Scaling limits for the Gibbs states on distance-regular graphs with classical parameters

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
田中 太初

Hajime Tanaka
Research Center for Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Information Sciences
Tohoku University

1 はじめに

本稿の内容は Masoumeh Koohestani 氏、及び尾畑伸明氏との共同研究に基づく。

量子確率論の立場からのグラフのスペクトルの研究 (cf. [7]) では、中心極限定理 (CLT) の類似を与えることは興味深いトピックである。これは Cayley グラフの場合に特に自然な問題意識であり、ここから「独立性」の概念の種々の亜種が生じる。この文脈で重要な他のクラスのグラフとして、**距離正則グラフ** [2, 3, 4] が挙げられる。Hora [5] は Hamming グラフや Johnson グラフを含む距離正則グラフのいくつかの系列について CLT を示したが、CLT を得る上でその後確立された隣接行列の**量子分解**の手法は、距離正則グラフととりわけ相性が良い。なお、量子分解の手法は理論を簡明にするだけでなく、**量子中心極限定理** (QCLT) の定式化にもつながった。

本稿では所謂**古典的パラメータ**を持つ距離正則グラフの QCLT について議論する。このような距離正則グラフの交叉数は直径 d と三つのパラメータ q, α, β で表される。このうち q は**基**と呼ばれ、$d \geqslant 3$ ならば $0, -1$ 以外の整数値を取る。これらは距離正則グラフの中でも特殊なものとの印象を持たれるかもしれないが、現時点で知られている距離正則グラフの (d が発散する) 無限系列は全て、古典的パラメータを持つか、或いはそのようなものに密接に関連している。従って、古典的パラメータを持つ距離正則グラフを考察することで、知られている距離正則グラフの大部分を感覚的にはカバーすることになる。$q = 1$ となる例は全て決定されており、Hamming グラフと Johnson グラフを含む 4 系列しかない。これらについては Hora [5, 6] や Hora–Obata の本 [7] で本質的に全て取り扱われているので、本稿では $q \neq 1$ の場合を考察し、$d \to \infty$ としたときの QCLT の極限の存在条件を q, α, β を用いて与える。

2 代数的確率空間、距離正則グラフ、及び量子中心極限定理

代数的確率空間とは、$\mathbb{C}$ 上の $*$-代数 $\mathcal{A}$ とその上の状態 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ の組 $(\mathcal{A}, \varphi)$ のことである。ここで φ が**状態**であるとは、線形写像であって、$\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ かつ $\varphi(a^* a) \geqslant 0$ $(a \in \mathcal{A})$ を満たすことをいう ($1_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の単位元を表す)。$\mathcal{A}$ の元は (代数的) **確率変数**と呼ばれる。

確率変数 $a\in\mathcal{A}$ は $a^*=a$ を満たすとき**実**であるという。実確率変数 $a\in\mathcal{A}$ に対して、 $\mathbb{R}$ 上の Borel 確率測度 μ で

$$\varphi(a^i)=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^i\mu(d\xi)\qquad(i=0,1,2,\dots)\tag{1}$$

を満たすものが存在する。ただし μ は一般には一意的ではない。

本稿ではグラフから得られる代数的確率空間を取り扱う。以後 $\Gamma=(X,R)$ は有限単純連結グラフとする。X は頂点集合、R は辺集合である。2 頂点 x,y 間の距離を $\partial(x,y)$ で表し、Γ の直径を $d=\max\{\partial(x,y):x,y\in X\}$ とする。また、A を Γ の隣接行列とし、$\mathcal{A}(\Gamma)$ を隣接代数とする。以下、$\mathcal{A}(\Gamma)$ 上の状態の例を 3 種類挙げる：

トレース状態：これは

$$\varphi_{\mathrm{tr}}(B)=\frac{1}{|X|}\operatorname{tr}(B)\qquad(B\in\mathcal{A}(\Gamma))$$

で定められる。この場合、確率変数 A に対する (1) の確率測度 μ は一意的であり、Γ の**スペクトル分布**で与えられる：

$$\mu(\theta_i)=\frac{m_i}{|X|}\qquad(i=0,1,\dots,e)$$

ここで $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_e$ は Γ の異なる固有値であり、m_i は Γ のスペクトルに於ける θ_i の重複度を表す。

真空状態：「基点」$o\in X$ を固定し、

$$\varphi_0(B)=\langle\hat{o},B\hat{o}\rangle=B_{o,o}\qquad(B\in\mathcal{A}(\Gamma))$$

で定められる。ここで $\hat{o}$ は o の特性ベクトルを表し、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は通常のエルミート内積である。

Gibbs 状態：これは上の φ_0 の一般化である。$t\in\mathbb{R}$ を固定し、

$$\varphi_t(B)=\sum_{x\in X}t^{\partial(x,o)}\langle\hat{x},B\hat{o}\rangle=\sum_{x\in X}t^{\partial(x,o)}B_{x,o}\qquad(B\in\mathcal{A}(\Gamma))$$

で定められる。ただし、$0^0:=1$ と解釈する。Gibbs 状態は**変形真空状態**とも呼ばれる。なお、上の二つの例と異なり、Gibbs 状態は実際状態になるとは限らない (cf. Lemma 1)。

以後、$\Gamma=(X,R)$ は**距離正則グラフ**とする。すなわち、A_i を Γ の距離 i 行列とするとき、ある非負整数 a_i,b_i,c_i $(i=0,1,\dots,d)$ が存在して

$$AA_i=b_{i-1}A_{i-1}+a_iA_i+c_{i+1}A_{i+1}\qquad(i=0,1,\dots,d)\tag{2}$$

となる。ただし、$b_{-1}A_{-1}=c_{d+1}A_{d+1}:=0$ とし、また $b_d=c_0:=0$ とおく。このとき Γ は正則であり、次数 k は $k=b_0$ で与えられる。Γ の距離 i グラフもまた正則であり、その次数 k_i は

$$k_i=\frac{b_0b_1\cdots b_{i-1}}{c_1c_2\cdots c_i}\qquad(i=0,1,\dots,d)\tag{3}$$

となる。(2) より

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \mathrm{span}\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$$

となる。特に、$\mathcal{A}(\Gamma)$ の各行列は対角成分が一定であり、従って $\varphi_{\mathrm{tr}} = \varphi_0$ となる。Gibbs 状態 φ_t もまた基点 $o \in X$ の選び方に依らず、

$$\varphi_t(B) = \frac{1}{|X|}\,\mathrm{tr}(K_t B) \qquad (B \in \mathcal{A}(\Gamma))$$

と書ける。ただしここで

$$K_t = \left(t^{\partial(x,y)}\right)_{x,y\in X} = A_0 + tA_1 + t^2 A_2 + \cdots + t^d A_d \in \mathcal{A}(\Gamma)$$

である。この考察から直ちに次が得られる：

Lemma 1. *If Γ is distance-regular, then the Gibbs state φ_t is a state on $\mathcal{A}(\Gamma)$ if and only if the matrix K_t is positive semidefinite.*

Gibbs 状態 φ_t に於ける確率変数 A の平均及び分散は次で表される (cf. [7, Lemma 3.25])：

$$\varphi_t(A) = tk, \qquad \Sigma_t^2(A) = \varphi_t((A - tkI)^2) = k(1-t)(1+t+ta_1) \tag{4}$$

Lemma 1 の観点からは、次の集合が重要である：

$$\pi(\Gamma) = \{t \in \mathbb{R} : K_t \text{ is positive semidefinite}\} \tag{5}$$

常に $0, 1 \in \pi(\Gamma)$ であり、従って $\pi(\Gamma) \neq \emptyset$ である。また K_t の 2×2 主小行列を考えることで次が分かる：

$$\pi(\Gamma) \subset [-1, 1]$$

基点 $o \in X$ に関して、隣接行列 A の**量子分解**が得られる：

$$A = A^+ + A^- + A^\circ$$

ここで、$\epsilon \in \{+, -, \circ\}$ について

$$(A^\epsilon)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \sim y,\ \partial(x,o) = \partial(y,o) + i_\epsilon, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad (x, y \in X)$$

とする。ただし、$i_+ := 1$, $i_- := -1$, $i_\circ := 0$ である。単位列ベクトル Φ_i を

$$\Phi_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} A_i \hat{o} \qquad (i = 0, 1, \dots, d)$$

で定め (cf. (3))、$\mathbb{C}$-ベクトル空間

$$W(\Gamma) = \mathrm{span}\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_d\}$$

を考えると、

$$\varphi_t(B) = \sum_{i=0}^{d} t^i \sqrt{k_i} \langle \Phi_i, B\Phi_0 \rangle \qquad (B \in \mathcal{A}(\Gamma)) \tag{6}$$

となる。また、(2) 及び (3) より

$$A^+\Phi_i = \sqrt{c_{i+1}b_i}\Phi_{i+1}, \qquad A^-\Phi_i = \sqrt{c_i b_{i-1}}\Phi_{i-1}, \qquad A^\circ\Phi_i = a_i\Phi_i \tag{7}$$

となる $(i = 0, 1, \dots, d)$。ただし $\sqrt{c_{d+1}b_d}\Phi_{d+1} = \sqrt{c_0 b_{-1}}\Phi_{-1} := 0$ である。

Remark 2. A^+, A^-, A° で生成される代数 $\tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ は、$|X| = 1$ の場合を除き非可換であり、o に関する Γ の **Terwilliger 代数** (cf. [9, 10, 11]) の部分代数となる。これら二つの代数が一致する条件については [12] で議論されている。$W(\Gamma)$ は Terwilliger 代数の既約加群であり、**主加群**と呼ばれる。

[7, Section 3.4] で確立された、Gibbs 状態 φ_t に於ける距離正則グラフに対する QCLT を復習する。以後 Λ を無限有向集合とし、$(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を距離正則グラフのネット (有向点属) とする。記号の簡略化のため、添字「λ」は通常省略する。X, d, k, a_i, b_i, c_i 等は Γ の関数とみなす。また、各 Γ に対して $\Sigma_t^2(A) > 0$ となる $t \in \pi(\Gamma)$ を固定し (cf. (4))、やはり Γ の関数とみなす。本稿では極限分布が無限サポートを持つ場合を取り扱うので、

$$d \to \infty$$

を仮定する。なお、極限を取る際には平均 0 及び分散 1 となるように、次の正規化を考える (cf. (4))：

$$\frac{A - tkI}{\Sigma_t(A)} = \tilde{A}^+ + \tilde{A}^- + \tilde{A}^\circ \tag{8}$$

ただしここで

$$\tilde{A}^\pm = \frac{A^\pm}{\Sigma_t(A)}, \qquad \tilde{A}^\circ = \frac{A^\circ - tkI}{\Sigma_t(A)}$$

である。また、

$$\overline{\omega}_i = \frac{c_i b_{i-1}}{\Sigma_t^2(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, d), \qquad \overline{\alpha}_i = \frac{a_{i-1} - tk}{\Sigma_t(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, d+1)$$

とすると、(7) より

$$\tilde{A}^+\Phi_i = \sqrt{\overline{\omega}_{i+1}}\Phi_{i+1}, \qquad \tilde{A}^-\Phi_i = \sqrt{\overline{\omega}_i}\Phi_{i-1}, \qquad \tilde{A}^\circ\Phi_i = \overline{\alpha}_{i+1}\Phi_i$$

となる $(i = 0, 1, \dots, d)$。ただし $\sqrt{\overline{\omega}_{d+1}}\Phi_{d+1} = \sqrt{\overline{\omega}_0}\Phi_{-1} := 0$ である。さらに

$$\overline{\gamma}_i = t^i\sqrt{k_i} \qquad (i = 0, 1, \dots, d)$$

とし (cf. (6))、次の極限を考える：

$$\overline{\omega}_i \to \omega_i, \quad \overline{\alpha}_i \to \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots), \qquad \overline{\gamma}_i \to \gamma_i \quad (i = 0, 1, \dots)$$

これらの極限は一般には存在しないので、次の条件を課す：

Assumption 3. With the above situation, we assume that the limits ω_i, α_i, and γ_i exist and that $\omega_i > 0$ for all i. We note that $\gamma_0 = 1$.

Assumption 3 の下で、固定した基底 $\{\Psi_i : i = 0, 1, \dots\}$ を持つ無限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathcal{W}$ を考え、$\{\Psi_i : i = 0, 1, \dots\}$ が正規直交基底となるようなエルミート内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を与える。$\mathcal{W}$ 上の線形作用素 B^+, B^-, B° を

$$B^+\Psi_i = \sqrt{\omega_{i+1}}\Psi_{i+1}, \qquad B^-\Psi_i = \sqrt{\omega_i}\Psi_{i-1}, \qquad B^\circ\Psi_i = \alpha_{i+1}\Psi_i \qquad (i = 0, 1, \dots)$$

により定める。ただし $\sqrt{\omega_{-1}}\Psi_{-1} := 0$ とする。B^+, B^- は互いの随伴作用素となっていることに注意する。四つ組 $(\mathcal{W}, \{\Psi_i\}, B^+, B^-)$ は、**Jacobi 列** $\{\omega_i\}$ に付随する**相互作用 Fock 空間**と呼ばれる。

Remark 2 で導入した非可換代数 $\tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ は $\tilde{A}^+, \tilde{A}^-, \tilde{A}^\circ$ によっても生成されるが、Gibbs 状態 φ_t の定義域を $\tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ に拡張することを考えよう (cf. (6))。この拡張はやはり基点 $o \in X$ の取り方には依らないが、$\tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ の状態になっているとは限らない (Lemma 1 より $\mathcal{A}(\Gamma)$ の状態ではある)。Gibbs 状態に関する QCLT は以下のように述べられる：

Theorem 4 ([7, Theorem 3.29])**.** *With reference to Assumption 3, we have*

$$\varphi_t(\tilde{A}^{\epsilon_m} \cdots \tilde{A}^{\epsilon_1}) \to \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \langle \Psi_i, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_1}\Psi_0 \rangle$$

for any $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{+, -, \circ\}$ *and* $m = 1, 2, \dots$.

Remark 5. (1) より、次を満たす $\mathbb{R}$ 上の Borel 確率測度 μ_∞ が存在する：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \langle \Psi_i, (B^+ + B^- + B^\circ)^m \Psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^m \mu_\infty(d\xi) \qquad (m = 1, 2, \dots)$$

この μ_∞ は Gibbs 状態に関する A の**漸近正規スペクトル分布**と呼ばれ、これを求め、記述することは興味深い問題である。

なお、Hora–Obata [7, Section 3.4] はある m について $\omega_m = 0$ となる場合も考察した (このとき μ_∞ のサポートは有限となる)。しかしながら、Assumption 3 のように全ての i について $\omega_i > 0$ となる場合に限れば、γ_i の存在の仮定は実は不要である。実際、Bang–Dubickas–Koolen–Moulton [1] により証明された所謂**坂内–伊藤予想**を用いて次が示される：

Proposition 6. *Suppose that the* ω_i *and the* α_i *exist and that* $\omega_i > 0$ *for all* i*. Then the* γ_i *exist as well. In particular, Theorem 4 holds true under this weaker assumption.*

3 古典的パラメータを持つ距離正則グラフ

距離正則グラフ Γ は、交叉数 b_i, c_i が

$$b_i = \left(\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left(\beta - \alpha \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad c_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \alpha \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (i = 0, 1, \dots, d) \tag{9}$$

と表されるとき、**古典的パラメータ** (d, q, α, β) を持つという (cf. [3, Section 6.1])。ただし

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{i-1}$$

は q-二項係数である。次の事実は重要である (cf. [3, Proposition 6.2.1])：

$$q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\} \quad \text{if } d \geqslant 3$$

既に述べたように、$q = 1$ を満たすグラフは既に決定されており、対応する QCLT も得られている。従って我々の主眼は $q \in \{\pm 2, \pm 3, \ldots\}$ となる場合にある。

以後、Γ は古典的パラメータ (d, q, α, β) を持つとする。(5) で定めた集合 $\pi(\Gamma)$ を決定することは一般には難しい問題である。$q = 1$ となる Hamming グラフ及び Johnson グラフについては、この集合が閉区間 $[0, 1]$ を含むことが知られている (cf. [7, Propositions 5.16, 6.27])。次の結果は $q \neq 1$ の場合に $\pi(\Gamma)$ の元を具体的にやはり無限個与える：

Proposition 7. *Suppose that Γ has classical parameters (d, q, α, β) with $d \geqslant 3$ and $q \in \{\pm 2, \pm 3, \ldots\}$. Then $q^{-i} \in \pi(\Gamma)$ for $i = 0, 1, 2, \ldots$.*

ここで古典的パラメータの一意性についてコメントする。[3, Corollary 6.2.2] により、$d \geqslant 3$ のとき古典的パラメータ (d, q, α, β) は次の 2 種類を除き一意的に定まる：

$$(d, \ell^2, 0, \ell), \qquad \left(d, -\ell, \frac{\ell(\ell+1)}{1-\ell}, \frac{\ell(1+(-\ell)^d)}{1-\ell}\right) \tag{10}$$

ただし、$\ell \geqslant 2$ である。Ivanov–Shpectorov [8] は、もし Γ が上の古典的パラメータを持つならば、ℓ は素数べきであり、Γ はエルミート双対極グラフ ${}^2A_{2d-1}(\ell)$ (cf. [3, Section 9.4]) になることを証明した。

本稿では以降さらに次の仮定を課す：

Assumption 8. Recall Assumption 3. We moreover assume that the graph $\Gamma = \Gamma_\lambda$ has classical parameters (d, q, α, β) with $d \geqslant 3$ and $q \in \{\pm 2, \pm 3, \ldots\}$. We will view q, α, and β as functions of Γ. For the classical parameters in (10), we understand that we may choose either set of them.

本稿の主結果を述べる (次数 $k = b_0$ も古典的パラメータで表されることに注意されたい)：

Theorem 9. *With reference to Assumption 8, q eventually takes at most three values. Suppose that q is eventually constant. Then so is α, and the following hold:*

(i) *If $\alpha \neq 0$, then $\beta/\sqrt{k}$ is eventually bounded, and there exist scalars γ and ρ with $\rho > 0$ and $\gamma(\rho + \alpha/\rho) > -1$, such that $t\sqrt{k} \to \gamma$ and the accumulation points of $\beta/\sqrt{k}$ are in $\{\rho, \alpha/\rho\}$. Moreover, we have $\rho = \sqrt{-\alpha}$ if $q < 0$.*

(ii) *If $\alpha = 0$, then there exist scalars γ and ρ with $\rho \geqslant 0$ and $\gamma\rho > -1$, such that $t\sqrt{k} \to \gamma$ and $\beta/\sqrt{k} \to \rho$.*

Suppose that q is not convergent. Then there exists a subnet of $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ for which q is eventually constant and (ii) holds above with $\rho = 0$.

Conversely, if $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ is a net of distance-regular graphs having classical parameters with $d \geqslant 3$ and $q \in \{\pm 2, \pm 3, \dots\}$, where q and α are eventually constant, such that $d \to \infty$ and (i) or (ii) holds above with respect to a suitable function $t \in \pi(\Gamma)$ with $\Sigma_t^2(A) > 0$, then $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ satisfies Assumption 3 (and thus Assumption 8 as well).

Theorem 9 に於いて、q がほとんど定数である場合を考えよう。このとき α もまたほとんど定数となり、(9) より交叉数 c_i についても同様である。$\omega_i, \alpha_i, \gamma_i$ は古典的パラメータ q, α、及び Theorem 9 (i), (ii) 中の γ, ρ を用いて次のように表される：

$$\omega_i = \frac{c_i}{1+\gamma(\rho+\alpha/\rho)}, \qquad \alpha_i = \frac{\left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right](\rho+\alpha/\rho)-\gamma}{\sqrt{1+\gamma(\rho+\alpha/\rho)}} \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\gamma_i = \frac{\gamma^i}{\sqrt{c_i\cdots c_1}} \qquad (i = 0, 1, \dots)$$

ただし $0/0 := 0$ 及び $0^0 := 1$ と解釈する。また、適当な部分ネットを取ることで (8) に対応する「正規スペクトル分布」が弱収束することが示せ、さらにその極限分布も書き下せるが、少々煩雑になるので本稿ではこれらの記述は省略し、具体例を一つ与えるに留める。

Example 10. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ の d 次元部分空間全体を頂点集合とし、2 頂点 x, y について、$\dim x \cap y = d-1$ が成り立つときに隣接させる。これにより定まるグラフを $J_q(n,d)$ と表し、**Grassmann グラフ**と呼ぶ (cf. [3, Section 9.1])。$J_q(n,d)$ と $J_q(n,n-d)$ は同形なので、以下常に $n \geqslant 2d$ を仮定する。$J_q(n,d)$ は古典的パラメータ (d,q,α,β) を持つ。ここで

$$\alpha = q, \qquad \beta = q\begin{bmatrix} n-d \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。q を固定し、$d \to \infty$, $t\sqrt{k} \to \gamma$、さらにある $\delta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ について $n-2d+1 \to 2\delta$ とする。このとき $\beta/\sqrt{k} \to \rho := q^\delta$ であり、従って Theorem 9 (i) の状況にあるが、正規スペクトル分布は次で与えられる確率測度 μ_∞ に弱収束する：

$$\begin{aligned}
&\mu_\infty\left(\frac{q^{\delta+j}+q^{-\delta-j}-q^\delta-q^{1-\delta}-\gamma(q-1)}{(q-1)\sqrt{1+\gamma(q^\delta+q^{1-\delta})}}\right) \\
&\qquad = \left(\frac{1}{q^{j(2\delta+j-1)}} - \frac{1}{q^{(j+1)(2\delta+j)}}\right)\cdot(\gamma(q-1)/q^{\delta+j+1};q^{-1})_\infty \\
&\qquad\qquad \times {}_2\phi_1\left(\left.\begin{matrix} q^{-j}, q^{1-2\delta-j} \\ q \end{matrix}\,\right|\, q; \gamma(q-1)q^{\delta+j}\right) \qquad (j = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

ちなみに、$\delta \geqslant 1/2$ 及び $\alpha/\rho = q^{1-\delta}$ から、δ の値を変えると Theorem 9 (i) に於いて異なる極限を与えることが分かる。なお、真空状態 φ_0 の場合、すなわち $\gamma = 0$ の場合には、測度 μ_∞ は Hora [5] により既に求められている。

参考文献

[1] S. Bang, A. Dubickas, J. H. Koolen, and V. Moulton, There are only finitely many distance-regular graphs of fixed valency greater than two, Adv. Math. 269 (2015) 1–55; arXiv:0909.5253.

[2] E. Bannai and T. Ito, Algebraic combinatorics I: Association schemes, Benjamin/Cummings Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[3] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, Distance-regular graphs, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[4] E. R. van Dam, J. H. Koolen, and H. Tanaka, Distance-regular graphs, Electron. J. Combin. (2016) #DS22; arXiv:1410.6294.

[5] A. Hora, Central limit theorems and asymptotic spectral analysis on large graphs, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 1 (1998) 221–246.

[6] A. Hora, Gibbs state on a distance-regular graph and its application to a scaling limit of the spectral distributions of discrete Laplacians, Probab. Theory Related Fields 118 (2000) 115–130.

[7] A. Hora and N. Obata, Quantum probability and spectral analysis of graphs, Springer, Berlin, 2007.

[8] A. A. Ivanov and S. V. Shpectorov, The association schemes of dual polar spaces of type ${}^2A_{2d-1}(p^f)$ are characterized by their parameters if $d \geqslant 3$, Linear Algebra Appl. 114/115 (1989) 133–139.

[9] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme I, J. Algebraic Combin. 1 (1992) 363–388.

[10] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme II, J. Algebraic Combin. 2 (1993) 73–103.

[11] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme III, J. Algebraic Combin. 2 (1993) 177–210.

[12] P. Terwilliger and A. Žitnik, The quantum adjacency algebra and subconstituent algebra of a graph, J. Combin. Theory Ser. A 166 (2019) 297–314; arXiv:1710.06011.