合成数位数へのモジュラームーンシャインの一般化
(A generalization of modular moonshine to composite order)

浦野　慧 (Satoru Urano)

筑波大学 (University of Tsukuba)

1　概要

モンストラスムーンシャインとはモンスター群 $\mathbb{M}$ の既約表現（ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$）の次元と j-不変量の係数との不思議な関係のことである。より一般には、モンスター群の任意の元 g に対して、McKay-Thompson 級数 $T_g(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tr}(g|V_n)q^{n-1}(q = e^{2\pi i\tau})$ が $SL_2(\mathbb{R})$ の種数 0 の合同部分群に対する Hauptmodul となることである。モンストラスムーンシャイン予想は 1992 年に Borcherds によって、弦理論や頂点作用素代数、一般 Kac-Moody 代数を用いて証明が与えられた [1]。2010 年にモンスター群でない有限群に対しても、モジュラー関数と関係するという Mathieu ムーンシャイン現象の発見以来、ムーンシャインの分野はより活発に研究されている。中でもモジュラームーンシャインとは、有限環上のモンスターの部分群の表現論とモジュラー関数の間の関係のことである。これらを結ぶ有限環上の頂点代数が存在することはすでに知られている。この関係は 1994 年に Ryba によって、素数位数のモンスター群の元の場合に示唆され、Borcherds, Ryba, Carnahan によって解決に至った [2],[3],[4]。解決は Tate コホモロジーを用いて行われ、モンスター頂点代数の Tate コホモロジーに関する Brauer 指標が具体的な Hauptmodul の線形結合で表せる。素数位数でないモンスター群の元に対しても、同様な関係性がみられるのだろうかと疑問を抱くのは自然であるが、モジュラームーンシャインの合成数への一般化については知られていない。

本稿は、Borchards-Ryba [3],Borchards [2] に基づいて既に知られているモジュラームーンシャインの結果を報告し、モジュラームーンシャインの一般化に際しての問題点やいくつかの研究結果を述べる。

2　素数位数のモジュラームーンシャイン

以下、G を有限群、p を素数、V を $V^\natural$ の自己双対整形式とする。

Definition 2.1. A を G-加群、Nr をノルム写像 $A \to A; a \mapsto \sum_{g\in G} g(a)$ とする。このとき、i 次 Tate コホモロジー $\hat{H}^i(G, A)$ を次のように定義する。

$$\hat{H}^i(G,A) = \begin{cases} H_{-i-1}(G,A) & (i \leq -2) \\ \mathrm{Ker}(Nr)/\langle ga - a | a \in A, g \in G\rangle & (i = -1) \\ A^G/\mathrm{Im}(Nr) & (i = 0) \\ H^i(G,A) & (i \geq 1) \end{cases}$$

ここで、A^G は A の最大 G-不変部分加群、$H_i(G, A)$ は i 次ホモロジー、$H^i(G, A)$ は i 次コホモロジーである。

G が巡回群 $\langle g\rangle$ のとき、$\hat{H}^i(\langle g\rangle, A)$ を $\hat{H}^i(g, A)$ と書くこととする。

Tate コホモロジーについて、以下が成り立つ。

1. G-加群の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して、長完全列
$$\cdots \to \hat{H}^{i-1}(G, C) \to \hat{H}^i(G, A) \to \hat{H}^i(G, B) \to \hat{H}^i(G, C) \to \hat{H}^{i+1}(G, A) \to \cdots$$
を得る。
2. G が p-群、A が自由 $\mathbb{Z}[1/n][G]$-加群 with $(p, n) = 1$ のとき、$\hat{H}^i(G, A) \cong \hat{H}^i(G, A \otimes \mathbb{Z}_p)$ for any $i \in \mathbb{Z}$. ここで、$\mathbb{Z}_p$ は p-進整数環である。
3. $\hat{H}^i(g, A) \cong \hat{H}^{i+2}(g, A)$ for any $i \in \mathbb{Z}$.
4. $\hat{H}^0(g, A), \hat{H}^{-1}(g, A)$ は共に $\mathbb{Z}/|g|\mathbb{Z}$-加群である。

ここからこの章において、g を位数が素数 p である G の元とする。

Theorem 2.2 (モジュラームーンシャイン [2],[3],[4])**.** h を中心化群 $C_{\mathbb{M}}(g)$ の p-regular 元とする。次数付き Brauer 指標 $\widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^i(g, V)) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^i(g, V_n))q^{n-1} (i = 0, 1)$ に対して、以下の関係式が成り立つ。

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^0(g, V)) = \begin{cases} T_{gh}(\tau) & (g \in pA, 3C) \\ \dfrac{T_{gh}(\tau) - T_{gh}(\tau + 1/2)}{2} & (g \in 2B) \\ \dfrac{T_{gh}(\tau) + T_{gh\sigma}(\tau)}{2} & (g \in pB, 2|(p-1)) \end{cases},$$

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^1(g, V)) = \begin{cases} 0 & (g \in pA, 3C) \\ \dfrac{-T_{gh}(\tau) - T_{gh}(\tau + 1/2)}{2} & (g \in 2B) \\ \dfrac{-T_{gh}(\tau) + T_{gh\sigma}(\tau)}{2} & (g \in pB, 2|(p-1)) \end{cases}.$$

ここで、$\sigma \in C_{\mathbb{M}}(g)/O_p(C_{\mathbb{M}}(g))$ は $\hat{H}^0(g, V)$ 上で 1 として作用し、$\hat{H}^1(g, V)$ 上で -1 として作用する対合、$O_p(C_{\mathbb{M}}(g))$ は $C_{\mathbb{M}}(g)$ の最大正規 p-部分群である。

モジュラームーンシャインの証明を簡単に述べる。紹介する命題や定理の詳しい証明は [2],[3] に委ねる。

Theorem 2.2 モジュラームーンシャインの証明. Tate コホモロジーの性質 2 より、$\mathbb{Z}_p[g]$-加群として考える。$\mathbb{Z}_p[g]$-直既約加群について以下の分類定理が存在する。

Theorem 2.3 ([7])**.** $\mathbb{Z}_p$-自由な有限生成 $\mathbb{Z}_p[g]$-直既約加群は 3 つ存在する。それらは自明な加群 $\mathbb{Z}_p$、群環 $\mathbb{Z}_p[g]$、自然な写像 $\mathbb{Z}_p[g] \to \mathbb{Z}_p$ の核 I である。

これらの直既約加群の Tate コホモロジーを計算すると、

- $\hat{H}^0(g, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \hat{H}^1(g, \mathbb{Z}_p) = 0.$
- $\hat{H}^0(g, \mathbb{Z}_p[g]) = \hat{H}^1(g, \mathbb{Z}_p[g]) = 0.$
- $\hat{H}^0(g, I) = 0, \hat{H}^1(g, I) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$

となる。この結果から、Brauer 指標とトレースを求めることで次の命題が成り立つ。

Proposition 2.4 ([3]). $h \in C_G(g)$ を p-regular 元、A を有限生成 $\mathbb{Z}$-自由 $\mathbb{Z}[\langle g,h\rangle]$-加群とする。$\widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^*(g,A)) := \widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^0(g,A)) - \widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^1(g,A))$ としたとき、$\widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^*(g,A)) = \mathrm{Tr}(gh|A)$ が成り立つ。

Corollary 2.5 ([3]). $g \in \mathbb{M}$ の位数を p とする。$h \in C_{\mathbb{M}}(g)$ を p-regular 元とすると、

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^*(g,V_n))q^{n-1} = T_{gh}(\tau)$$

となる。

この系により、Tate コホモロジー $\hat{H}^*(g,V)$ の次数付き Brauer 指標が Hauptmodul となることがわかった。以降は $\hat{H}^0(g,V), \hat{H}^1(g,V)$ の次数付き Brauer 指標がそれぞれ Hauptmodul の線形結合で記述できるかということを示す。元 $g \in \mathbb{M}$ の場合分けを行う。

Case. $3A, 3C, 5A, 7A, 11A, 23A$

$g \in \mathbb{M}$ を Mathieu 群 M_{24} の奇素数元とする。$\hat{H}^1(g,V) = 0$ を示す。

置換加群に関する補題を紹介する。

Lemma 2.6 ([3]). A を no p-torsion な置換 $\mathbb{Z}_p[g]$-加群とする。このとき、$\hat{H}^1(g,A) = 0$.

Lemma 2.7 ([3]). 置換加群は直和、テンソル積、対称冪について閉じている。

証明には上記の補題とリーチ格子 Λ の格子頂点代数の整形式 V_Λ を用いる。事実として、V_Λ は置換加群である [3]。よって、$\hat{H}^1(g,V_\Lambda) = 0$ となる。

Theorem 2.8 ([6]). $V \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ は $V^{00} \oplus V^{01} \oplus V^{10} \oplus V^{11}$ と固有空間分解される。ここで、$2B$-pure 4-群の元 h_1, h_2 による固有空間を $V^{ij} (i,j = 0,1)$ とする *i.e.* $V^{ij} = \{\mathbb{Z}[1/2]v \in V \otimes \mathbb{Z}[1/2] | h_1 v = (-1)^i v, h_2 v = (-1)^j v\}$。さらに、$V^{01}, V^{10}$, V^{11} は $2^{24}.\mathrm{Aut}(\Lambda)$-加群として全て同型である。

$2B$ の元による固有値 1 の $V_\Lambda \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ の固有空間 V_Λ^0 は $2^{24}.\mathrm{Aut}(\Lambda)$-加群として $V^{00} \oplus V^{01}$ と同型であるという関係から、$\hat{H}^1(g, V \otimes \mathbb{Z}_p) = \hat{H}^1(g,V) = 0$ が従う。

Case. $2A, 2B$

Case. $3A, 3C, 5A, 7A, 11A, 23A$ では g が奇素数であったため、$2B$-pure 4-群によって固有空間分解できた。Theorem 2.8 と同様に、g の位数が 2 のときは $3B$-pure 9-群によって、$V \otimes \mathbb{Z}[1/3, \omega]$ が固有空間空間分解でき、$V_\Lambda \otimes \mathbb{Z}[1/3,\omega]$ の固有空間との関係性を用いて証明を行った [3]。ここで、ω は 1 の原始 3 乗根である。

Case. non-Fricke 元

$g \in \mathbb{M}$ を奇素数位数の non-Fricke 元とする。 このとき、それぞれの中心化群は次の表のようになる [5]。

class	$C_{\mathbb{M}}(g)$
$3B$	$3^{1+12}.2.Suz$
$5B$	$5^{1+6}.2.HJ$
$7B$	$7^{1+4}.2.A_7$
$13B$	$13^{1+2}.2.A_4$

表から $2B$ の元 $\sigma \in C_{\mathbb{M}}(g)/O_p(C_{\mathbb{M}}(g))$ が存在することがわかり、[2] で σ が $\hat{H}^0(g,V)$ で 1、$\hat{H}^1(g,V)$ で -1 として作用することが証明された。さらに、Proposition 2.4 より、 $T_{gh\sigma}(\tau) = \widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^0(g,V)) + \widetilde{\mathrm{Tr}}(h|\hat{H}^1(g,V))$ が成り立つ。

Case. 上記以外の Fricke 元

$g \in \mathbb{M}$ を上記以外の Fricke 元とする。

Theorem 2.3 より、$\mathbb{Z}_p[g]$-直既約加群は 3 つのみであり、それらの直既約加群のテンソル積を求めると、次の補題が成り立つ。

Lemma 2.9 ([2]). A, B を $\mathbb{Z}_p[g]$-加群とする。このとき、$\bigoplus_{i=0,1} \hat{H}^i(g, A \otimes B) = \bigoplus_{i,j=0,1} \hat{H}^i(g, A) \otimes \hat{H}^j(g, B)$ が成り立つ。

この補題は Tate コホモロジーはテンソル積を保っていることを示している。

K を $\mathbb{Z}_p[g]$ の Green 環とする。K は 3 つの元 $[\mathbb{Z}_p], [\mathbb{Z}_p[g]], [I]$ を基底とする自由 $\mathbb{Q}$-加群である。

Lemma 2.10 ([2]). 環準同型写像 $K \to \mathbb{Q}$ は $\dim, \mathrm{Tr}(g|\cdot), f$ の 3 つであり、次のような値をとる。

- $\dim([\mathbb{Z}_p]) = 1, \dim([\mathbb{Z}_p[g]]) = p, \dim([I]) = p - 1.$
- $\mathrm{Tr}(g|[\mathbb{Z}_p]) = 1, \mathrm{Tr}(g|[\mathbb{Z}_p[g]]) = 0, \mathrm{Tr}(g|[I]) = -1.$
- $f([\mathbb{Z}_p]) = 1, f([\mathbb{Z}_p[g]]) = 0, f([I]) = 1.$

任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$c_g^+(n) := \mathrm{Tr}(g|[V_n]) = \dim(\hat{H}^0(g, V_n)) - \dim(\hat{H}^1(g, V_n))$, $c_g^-(n) := f([V_n]) = \dim(\hat{H}^0(g, V_n)) + \dim(\hat{H}^1(g, V_n))$ と定義する。

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_g^+(n) q^{n-1}$ はムーンシャインの結果から、Hauptmodul であることが既にわかっている。計算機によって以下の定理が成り立つ。

Theorem 2.11 ([2]). $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_g^-(n) q^{n-1}$ は *Hauptmodul* である。

さらに、計算機によって $c_g^+(n) = c_g^-(n)$ を示すことで、$\hat{H}^1(g, V) = 0$ であることを証明した。 □

3 合成数位数へのモジュラームーンシャインの一般化

3 章では合成数位数へモジュラームーンシャインを一般化する際の問題点を述べ、いくつかの研究結果を紹介する。

$(R, \mathfrak{m}_R)$ を mixed 標数 $(0, p)$ の離散付値環、$v : R \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を R の全射な付値とする。ここで、mixed 標数とは分数体 $Frac(R)$ の標数が 0, 剰余体 $R/\mathfrak{m}_R$ の標数が p であることを意味する。g の位数を N とし、p は N の素因数とする。また、h を N-regular 元とする。このとき、モジュラームーンシャインの証明において主に 2 つの問題点が生じる。

- Brauer 指標は $R/\mathfrak{m}_R[h]$-加群と p-regular 元に対してのみ定義されている。一般に、Tate コホモロジーは $R/\mathfrak{m}_R^n[h]$-加群 $(n > 1)$ をとることがあり、Brauer 指標を適用できない。
- 一般に $\mathbb{Z}_p[g]$-直既約加群の個数は無限個存在する [8]。特に、これは $p^3|N$ のときに成り立つ。

Brauer 指標の一般化にあたる p-Brauer 指標を次のように定義した。

Definition 3.1 (p-Brauer 指標, [10]). M を有限の長さの $R[h]$-加群とする。M は組成列 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ を持つとする。このとき、N-regular 元 h に対する M の p-Brauer 指標 $\widetilde{\mathrm{Tr}}_p(h|M)$ を次のように定義する。

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}_p(h|M) := \frac{1}{v(p)} \sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}(h|\widetilde{M_i})$$

ここで、 $\widetilde{M_i}$ は R-自由 $R[h]$-加群 s.t. $M_i/M_{i-1} \cong \widetilde{M_i} \otimes_{R[h]} R/\mathfrak{m}_R[h]$ である。

$h=1$ のとき、$\widetilde{\mathrm{Tr}}_p(1|M) = \dfrac{\mathrm{length}(M)}{v(p)}$ である。

p-Brauer 指標を用いて Tate コホモロジーを計算すると、Proposition 2.4 の一般化となる定理が得られた。

Theorem 3.2 ([10])**.** N を素因数分解すると $\prod_i p_i^{n_i}$ となるとする。$h \in C_G(g)$ を N-regular 元、A を有限生成 R-自由 $R[\langle g, h\rangle]$-加群とする。このとき、

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}_{p_i}(h|\hat{H}^*(g,A)) = \textstyle\sum_{k=1}^{N-1} a_{k,p_i} \mathrm{Tr}(g^k h|A),$$
$$a_{k,p_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{(p_i,d)=1, d|N} \varphi(N/d)} \left(n_i - l - \dfrac{n_i - l - 1}{p_i} \right) & (p_i^{n_i} \nmid k) \\ 0 & (p_i^{n_i} | k) \end{cases}$$

ここで、l は $(k, p_i^{n_i}) = p_i^l$ を満たす整数、φ は Euler のトーシェント関数である。

Corollary 3.3 ([10])**.** $g \in \mathbb{M}$ の位数を $N = \prod p_i^{n_i}$、$h \in C_{\mathbb{M}}(g)$ を N-regular 元とすると、

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{Tr}}_{p_i}(h|\hat{H}^*(g, V_n \otimes \mathbb{Z}_{p_i}))q^{n-1} = \sum_{d|N} a_{d,p_i} \varphi\left(\frac{N}{d}\right) T_{g^d h}(\tau).$$

この系を用いると、任意の Fricke 元に対して Tate コホモロジー $\hat{H}^1(g,V)$ が 0 となるという Borcherds の予想 [2] の反例を与えることができる。

反例 $(g \in 8A)$ [10]

$g \in \mathbb{M}$ を $8A$ の元とする。 このとき、g は Fricke 元である。Corollary 3.3 より、

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{length}(\hat{H}^*(g,V_n))q^{n-1} = a_{1,2}\varphi(8)T_g(\tau) + a_{2,2}\varphi(4)T_{g^2}(\tau) + a_{4,2}\varphi(2)T_{g^4}(\tau)$$

を得る。

q^2 の係数を比較すると、$\mathrm{length}(\hat{H}^0(g,V_3)) - \mathrm{length}(\hat{H}^1(g,V_3)) = -256$ となり、$\hat{H}^1(g,V_3) \neq 0$ が従う。よって、 $\hat{H}^1(g,V) \neq 0$. □

Tate コホモロジー $\hat{H}^1(g,V)$ が任意の Fricke 元では 0 とならないことがわかった。g だけではなく、すべての i に対して、g^i も Fricke 元であるとき、$\hat{H}^1(g,V) = 0$ となると予想している。

Theorem 2.2 では、直既約加群の種類が 3 つであることを用いていた。合成数位数へ一般化する際に、直既約加群の個数が有限個である位数が p^2 の場合について考える。

以下、g の位数を p^2 とする。$\mathbb{Z}_p[g]$-直既約加群について以下の分類定理が存在する。

Theorem 3.4 ([7])**.** $\mathbb{Z}_p$-自由な有限生成 $\mathbb{Z}_p[g]$-直既約加群は $4p+1$ 個存在する。それらは次のようになる。
$A := \mathbb{Z}_p$, $D := \mathbb{Z}_p[g]$, $B := D/(1+g+\cdots+g^{p-1})D$, $E := D/(g^p-1)D$,

- $C := D/(1+g^p+\cdots+g^{p(p-1)})D.$
- C^A *with* $0 \to A \to C^A \to C \to 0$ *exact.*
- C^B *with* $0 \to B \to C^B \to C \to 0$ *exact.*
- $C_i^{A\oplus B} (1 \le i \le p-1)$ *with* $0 \to A \oplus B \to C_i^{A\oplus B} \to C \to 0$ *exact.*
- $C_i^E (1 \le i \le p-1)$ *with* $0 \to E \to C_i^E \to C \to 0$ *exact.*
- $C_i^B (1 \le i \le p-2)$ *with* $0 \to B \to C_i^B \to C \to 0$ *exact.*
- $C_i^{A\oplus E} (1 \le i \le p-2)$ *with* $0 \to A \oplus E \to C_i^{A\oplus E} \to C \to 0$ *exact.*

K を $\mathbb{Z}_p[g]$ の Green 環とする。これは $4p+1$ 個の $\mathbb{Z}_p[g]$-直既約加群から得られる基底を持つ自由 $\mathbb{Q}$-加群である。直既約加群のテンソル積から、環準同型写像 $K \to \mathbb{Q}$ を求めた。例としてよく知られた環準同型写像は次の値をとる。

	dim	$\mathrm{Tr}(g\|\cdot)$	$\mathrm{Tr}(g^p\|\cdot)$	f
$[A]$	1	1	1	1
$[B]$	$p-1$	-1	$p-1$	$p-1$
$[C]$	p^2-p	0	$-p$	p
$[D]$	p^2	0	0	0
$[E]$	p	0	p	p
$[C^A]$	p^2-p+1	1	$-p+1$	$p-1$
$[C^B]$	p^2-1	-1	-1	1
$[C_i^{A\oplus B}]$	p^2	0	0	$2i$
$[C_i^E]$	p^2	0	0	$2i$
$[C_i^B]$	p^2-1	-1	-1	1
$[C_i^{A\oplus E}]$	p^2+1	1	1	$2i+1$

上記の他にも環準同型写像が存在するが、ここでは省略する。

この結果とムーンシャイン、モジュラームーンシャインより、$g \in 4A$ に対して、$V \otimes \mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2[g]$-加群で分解することができた。$V_n \otimes \mathbb{Z}_2$ は n が偶数のとき、A と D に分解され、n が奇数のとき、C^A と D に分解される。

参考文献

[1] R. E. Borcherds, “Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras”, Invent. Math. 109, 405-444, (1992).

[2] R. E. Borcherds, “Modular Moonshine III”, Duke Math. Journal Vol. 93 No. 1, 129-154, (1998).

[3] R. E. Borcherds, A.J. E. Ryba, “Modular Moonshine II”, Duke Math. Journal Vol. 83 No. 2, 435-459, (1996).

[4] S. Carnahan, “A self-dual integral form of the moonshine module”, SIGMA Vol. 15, 030, 36 pages, (2019).

[5] J. H. Conway, S. Norton, “Monstrous moonshine”, Bull. London. Math. Soc. 11, 308-339, (1979).

[6] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, “Vertex operator algebras and monster”, Academic Press, (1988).

[7] A. Heller, I. Reiner, “Representations of cyclic groups in rings of integers, I”, Ann. of Math. Vol. 76, No. 1, 73-92, (1962).

[8] A. Heller, I. Reiner, “Representations of cyclic groups in rings of integers, II”, Ann. of Math. Vol. 77, No. 2, 318-328, (1963).

[9] I. Reiner, “The integral representation ring of a finite group”, Michi- gan Math. J. 12, 11-22, (1965).

[10] S. Urano, “A generalization of modular moonshine to composite order”, arXiv:2002.08620.