン＝ランフォード・ゼータ」[2], 「水野-佐藤ゼータ」[5]、「佐藤ゼータ」[8]、「バーソルディ・ゼータ」[1]、「エッジ・ゼータ」[11] などとなろうか。これら以外にも、その一般化や派生型が知られている[1]。いずれの場合も、これらのゼータが定義される個々の対象ごとに、定義があたえられてきた。すなわち土台となる空間がグラフなのか有向グラフなのか、そこで扱うものが閉路なのか被約閉路なのか、またそれら閉路もしくは被約閉路にどのような荷重をあたえるのか、グラフゼータの定義に必要なこれらの項目が各論ごとに異なる。また、定義式として採用する表示式も三種類におよび、この点もまたグラフゼータの一般的な扱い方を築く際の障害になっていたと思う。

グラフゼータの表示式には次の三種類、

「指数表示」、「オイラー表示」、「橋本表示」

がある。使分けの基準は明確ではない。ただ、グラフゼータにおいては、オイラー表示で定義される場合がほとんどである。ときに、佐藤ゼータのように、橋本表示で定義される場合もある。では、橋本表示で定義される必然があるかといえば、それはない。実際、後に概観するように、橋本表示をもつグラフゼータは、かならず他の 2 つの表示をもつ。要は、定義できればそれでよく、いずれの表示を採用するかは問題とされていなかったのかもしれない。事実、これら三種の表示の同値性に関わる既存の議論も特に見当たらない。

結論から言えば、この三種の表示は一般に同値ではない。橋本表示は無条件でオイラー表示に変換できるし、オイラー表示も無条件で指数表示に変換できる。しかし逆に、指数

[1]例えば、「一般荷重ゼータ」など。[6] 参照。

表示からオイラー表示へ書き換えるにはある条件が必要となり、また、オイラー表示から橋本表示への変換も然りである [6]。本稿で定義される「グラフゼータ」に対しても、指数表示とオイラー表示は同値になるが、橋本表示を得るにはさらに条件が必要である。このことは、既存のグラフゼータの研究においても、オイラー表示で定義して、橋本表示の存在を示すことが、主流の一つをなすことと符合し、それが議論の自然な方向であったことを保証している。ただし、本稿で述べる「グラフゼータ」の枠組みが定められた暁には、この問題に対する解答は非常に簡明なものとなる。いずれにしても、表示式の相互関係に多くの意識が割かれず、各論に終始していたことが原因で、議論に非効率な部分があったことは否めないかもしれない。無論、各論には各論の意味と価値もあるが、グラフゼータ一般の定義に向けた機運の高まりを阻害していたこともまた確かであろう。

本稿では、「グラフゼータ」の定義を定め、その上で指数表示とオイラー表示の同値性、さらに橋本表示をもつための条件について述べる。これまでは、橋本表示はあってしかるべきもの、という認識のもとに研究が行われていたと思われるが、本稿で定めるグラフゼータの定義に従うと、橋本表示をもたないグラフゼータも存在することになる。また、グラフゼータはグラフ上の量子ウォークとも密接な関連をもち、そこではグラフゼータの第四の表示である「伊原表示」が重要な役割を果たす。現在、伊原表示は橋本表示を変換することが、その構成の基本的な手段であることを考えれば、グラフゼータの定義により橋本表示をめぐる環境を整備することは、今後展開するであろう量子ウォークとの関連をめぐる研究の基盤となることが期待される。

2　グラフゼータ函数の定義

グラフゼータの原型は伊原ゼータ [4] である。もとは数論的な動機のもとに導入されたが、セール [10]、砂田 [12, 13]、橋本 [3] を通じて、有限無向グラフに対する概念であることが認識された。それに基づき、その後導入された典型的なグラフゼータも、基本的に無向グラフに対して定義されてきたが、現在は有向グラフに対して定義するのが基本的であると認識することができる (例えば [6] 参照)。ただし、グラフゼータのみならず、その他の離散構造に付随するゼータは、力学系のゼータとして統一的に記述することが可能であり、諸々の細かい概念も効率的に定義できる。ここではその観点に基づき、有向グラフに対するグラフゼータの定義を紹介する。

有限有向グラフ $\Delta = (V, \mathfrak{A})$ を考える。ここで V は頂点集合、$\mathfrak{A}$ は有向辺集合である。有向グラフ Δ が有限であるとは、頂点集合と有向辺集合がともに有限集合であることをいう。有向辺は頂点 $u, v \in V$ の順序対 $a = (u, v)$ のことである。有向辺 $a = (u, v)$ は、頂点 u から頂点 v に向けた矢印と理解される。このとき頂点 u を有向辺 a の**尾 (tail)** とよび $\mathfrak{t}(a)$

で表す。また v は a の**頭 (head)** とよび $\mathfrak{h}(a)$ で表す。有向辺を成分にもつ両側無限列全体の集合 $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ とその上の左シフト作用素を λ で表す。すなわち、$\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid a_i \in \mathfrak{A}, \forall i\}$ であり、$\lambda((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (a_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ である。このとき、組 $(\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}, \lambda)$ を力学系とみる。ここでいう**力学系**とは、集合 X とその上の全単射 φ の組 (X, φ) のことをいう。部分集合 $\Xi \subset \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ が **λ-不変**であるとは、条件 $\lambda(\Xi) \subset \Xi$ が成立するときにいう。部分集合 $\Xi \subset \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ が λ-不変であれば、制限 $\lambda|_{\Xi}$ に対して、組 $(\Xi, \lambda|_{\Xi})$ も力学系になる。この場合、特に誤解を生じる可能性がなければ、制限 $\lambda|_{\Xi}$ を単に λ で表す。例えば、Ξ として

$$\begin{aligned}\Pi_\Delta &= \{(a_i) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}} \mid \mathfrak{h}(a_{i-1}) = \mathfrak{t}(a_i), \forall i\},\\ \Pi_\Delta^\flat &= \{(a_i) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}} \mid \mathfrak{h}(a_{i-1}) = \mathfrak{t}(a_i),\ a_{i-1}^{-1} \neq a_i, \forall i\}\end{aligned}$$

などをとれば、これらは λ-不変となる。Π_Δ の元を Δ の**経路**、$\Pi_\Delta^\flat$ の元を**被約経路**という。正しくは「両側無限 (被約) 経路」というべきなのだろうが、このように省略してよぶことにする。今後は主に $\Xi = \Pi_\Delta$ もしくは $\Pi_\Delta^\flat$ の場合を考えることになるが、その前にいま少し一般の Ξ に対する諸定義を導入する。元 $x = (a_i)$ が力学系 (Ξ, λ) の **m-周期点**であるとは、$\lambda^m(x) = x$ をみたすときにいう。このとき、自然数 m を x の**周期**とよぶ。これら m-周期点全体の集合を X_m であらわす。よって、周期点全体は $X = \cup_{m\geq 1} X_m$ で与えられる。各周期 m に対し X_m は有限集合となることに注意する。実際、$|X_m| \leq |\mathfrak{A}|^m$ である。各自然数 m に対して写像 $\chi_m : X_m \to R$ が与えらえたとき、対応

$$\chi : X \to R : x \mapsto \chi_m(x) \text{ if } x \in X_m$$

を X の**荷重**とよぶ。元 $x = (a_i) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ に対して、その r 個の連続した成分のなす有限列 $(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-1})$ を、x の **r-節**とよぶ。写像 $\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ が与えられているとする。このとき、任意の $x = (a_i) \in X_m$ に対して、その m-節 $(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1})$ を任意にとれば、

$$\theta(a_k, a_{k+1})\theta(a_{k+1}, a_{k+2}) \cdots \theta(a_{k+m-1}, a_k)$$

の値は、m-節のとり方によらず一意に定まる。この値を $\theta_m(x)$ とおくことにより、写像 $\theta_m : X_m \to R$ を得る。これら θ_m から定まる荷重 $X \to R$ を、θ から誘導される**循環荷重**とよび、記号 circ_θ で表す。和 $\sum_{x\in X_m} \mathrm{circ}_\theta(x)$ を $N_m(\theta)$ であらわす。集合 X_m は有限集合であること、および $x \in X_m$ に対しては $\mathrm{circ}_\theta(x) = \theta_m(x)$ であることに注意する。変数 t の形式的冪級数

$$\exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{N_m(\theta)}{m} t^m\right)$$

を $Z_\Xi(t; \theta)$ で表す。グラフゼータとは、λ-不変な Ξ に対する $Z_\Xi(t; \theta)$ のことをいう。定義を正式に掲げておく。

定義 1 (グラフゼータ函数) $\Delta = (V, \mathfrak{A})$ は有限有向グラフ、Ξ は λ-不変な $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ の部分集合、$\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ は写像とする。このとき、t を変数とする形式的冪級数 $Z_{\Xi}(t;\theta)$ を、写像 θ から誘導される有向グラフ Δ の**グラフゼータ函数**という。

特に、$Z_{\Pi_\Delta}(t;\theta)$, $Z_{\Pi^\flat_\Delta}(t;\theta)$ は、それぞれ単に $Z_\Delta(t;\theta)$、$Z^\flat_\Delta(t;\theta)$ で表される。古典的なグラフゼータは、その原典においては有限単純グラフに対して定義される。有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ があるとする。集合 V を頂点集合、集合 E を辺集合という。頂点集合の元を Γ の**頂点**、辺集合の元を Γ の**辺**という。辺は相異なる 2 頂点 $u, v \in V$ の組 $\{u, v\}$ と理解される。辺 $e = \{u, v\}$ に対し、2 つの順序対 $(u, v), (v, u)$ を対応させ、それら全体を $\mathfrak{A}_\Gamma$ で表す。すなわち

$$\mathfrak{A}_\Gamma = \{(u, v), (v, u) \mid \{u, v\} \in E\}$$

である。このとき、$\mathfrak{A}_\Gamma$ を有向辺とする有向グラフ $(V, \mathfrak{A}_\Gamma)$ を、Γ の**対称有向化**とよび Δ_Γ で表す。このとき、例えば伊原ゼータであれば、その古典的な定義は、

$$\theta^{\mathrm{I}}(a, a') = \delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a^{-1}a'}$$

により定まる写像 $\theta^{\mathrm{I}} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ から誘導される $\Delta = \Delta_\Gamma$ のグラフゼータ $Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$ として定義される。その他の典型的な例もすべてこの形で表される。

3 オイラー表示

伊原ゼータに始まる典型的なゼータは、その原典においては「オイラー表示」で定義されることがほとんどである。ここでは一般的な設定の上で、グラフゼータのオイラー表示を概観しておく。$\Delta = (V, \mathfrak{A})$ を有限有向グラフとし、$\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ を写像とする。$\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ の二つの元 x, y が**同値** $x \sim y$ であるとは、整数 $k \in \mathbb{Z}$ が存在し $y = \lambda^k(x)$ であることをいう。ここで λ^{-1} は全単射 λ の逆写像、すなわち右シフトを表す。2 つの周期点 x, y が同値であれば、それらの周期は一致する。すなわち二つの条件 $x \in X_m$, $y \in X_m$ が同値であることを、容易に証明することができる。Ξ を λ-不変な $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ の部分集合とする。このとき、同値関係 $\sim$ は周期点全体 X 上の同値関係を与えるので、その商集合 $X/\sim$ を $\mathfrak{X}$ で表す。さらに、$\sim$ は各周期点集合 X_m 上の同値関係でもあるので、$\mathfrak{X}_m = X_m/\sim$ とおくと、$\mathfrak{X} = \cup_{m \geq 1} \mathfrak{X}_m$ を得る。$\mathfrak{X}$ の元を**循環**もしくは**サイクル**とよぶ。周期点 x を代表元とする循環を $[x]$ で表す。元 $x \in X$ に対して、その周期の最小値 $\min\{m \mid x \in X_m\}$ を、x の**素周期**とよび $\varpi(x)$ で表す。次の補題は標準的な議論により証明できる。

補題 2 任意の周期点 x とその周期 m に対し $\varpi(x) | m$ が成立する。

周期点 $x=(a_i)$ に対し、任意の $\varpi(x)$-節を、x の**素節**とよぶ。x の素節が一つ選ばれたとき、その素節を $\pi(x)$ で表すことがある。同値な二つの周期点 x,y は同じ周期をもつので、その素周期も一致 $\varpi(x)=\varpi(y)$ する。したがって、循環 $\xi=[x]$ に対しても、その**素周期** $\varpi(\xi)$ を $\varpi(x)$ により定義することができる。また、それらの素節 $\pi(x),\pi(y)$ も同値となることは明らかなので、ξ の**素節** $\pi(x)$ が $\pi(\xi)=[\pi(x)]$ により定義できる。変数 t をもつ次の形式的冪級数

$$\prod_{\xi\in\mathfrak{X}}\frac{1}{1-\mathrm{circ}_\theta(\pi(\xi))t^{\varpi(\xi)}}$$

を $E_\Xi(t;\theta)$ で表す。$\Xi=\Pi_\Delta$ の場合は $E_\Delta(t;\theta)$ で表し、$\Xi=\Pi_\Delta^\flat$ の場合は $E_\Delta^\flat(t;\theta)$ で表す。

命題 3 $\Delta=(V,\mathfrak{A})$ は有限有向グラフ、Ξ は λ-不変な $\mathfrak{A}^\mathbb{Z}$ の部分集合、$\theta:\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to R$ は写像とする。このとき、等式 $Z_\Xi(t;\theta)=E_\Xi(t;\theta)$ が成立する。

この表示 $E_\Xi(t;\theta)$ をグラフゼータ $Z_\Xi(t;\theta)$ の**オイラー表示**という。一方、定義式に採用した表示式 $Z_\Xi(t;\theta)$ は**指数表示**とよぶことにする。例として、$\Xi=\Pi_\Delta$ に対する伊原ゼータ $Z_\Delta(t;\theta)$ のオイラー表示 $E_\Delta(t;\theta)$ が、伝統的な定義 [3, 4, 13] に一致することをみる[2]。上記一般論の枠組みでは、伊原ゼータ $Z_\Delta(t;\theta^\mathrm{I})$ のオイラー表示 $E_\Delta(t;\theta^\mathrm{I})$ は、$\prod_{\xi\in\mathfrak{X}}(1-\mathrm{circ}_{\theta^\mathrm{I}}(\pi(\xi)t^{\varpi(\xi)})^{-1}$ となるが、この表示式には「無駄」がある。その「無駄」を削ぎ落とすと、伝統的なオイラー表示に一致する。経路 $x=(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\Pi_\Delta$ に対し、有向辺 a_i が $a_i=a_{i-1}^{-1}$ を満たすとき、a_i を a_{i-1} に対する**バックトラック**とよぶ。経路 x が**バックトラックをもつ**とは、x の成分にバックトラックが存在する場合にいう。バックトラックをもたない経路を**被約経路**とよぶ。さきの $\Pi_\Delta^\flat$ は被約経路全体のなす集合ということになり、$X_\Delta^\flat$ でその周期点全体の集合、すなわち Δ の**被約閉路**の集合を表す。また、$\mathcal{P}_\Delta=\{\pi(\xi)\mid\xi\in\mathfrak{X}\}$, $\mathcal{P}_\Delta^\flat=\{\pi(\xi)\mid\xi\in\mathfrak{X}^\flat\}$ とおき、$\mathcal{P}_\Delta$ の元を Δ の**素循環 (素サイクル)**、$\mathcal{P}_\Delta^\flat$ の元を**被約素循環 (被約素サイクル)** とよぶ。写像 θ^I の定義から、

$$\mathrm{circ}_{\theta^\mathrm{I}}(\pi(\xi))=\begin{cases}1, & \xi\in\mathfrak{X}^\flat,\\ 0, & \xi\in\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}^\flat\end{cases}$$

となる。以上より

$$E_\Delta(t;\theta^\mathrm{I})=\prod_{\xi\in\mathcal{P}_\Delta^\flat}\frac{1}{1-t^{\varpi(\xi)}}$$

[2]伊原ゼータを含め、その他の典型的なグラフゼータの定義は佐藤 [9] にまとめられている。

を得る。この表示は、通常言い習わされる「伊原ゼータの定義」(例えば、[9] 参照) に一致する。この式の右辺は $E^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$ であることに注意する。これを指数表示に変換すると $Z^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$ になる。すなわち、$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$、$Z^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$、$E_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$、$E^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$ の四者は一致する。これは伊原ゼータを誘導する写像 θ^{I} が、「被約隣接条件」(定義 8 参照) を満たすことに起因している。このことについては第 3 節で言及する。

一般の場合でも、オイラー表示は無条件で指数表示に変換できる。しかし、指数表示をオイラー表示に変換するには「オイラー条件」が必要であることが知られている [6]。ただし、グラフゼータの場合には、「オイラー条件」が自然に満たされている [7] ので、グラフゼータに対しては指数表示とオイラー表示は同値な表示となる。以下では、この点の解説を行う予定であるが、そのためにはグラフゼータの定義を超えた、ある程度一般的な設定が必要になる。以下の設定でその事情を観察する。有限有向グラフ $\Delta=(V,\mathfrak{A})$ に対し、部分集合 $\Xi\subset\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ は λ-不変とする 。荷重 $\chi:X\to R$ が**不変**であるとは、同値な $x,y\in X$ に対して $\chi(x)=\chi(y)$ が成立することをいう。従って、$\xi=[x]\in\mathfrak{X}$ に対して、$\chi(\xi):=\chi(x)$ は矛盾なく定義されていることがわかる。よって、χ が不変ならば、次の形式的冪級数

$$\prod_{\xi\in\mathfrak{X}}\frac{1}{1-\chi(\pi(\xi))t^{\varpi(\xi)}}$$

が定義できている。これを $E_\Xi(t;\chi)$ で表す。ここで $N_m(\chi)=\sum_{\substack{\xi\in\mathfrak{X}\\ \varpi(x)|m}}\varpi(x)\chi(\pi(\xi))^{m/\varpi(\xi)}$ とおき (補題 2 参照)、形式的冪級数

$$\exp\left(\sum_{m\geq 1}\frac{N_m(\chi)}{m}t^m\right)$$

を $Z_\Xi(t;\chi)$ であらわす。すると両辺の対数をとってから単純な計算を続けることにより、次を示すことができる。

命題 4 Δ を有限有向グラフ、X は Π_Δ の周期点のなす集合とする。このとき、任意の不変荷重 $\chi:X\to R$ に対して、$E_\Xi(t;\chi)=Z_\Xi(t;\chi)$ が成立する。

任意の写像 $\theta:\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to R$ が誘導する循環荷重 circ_θ が不変であることは明らかなので、グラフゼータにおいても、オイラー表示は常に指数表示に書き換えることができる。では逆はどうか。$\Xi\subset\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ は λ-不変とし、荷重 $\chi:X\to R$ も一般のものにとる。この場合でも $Z_\Xi(t;\chi)$ は定義できる。しかし、$E_\Xi(t;\chi)$ が定義されるには、χ の不変性が必要なので、この時点で $Z_\Xi(t;\chi)$ と $E_\Xi(t;\chi)$ は一般に同値ではないことがわかる。$Z_\Xi(t;\chi)$ のほうが $E_\Xi(t;\chi)$ より「弱い」表示である。荷重 χ が不変であれば、オイラー表示 $E_\Xi(t;\chi)$ の定義自体は可能だが、この段階でもまだ $Z_\Xi(t;\chi)$ は $E_\Xi(t;\chi)$ に等しくならない。実際

には、さらに不変荷重 χ が「乗法的」であれば、$Z_\Xi(t;\chi)$ を $E_\Xi(t;\chi)$ に書き換えることができる。荷重 χ が**乗法的**であるとは、任意の周期点 $x \in X_m$ に対し、$\chi_{km}(x) = \chi_m(x)^k$ が任意の自然数 $k \geq 1$ に対して成立することをいう。$x \in X_m$ ならば $x \in X_{km}$ に注意する。不変かつ乗法的な荷重 $\chi : X \to R$ を**指標**とよぶ。

命題 5 任意の指標 $\chi : X \to R$ に対し、$Z_\Xi(t;\chi) = E_\Xi(t;\chi)$ が成立する。

グラフゼータは循環荷重 χ に対する $Z_\Xi(t;\chi)$ である。そして、循環荷重 circ_θ が指標であることは容易にわかるので、次の結論を得る。

定理 6 ([6]) グラフゼータに対しては、指数表示とオイラー表示は同値な表示である。

4 橋本表示

Δ を有限有向グラフとする。ここでは $\Xi = \Pi_\Delta$ もしくは $\Pi^\flat_\Delta$ の場合のみを扱う。グラフゼータに対しては、指数表示とオイラー表示は同値になる。しかし、橋本表示は同値ではない。まず、グラフゼータに対する橋本表示の定義を行う。$\Delta = (V, \mathfrak{A})$ を有限有向グラフとする。有向辺集合 $\mathfrak{A}$ には全順序を与えておく。写像 $\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ に対して、正方行列 $(\theta(a,a'))_{a,a' \in \mathfrak{A}}$ を $M_\Delta(\theta)$ で表す。写像 θ が誘導する**荷重辺行列**という。$\theta = 1$ の場合がグラフ理論において通常いうところの**辺行列**である。変数 t をもつ形式的冪級数

$$\frac{1}{\det(I - tM_\Delta(\theta))}$$

を $H_\Delta(t;\theta)$ で表す。この定義は Δ の有向辺集合 $\mathfrak{A}$ と写像 $\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ のみに依存し、Ξ **の選択には依存しない**ことに注意する。

定義 7 (橋本表示) グラフゼータ $Z_\Delta(t;\theta)$ が**橋本表示をもつ**とは、等式 $Z_\Delta(t;\theta) = H_\Delta(t;\theta)$ が成立するときをいう。また、グラフゼータ $Z^\flat_\Delta(t;\theta)$ が**橋本表示をもつ**とは、等式 $Z^\flat_\Delta(t;\theta) = H_\Delta(t;\theta)$ が成立するときをいう。形式的冪級数 $H_\Delta(t;\theta)$ をグラフゼータ $Z^{(\flat)}_\Delta(t;\theta)$ の**橋本表示**という。

例えば、伊原ゼータは橋本表示をもつ。すなわち、等式 $Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}}) = H_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$ が成立する。その他の典型的なグラフゼータも、すべからく橋本表示をもつことが知られている。すると、グラフゼータなら常に橋本表示をもつ気がしてくるが、そうはならない。これまでは、伊原ゼータなりボーエン＝ランフォード・ゼータなり、あるいはバーソルディ・ゼータなりの個々の例を各論として扱う議論に限られていたこともあり、一般に「グラフ

ゼータとは何か」という問が不問に付されてきたことが、橋本表示の意味もまた不明瞭のまま推移してきたことの原因と思う。ともあれ、一旦グラフゼータの定義が定まり、そして橋本表示をもつことの意味も定まれば、橋本表示を持つ持たないの沙汰もその輪郭が明瞭に浮き上がり、さらには「橋本表示をもつ」ことの本質も、その簡素さをあらわにすことになる。$\Delta = (V, \mathfrak{A})$ は有限有向グラフ、$\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ は写像とする。

定義 8 (隣接条件 [6]) 写像 θ が隣接条件を満たすとは、$\theta(a, a') \neq 0$ ならば $\mathfrak{h}(a) = \mathfrak{t}(a')$ であるときにいう。写像 θ が被約隣接条件を満たすとは、$\theta(a, a') \neq 0$ ならば $\mathfrak{h}(a) = \mathfrak{t}(a')$ かつ $a^{-1} \neq a'$ であるときにいう。

定理 9 ([6]) 写像 θ が隣接条件を満たせば、グラフゼータ $Z_\Delta(t;\theta)$ は橋本表示をもつ。写像 θ が被約隣接条件を満たせば、グラフゼータ $Z^\flat_\Delta(t;\theta)$ は橋本表示をもつ。

写像 θ が被約隣接条件を満たせば、隣接条件を満たすことに注意する。θ が被約隣接条件を満たす場合、等号 $Z_\Delta(t;\theta) = Z^\flat_\Delta(t;\theta)$ の成立が定義よりわかる。よって、定理 6 (もしくは命題 5) より、$Z_\Delta(t;\theta)$、$E_\Delta(t;\theta)$、$Z^\flat_\Delta(t;\theta)$、$E^\flat_\Delta(t;\theta)$ の四者は一致する。一方、θ が隣接条件のみを満たす場合、一般には $Z_\Delta(t;\theta) \neq Z^\flat_\Delta(t;\theta)$ となる。これは閉路 $x \in X \setminus X^\flat$ で $\mathrm{circ}_\theta(x) \neq 0$ を満たすものが存在することに起因する。よって定理 9 は、θ が隣接条件のみを満たす場合には、等式 $Z^\flat_\Delta(t;\theta) = H_\Delta(t;\theta)$ が成立せず、等式 $Z_\Delta(t;\theta) = H_\Delta(t;\theta)$ のみが成立することになる。従って、グラフゼータ $Z^\flat_\Delta(t;\theta)$ は、オイラー表示 $E^\flat_\Delta(t;\theta)$ はもつが橋本表示はもたない。

例をみておく。伊原ゼータを定める写像 θ^{I} は被約隣接条件をみたす。$\theta^{\mathrm{I}}(a, a') \neq 0$ とする。もし、$a^{-1} = a'$ であれば $\mathfrak{h}(a) = \mathfrak{t}(a')$ より $\theta^{\mathrm{I}}(a, a') = 0$ で矛盾。よって、$a^{-1} \neq a'$ である。このとき、$\delta_{a^{-1}a'} = 0$。従って、仮定より $\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} \neq 0$、すなわち $\mathfrak{h}(a) = \mathfrak{t}(a')$ より、θ^{I} は被約隣接条件を満たすことがわかる。よって、$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}}) = Z^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}}) = H_\Delta(t;\theta^{\mathrm{I}})$ が従う。一方、ボーエン＝ランフォード・ゼータを誘導する写像 θ^{BL} は隣接条件を満たすが、被約隣接条件をみたさない。よって、$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BL}}) \neq Z^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BL}})$ である。そして、$Z_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BL}}) = H_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BL}})$ が成立するので、$Z^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BL}}) = H_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BL}})$ は成立しない。すなわち、グラフゼータ $Z^\flat_\Delta(t;\theta^{\mathrm{BL}})$ は橋本表示をもたない。

References

[1] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, *Eiseign. Math.* **45** (1999), 83-131.

[2] R. Bowen and O. Lanford, Zeta functions of restrictions of the shift transformation, *Proc. Symp. Pure Math.* **14** (1970), 43-50.

[3] K.-i. Hashimoto, On the zeta- and L-functions of finite graphs, *Internat. J. Math.* **1** (1990) 381-396.

[4] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two projective linear group over p-adic fields, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 219-235.

[5] H. Mizuno and I. Sato, The weighted zeta functions for graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B* **91** (2004), 169-183.

[6] H. Morita, Ruelle zeta functions for finite digraphs, *Lin. Alg. Appl.* **603** (2020), 329-358.

[7] H. Morita, On the definition of graph zeta functions, in preparation.

[8] I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a graph, *Int. J. Algebra* **1** (2007), no. 5-8, 269-281.

[9] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 室蘭工業大学数理談話会報告集, 2011.

[10] J. -P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[11] H. Stark and A. Terras, Zeta functions of finite graphs and coverings, *Adv. Math.* **121** (1996), 124-165.

[12] T. Sunada, L-functions in Geomery and some Applications, in *Lecture Note in Math.* **1201**, pp. 266-284, Springer-Verlag, New York, 1988.

[13] 砂田利一, 基本群とラプラシアン, 紀伊国屋書店, 1988.